

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JOHN A. READ

***L*-sous-groupes compressibles du groupe-réticulé $A(S)$**

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 6, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A6_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L-SOUS-GROUPES COMPRESSIBLES DU GROUPE-RÉTICULÉ $A(S)$

par John A. READ

Soit S un ensemble totalement ordonné, et soit $A(S)$ le groupe-réticulé des permutations croissantes de S . Si $s \in S$ et $g \in A(S)$, l'intervalle de s par g est $\{t \in S \mid sg^n \leq t \leq sg^m\}$ pour certains entiers m et n , et est noté g_s . La fonction h sur S , définie par $xh = xg$ pour $x \in g_s$, et $xh = x$ pour $x \notin g_s$, est un élément de $A(S)$, et on l'appelle g comprimé hors de l'intervalle g_s . Un ℓ -sous-groupe G de $A(S)$ est compressible si $k \in G$ implique $f \in G$ si f est k comprimé hors d'un intervalle de k . Avec une démonstration plus courte que celle de J. T. LLOYD, dans sa thèse, pour montrer que $A(S)$ est complètement distributif, nous montrerons que chaque ℓ -sous-groupe compressible de $A(S)$ (donc $A(S)$) est complètement distributif, c'est-à-dire pour chaque sous-ensemble $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ de G ,

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} a_{ij} = \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} a_{i, f(i)}$$

lorsque les $\bigvee$ et les $\bigwedge$ écrits existent.

Une conséquence facile de ce résultat est que chaque ℓ -sous-groupe stabilisateur (définition 5), d'un ℓ -sous-groupe compressible G de $A(S)$, est un ℓ -sous-groupe fermé de G (définition 4).

Définition 1. - Soient h et g éléments du groupe-réticulé G . L'élément h est subordonné à g , ce qui s'écrit hsg , si, lorsque $|g| = \bigvee_{\alpha \in A} g_{\alpha}$ pour un ensemble $\{g_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$ d'éléments positifs de G , on a $|h| \leq g_{\alpha}$ pour un $\alpha \in A$, ($|g| = g \vee g^{-1}$).

THÉORÈME (E. C. WEINBERG [2]). - Le groupe-réticulé G est complètement distributif si, et seulement si, $\Phi(G) = e$, où $\Phi(G) = \{g \in G \mid hsg \text{ implique } h = e\}$.

LEMME 1. - Soit G un groupe-réticulé, et soit $e < h \in G$ tel que

$$\{k \in G \mid e \leq k \leq h\}$$

soit totalement ordonné. (On dit que h est basique). On a $h \notin \Phi(G)$.

Démonstration. - Si $\{k \in G \mid e < k < h\} \neq \emptyset$, soit f un élément de cet ensemble. Si f n'est pas subordonné à h , on a un ensemble $\{h_{\alpha} > e \mid \alpha \in A\}$ tel que $vh_{\alpha} = h$ et $f \not\leq h_{\alpha}$ pour chaque α . Mais h est basique, donc $h_{\alpha} \leq f$ pour chaque α , et on a $vh_{\alpha} \leq f$ qui n'est pas possible.

Si $\{k \in G \mid e < k < h\} = \emptyset$, évidemment h est subordonné à h .

Notation. - On écrit

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}^- = \{\dots, -2, -1, 0\}.$$

Définition 2. - Soit G un ℓ -sous-groupe d'un $A(S)$. Si $\{h, g\} \subseteq G$ est tel que $xh^n \leq xg$ pour chaque $x \in S$ et chaque $n \in \mathbb{Z}^+$, on dit que h est infinitement petit par rapport à g , et on écrit $h \ll g$.

LEMME 2. - Soit G un ℓ -sous-groupe d'un $A(S)$, et soit $h \in G$. Si, pour $\{x, y \mid x \neq y\} \subseteq S$, on a $xh \geq x$ et $yh \leq y$, alors on a $x \notin h_y$ et $y \notin h_x$.

Démonstration. - Dans le cas $x < y$, on a $yh \leq y$, $yh^n \leq y$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$, et donc $xh^n < yh^n \leq y$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $n \in \mathbb{Z}^-$, $xh^n \leq x < y$, et donc $y \notin h_x$.

Dans le cas $y < x$, on a $yh^n \geq y$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}^-$, et donc $xh^n > yh^n \geq y$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}^-$. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $xh^n > y$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}^+$, et donc $y \notin h_x$.

De la même façon, $x \notin h_y$.

Définition 3. - Soit $S(g) = \{x \in S \mid xg \neq x\}$. On dit que g est comprimé si $S(g)$ est exactement un intervalle d'un $s \in S$ par g .

