Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Christine W. Ayoub

Anneaux locaux et uniséries

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 14, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A13_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 14, 4 p.

8 mai 1972

ANNEAUX LOCAUX ET UNISÉRIELS

par Christine W. AYOUB

Soit R un anneau artinien et commutatif avec un élément unité, noté 1. Nous supposons de plus que R est local, c'est-à-dire contient un seul idéal maximal N. Alors, puisque R est artinien, nous savons que :

1° $\exists\, n > 1$ tel que $N^{n-1} \neq (0)$, $N^n = (0)$ (si $N = 0$, R est un corps, et ce cas ne nous intéresse pas) ;

2° R/N est un corps ;

3° $r \in R \Longrightarrow \begin{cases} r & N \Longrightarrow r^n = 0 \\ \text{ou} & \\ r & \text{est inversible, i. e. } \exists\, r' \in R \text{ tel que } rr' = 1 \end{cases}$;

4° Pour $1 \leqslant i < n$, N^i/N^{i+1} est un espace vectoriel sur R/N. En effet, N^i/N^{i+1} est un R-module, et $N\,N^i = N^{i+1}$, ce qui entraîne que N^i/N^{i+1} est un module sur le corps R/N ; autrement dit, un espace vectoriel sur R/N.

Définition. - Soit R un anneau local, artinien, commutatif, avec élément-unité 1, et soit N l'idéal maximal de R.

$$(R \text{ est homogène}) \rightleftarrows (\dim_{R/N}(N^i/N^{i+1}) = 1 \quad (1 \leqslant i < n)) .$$

Pour $0 \neq a \in R$, la fonction w est définie par

$$(w(a) = i) \rightleftarrows (a \in N^i \backslash N^{i+1}) .$$

(Par convention, $N^0 = R$; par conséquent, (a est inversible) $\rightleftarrows (w(a) = 0)$.)

La fonction w a d'importantes propriétés qui nous seront bien utiles. Ce sont les suivantes.

PROPOSITION. - *Soit R un anneau homogène. Alors,*

(i) *Si a et b sont des éléments de R tels que $w(a) = i$, $w(b) = j$, où $i + j < n$,*

$$w(ab) = i + j ;$$

(ii) *Si c est élément de R tel que $w(c) = i$,*

$$Rc = N^i .$$

Remarque. - La propriété (i) est semblable à celle d'une valuation.

COROLLAIRE. - *Soit R un anneau homogène. Les seuls idéaux de R sont N^i, où $i \geqslant 0$; ils sont tous principaux.*

Remarque. - Dans un mémoire de 1934 [4], G. KÖTHE a étudié les anneaux uniséries ("einreihig"). Pour un anneau local, la définition d'un tel anneau est la suivante :

$$(R \text{ est uniséries}) \rightleftharpoons (R \text{ a seulement une suite de composition}) .$$

Nous voyons que les anneaux homogènes sont donc uniséries, et la réciproque est vraie aussi pour un anneau local.

Dans ce qui suit, nous supposons que le corps R/N est une extension algébrique de $\underset{\sim}{Z}_p$. Dans ce cas, $p \in N$, ce qui entraîne que N^i/N^{i+1} (comme groupe additif) est élémentaire. D'autre part, soit

$$G : \{x \in R ; \ x \text{ est inversible}\}$$

et soit

$$H_i = 1 + N^i = \{1 + x ; \ x \in N^i\} \quad (1 \leqslant i < n) , \quad H = H_1 .$$

G est un groupe multiplicatif,

$$H_i \leqslant G \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad \text{et} \quad G \cong H \times (R/N)^* \quad \text{(produit direct)},$$

où $(R/N)^*$ est le groupe multiplicatif du corps R/N .

On voit aisément que l'application

$$\varphi_s : N^{s+1} + x \longrightarrow H_{s+1}(1 + x) \quad (x \in N^s) \quad (1 \leqslant s < n)$$

est un isomorphisme du groupe $(N^s/N^{s+1} , +)$ sur $(H_s/H_{s+1} , .)$. Ainsi, pour N et H , on a respectivement les suites :

$$N > N^2 > \ldots > N^s > N^{s+1} > \ldots > N^n = \{0\}$$

et

$$H > H_2 > \ldots > H_s > H_{s+1} > \ldots > H_n = \{1\}$$

où $(N^s/N^{s+1} , +)$ et $(H_s/H_{s+1} , .)$ sont des p-groupes élémentaires isomorphes.

Exemple. - Soit $R = \underset{\sim}{Z}_{p^n}$ (p , nombre premier).