LEMME 3. - Soit G un ℓ -sous-groupe compressible d'un $A(S)$, et soit $e < g \in G$ tel que g soit comprimé. Si $k \in G$ est tel que $sk > s$ et $tk = t$ pour

$$\{s, t\} \subseteq S(g),$$

il y a un $e < h \in G$ tel que $h \ll g$ (Par conséquent, g est basique si, et seulement si, $S(k) = S(g)$ pour chaque $k \in G$ tel que $e < k \leq g$).

Démonstration. - On peut supposer que $yk = y$ pour $y \notin k_s$ et $k \leq g$ (Sinon prendre $k \wedge g$ comprimé hors de $(k \wedge g)_s$ au lieu de k). En conséquence du lemme 2, $k \geq e$. Supposons $s < t$. Si $t < s$, la démonstration est presque la même.

Par le lemme 2, $t \notin k_s$, et on a un $n \geq 0$ ($sg^0 = s$) tel que $sg^n \in k_s$, mais $sg^{n+1} \notin k_s$. On a $sg^n g^{-1} \in k_s$, ou $sg \notin k_s$ et $sg^{-1} \notin k_s$; dans un tel cas, ou $e < k \ll g$, ou il y a $z \in k_s$ tel que $(z, zg) \subseteq k_s$, et dans ce dernier cas, $e < k \wedge g^{-1} kg \ll g$.

Donc, on suppose que $sg^n g^{-1} \in k_s$. Soit $x = (sg^n)(g^{-1} kg)^{-1}$. Montrons que $x \in k_s$. Si $sg^n g^{-1} \in k_s$, on a, parce que $k \leq g$,

$$sg^n g^{-1} \leq sg^n (g^{-1} kg)^{-1}.$$

On a aussi $g^{-1} k^{-1} g \leq e$, donc $sg^n (g^{-1} kg)^{-1} \leq sg^n$, donc $x \in k_s$ par convexité. Donc, $xk > x$, et on a, pour un $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$x(g^{-1} kg) = sg^n < xk^m.$$

Avec le point sg^{n+1} , on a $(sg^{n+1})g^{-1}kg > sg^{n+1} = sg^{n+1}k^m$.

Pour le troisième point sg^{n+2} , on a $(sg^{n+2})g^{-1}kg = sg^{n+2} = sg^{n+2}k^m$.

Donc, par le lemme 2, l'intervalle de sg^{n+1} par $(g^{-1}kg)k^{-m}$ est contenu dans (x, sg^{n+2}) , lequel est contenu dans (sg^{n-1}, sg^{n+2}) parce que $x = [sg^n]g^{-1}k^{-1}g$ et $k^{-1}g \geq e$.

Soit $\rho = g^{-1}kgk^{-m}$ comprimé hors de $(g^{-1}kgk^{-m})sg^{n+1}$. Donc, $\rho > e$. Ou $\rho \ll g$ et nous définissons $h = \rho$, où il y a un $z \in (sg^{n-1}, sg^{n+2})$ tel que $(z, zg) \subseteq \rho_z$; dans un tel cas $g\rho g^{-1} \wedge \rho > e$, et est tel que

$$(g\rho g^{-1} \wedge \rho)_z \subseteq (sg^{n-1}, sg^{n+1}).$$

De la même façon, ou $g\rho g^{-1} \wedge \rho \ll g$ et nous définissons $h = g\rho g^{-1} \wedge \rho$, où il y a $y \in S$ et

$$f = g(g\rho g^{-1} \wedge \rho)g^{-1} \wedge (g\rho g^{-1} \wedge \rho) > e,$$

tel que $yf > y$ et $f_y \subseteq (sg^{n-1}, sg^n)$. Dans ce dernier cas, $f \ll g$, et nous définissons $h = f$.

THÉOREME 2. - Chaque ℓ -sous-groupe compressible de $A(S)$ est complètement distributif (Donc $A(S)$ est complètement distributif).

Démonstration. - Soit G un ℓ -sous-groupe compressible de $A(S)$. Si chaque $e < h \in G$, qui est comprimé, n'est pas un élément de $\Phi(G) = e$, car $\Phi(G)$ est convexe ([1], corollaire 3.7), et G est compressible, et par conséquent, G est complètement distributif d'après le théorème 1.

Soit $e < g \in G$ tel que g soit comprimé. Par le lemme 3, g est basique, et $g \notin \Phi(G)$ par le lemme 1, où il y a $e < k \in G$ qui est comprimé, tel que $e < k \ll g$. De la même façon, k est basique, et $k \notin \Phi(G)$, où il y a $e < h \in G$ qui est comprimé tel que $h \ll k$. Soit $t \in S(h)$, $x = tk^{-2}$. On a $h_t \subseteq (x, xg)$.