Alors, $N = (p)$, et N est un groupe cyclique d'ordre p^{n-1} . D'autre part, $H = 1 + N$ est aussi un groupe cyclique d'ordre p^{n-1} dans le cas où $p \neq 2$. Si $p = 2$ et $n \geqslant 3$, $H = (-1) \times K$, où K est cyclique d'ordre p^{n-2} .

[Dans un mémoire, publié en 1969 [1], j'ai démontré que

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ cyclique} \\ \underline{\text{ou}} \\ H \text{ cyclique} \end{array}\right\} \Longrightarrow (R \text{ homogène, et } R/N \simeq Z_p) .]$$

D'après l'exemple, on voit que N et H ne sont pas nécessairement isomorphes, ils le sont pour $p > 2$, mais ne le sont pas pour $p = 2$, $n \geqslant 3$ (pour $p = 2$, $n = 2$, ils le sont aussi).

On peut établir les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - Soit R un anneau homogène (ou local, unisériel) ; soit R/N extension algébrique de $\underset{\sim}{Z}_p$ et $k = w(p)$ (si $p = 0$, soit $k = n$). Alors,

$$(k < p - 1) \Rightarrow ((N , +) \simeq (H , .)) .$$

THÉORÈME 2. - Soit R un anneau homogène et fini. Alors,

$$(\text{rang de } H) = (\text{rang de } N)$$

à moins que R ne soit exceptionnel. Dans ce dernier cas,

$$(\text{rang de } H) = ((\text{rang de } N) + 1) .$$

(R est exceptionnel si $(p - 1) | k$, et ... une autre condition assez compliquée !).

Les méthodes de démonstration se rattachent à la théorie des groupes abéliens. Elles se trouvent dans un mémoire publié en 1970 [2]. L'idée est la suivante :

$$(*) \begin{cases} N > N^2 > \ldots > N^s > N^{s+1} > \ldots > N^n = \{0\} , \text{ et l'application} \\ \eta : N^{s+1} + x \longrightarrow N^{s+k+1} + px \text{ est un isomorphisme de } N^s/N^{s+1} \text{ sur} \\ N^{s+k}/N^{s+k+1} \quad (\text{pour } s < n - k) ; \text{ pour } s \geqslant n - k , \ px = 0 \quad (\forall\, x \in N^s) . \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{array}{ccc} N^s/N^{s+1} & \xrightarrow{\eta_s} & N^{s+k}/N^{s+k+1} \qquad (s < n - k) \\ \uparrow \varphi_s^{-1} & & \downarrow \varphi^{s+k} \\ H_s/H_{s+1} & \xrightarrow{\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}} & H_{s+k}/H_{s+k+1} \end{array}$$

Ainsi, $\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}$ est un isomorphisme de H_s/H_{s+1} sur H_{s+k}/H_{s+k+1}, et on voit par le calcul que

$$[H_{s+1}(1 + x)](\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}) = H_{s+k+1}(1 + px) = H_{s+k+1}(1 + x)^p \qquad (1 + x \in H_s)$$

dans le cas où $k < p - 1$.

Soit $\xi_s = \varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}$. Alors nous avons :

$$(**) \begin{cases} H > H_2 > \ldots > H_s > H_{s+1} > \ldots > H_n = \{1\} , \text{ et l'application} \\ \xi_s : H_{s+1}(1 + x) \longrightarrow H_{s+k+1}(1 + x)^p \text{ est un isomorphisme de } H_s/H_{s+1} \text{ sur} \\ H_{s+k+1} \quad (\text{pour } s < n - k) ; \text{ pour } s \geqslant n - k , \ (1 + x)^p = 1 \quad (\forall\ 1+x \in H_s) . \end{cases}$$

(*) et (**) sont respectivement des diagrammes pour N et H , et du fait que $N^s/N^{s+1} \simeq H_s/H_{s+1}$, on peut déduire que $N \simeq H$.

Les résultats sur les groupes N et H proviennent d'un mémoire récemment paru dans le "Journal of Number Theory"[3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AYOUB (Christine W.). - On finite primary rings and their groups of units, Comp. Math., Groningen, t. 21, 1969, p. 247-252.

[2] AYOUB (Christine W.). - On diagrams for abelian groups, J. of Number Theor., t. 2, 1970, p. 442-458.

[3] AYOUB (Christine W.). - On the group of units of certain rings, J. of Number Theor., t. 4, 1972, p. 383-403.

[4] KÖTHE (Gottfried). - Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring, Math. Z., t. 39, 1935, p. 31-44.

Christine W. AYOUB
Pennsylvania State University
230 McAllister Building
UNIVERSITY PARK, Pa 16802 (Etats-Unis)