De la même façon, $h \notin \Phi(G)$ et $g \notin \Phi(G)$, où il y a $f \ll h$ qui est comprimé, et un point $y \in h_t$ tel que $S(f) \subseteq (y, yh)$.

Montrons que f est subordonné à g . Soit $g = Vg_\alpha$, où $\{g_\alpha > e \mid \alpha \in A\} \subseteq G$. Soit $d = hfh^{-1}$.

Si $z \notin (yh^{-1}, y)$, $zd^{-1}g = zg \geq zg_\alpha$ pour chaque α .

Supposons $z \in (yh^{-1}, y)$ et $zg_\alpha < yh$ pour chaque α . Parce que $zd^{-1} \in (x, xg)$, et donc $zd^{-1}g \in (xg, xg^2)$, on a $zg_\alpha < yh < xg < zd^{-1}g$. Donc $g_\alpha \leq d^{-1}g$ pour chaque $\alpha \in A$, qui implique que $Vg_\alpha < d^{-1}g < g$, qui n'est pas possible.

Donc, pour un $\alpha \in A$ et un $z \in (yh^{-1}, y)$, $zg_\alpha \geq yh$, et on a, pour $t \in (y, yh)$, $tg_\alpha \geq zg_\alpha \geq yh \geq tf$, et donc $f \leq g_\alpha$, qui implique que f est subordonné à g , c'est-à-dire G est complètement distributif.

Définition 4. - Un ℓ -sous-groupe convexe M d'un groupe réticulé est fermé dans G si, lorsque $\{g_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq M$ et $Vg_\alpha = g$ existent dans G , on a $g \in M$. Soit $M^* = \langle Vg_\alpha \mid g_\alpha \in M, \text{ et } Vg_\alpha \text{ existe dans } G \rangle$.

Définition 5. - Soit G un ℓ -sous-groupe d'un $A(S)$. On dit que

$$G_s = \{g \in G \mid sg = s\}$$

est un ℓ -sous-groupe stabilisateur de G .

THÉOREME 3. - Soit G un ℓ -sous-groupe compressible d'un $A(S)$. Les ℓ -sous-groupes stabilisateurs de G sont ℓ -sous-groupes fermés dans G .

Démonstration. - Soit G_s^* comme dans la définition 4. Par le lemme 3.2 de [1], l'ensemble $G_s^* \setminus G_s$ est nul, ou il y a $e < h \in G_s^* \setminus G_s$ tel que $h = Vh_\alpha$ pour un ensemble $\{h_\alpha > e \mid \alpha \in A\} \subseteq G_s$. En conséquence, $sh > s$. Soit $g = h$, comprimé hors de h_s . Alors, pour $g_\alpha = h_\alpha \wedge g \in G_s^+$, on a $g = Vg_\alpha$, $sg_\alpha = s$, $sg > s$, et g est comprimé.

Par le théorème 2, le ℓ -sous-groupe G est complètement distributif, donc il y a un $f > e$ subordonné à g . Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha^n g_\alpha g_\alpha^{-n} = g$$

et donc

$$f \leq g^n g_\alpha g_\alpha^{-n} \text{ pour un } \alpha.$$

Mais, $sg^{-n}(g^n g_\alpha g_\alpha^{-n}) = sg^{-n}$ pour chaque α , donc

$$(sg^{-n})f = sg^{-n} \text{ pour chaque } n \in \mathbb{Z}.$$

Mais $f \leq g$, donc, si $x < xf$,

$$f_x \subseteq (sg^{n-1}, sg^n) \text{ pour un } n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $k = f$ comprimé hors de f_x . Si $t \in f_x$, $t < sg^n$, et donc

$$t(g^{-n} g_\alpha g_\alpha^n) < sg^n(g^{-n} g_\alpha g_\alpha^n) = sg^n < tk^{-1} g.$$

Si $t \notin f_x$, $g_\alpha \leq g$, et donc $tg^{-n} g_\alpha g_\alpha^n \leq tg = tk^{-1} g$. Donc $g^{-n} g_\alpha g_\alpha^n \leq k^{-1} g$ pour chaque $\alpha \in A$, ce qui implique que $\bigvee_{\alpha \in A} g^{-n} g_\alpha g_\alpha^n \leq k^{-1} g < g$ qui n'est pas possible. Donc $G_s^* = G_s$, et G_s est fermé dans G .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BYRD (R. D.) and LLOYD (J. T.). - Closed subgroups and complete distributivity in lattice-ordered groups, Math. Z., t. 101, 1967, p. 123-130.
- [2] WEINBERG (E. C.). - Completely distributive lattice-ordered groups, Pacific J. Math., t. 12, 1962, p. 1131-1137.

John A. READ
Canadian Coast Guard College
P. O. Box 4500
SYDNEY, Nova Scotia (Canada)