Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alain Gerente

Demi-groupes duaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 12, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A11_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 12, 21 p.

17 avril 1973

DEMI-GROUPES DUAUX

par Alain GERENTE

1. Introduction.

La notion d'anneau dual a été introduite par R. BAER [1], I. KAPLANSKY [7], et plus tard développée par F. BONSALL et A. GOLDIE [2], ainsi que par K. G. WOLFSON [13]. Une extension de leurs résultats et les connections avec la théorie des anneaux normés sont données dans le livre de NAJMARK [9].

Les notions introduites dans ces articles utilisant seulement les propriétés mulplicatives des éléments de l'anneau, il semblait naturel de demander comment ces résultats pouvaient être étendus à la théorie des demi-groupes. Stefan SCHWARZ a été le premier à étudier les demi-groupes duaux [11] ; il a démontré, en particulier, qu'un demi-groupe complètement 0-simple est dual si, et seulement si, il est inverse ; mais la majorité des résultats intéressants de son article ont été obtenus en imposant des conditions assez restrictives (par exemple, le demi-groupe étudié ne possède pas d'idéaux nilpotents).

L'étude des demi-groupes duaux sans idéaux nilpotents a été poursuivie par NUMAKURA [10] dans le cas compact, et récemment dans le cas général par KRAJNAKOVA [8]. Plus récemment encore, Štefan SCHWARZ s'est rendu compte que la majorité des résultats obtenus précédemment étaient valables dans le cas général [12]. Nous donnons ci-dessous (lemmes 1 à 4) un résumé de l'essentiel des propriétés connues qui permettront au lecteur de se faire une idée assez précise de la structure d'un demi-groupe dual après les travaux de Štefan SCHWARZ. Nous renvoyons à [12] pour la démonstration de ces lemmes.

Soient S un demi-groupe avec zéro, A une partie non vide de S. Nous définissons l'annulateur à gauche de A, $\ell(A)$, et l'annulateur à droite de A, $r(A)$, par les propriétés suivantes :

$\ell(A) = \{x \in S ; \ xA = 0\}$, $r(A) = \{x \in S ; \ Ax = 0\}$,

$\ell(A)$ (resp. $r(A)$) est un idéal à gauche (resp. à droite), et si A est un idéal, $\ell(A)$ et $r(A)$ sont des idéaux. On peut **établir** facilement les résultats qui suivent :

(a) $A \subseteq r(\ell(A))$, $A \subseteq \ell(r(A))$.

(b) $(A \subseteq B \subseteq S)$ implique $(r(B) \subseteq r(A)$ et $\ell(B) \subseteq \ell(A))$.

(c) Si I est un ensemble non vide d'indices, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides de S, alors

$$\ell(\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} \ell(A_i) \quad \text{et} \quad r(\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} r(A_i) .$$

En particulier, si L (resp. R) est un idéal à gauche (resp. à droite) de S, $\ell(r(L))$ (resp. $r(\ell(R))$) est un idéal à gauche (resp. à droite) de S contenant L (resp. R).

Un demi-groupe avec zéro, et non réduit à $\{0\}$, est dit dual si, pour chaque idéal à gauche L de S, nous avons $\ell(r(L)) = L$, et, pour chaque idéal à droite R de S, nous avons $r(\ell(R)) = R$.

On déduit facilement que :

(d) Soient S un demi-groupe dual, I un ensemble d'indices, $I \neq \emptyset$, $(L_i)_{i\in I}$ (resp. $(R_i)_{i\in I}$) une famille d'idéaux à gauche (resp. à droite) de S. Alors

$$r(\bigcap_{i\in I} L_i) = \bigcup_{i\in I} r(L_i) \quad (\text{resp. } \ell(\bigcap_{i\in I} R_i) = \bigcup_{i\in I} \ell(R_i)) .$$

Soient S un demi-groupe dual, G (resp. D) l'ensemble de tous les idéaux à gauche (resp. à droite) de S ; en introduisant les opérations $\cap$ et $\cup$, on voit que G et D sont des treillis complets ; l'application bijective de G sur D, qui à $L \in G$ associe $r(L) \in D$, a les propriétés suivantes :

$$r(\bigcup_{i\in I} L_i) = \bigcap_{i\in I} r(L_i) \quad \text{et} \quad r(\bigcap_{i\in I} L_i) = \bigcup_{i\in I} r(L_i) ;$$

d'où les treillis complets G et D sont complètement anti-isomorphes ; l'ensemble des idéaux de S est clairement un sous-treillis complet de G et de D ; or si M est un idéal de S, il en est de même de $r(M)$; donc le sous-treillis complet des idéaux bilatères de S est anti-isomorphe à lui-même.

Nous rappelons qu'un demi-groupe S avec zéro est dit réunion 0-directe de demi-groupes S_i, $i \in I$, si

$$S = \bigcup_{i\in I} S_i \quad \text{et} \quad S_i \cap S_j = S_i S_j = \{0\} \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (i \in I, \ j \in I) ;$$

il est clair que chaque S_i est un idéal de S, donc nous pouvons parler de réunion 0-directe d'idéaux.

Le lemme ci-dessous découle de [12] (p. 462-464, et lemme 4.1).

LEMME 1. - Soit S un demi-groupe dual :

(a) $\ell(S) = r(S) = 0$;

(b) Soit a un élément de S, alors a appartient à $Sa \cap aS$; donc Sa (resp. aS, SaS) est l'idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de S engendré par a ;

(c) Chaque idéal à droite I de S contient un idéal 0-minimal à droite (sauf si $I = \{0\}$), et est contenu dans un idéal maximal à droite (sauf si $I = S$) ;

(d) Chaque idéal I de S contient un idéal 0-minimal (sauf si $I = \{0\}$), et est contenu dans un idéal maximal (sauf si $I = S$) ;

(e) Chaque idéal 0-minimal d'un côté est contenu dans un idéal 0-minimal, et chaque idéal maximal d'un côté contient un idéal maximal ;

(f) Si L est un idéal 0-minimal (resp. maximal) à gauche, r(L) est un idéal maximal (resp. 0-minimal) à droite ; résultats analogues en permutant gauche et droite ;

(g) Si M est un idéal 0-minimal (resp. maximal) , $\ell(M)$ et r(M) sont des idéaux maximaux (resp. 0-minimaux) ;

(h) Soit $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ une réunion 0-directe d'idéaux S_i ; S est dual si, et seulement si, chaque S_i est dual.

Dans le reste de cet exposé, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ désigneront les équivalences de Green sur le demi-groupe dual S . Si x est un élément de S , nous noterons L_x , R_x , H_x , D_x , J_x , respectivement, la $\mathcal{L}$-classe, la $\mathcal{R}$-classe, la $\mathcal{H}$-classe, la $\mathcal{D}$-classe et la $\mathcal{J}$-classe de x dans S .

Le lemme 1 (d) montre que tout demi-groupe dual S contient des idéaux maximaux puisque, par définition, S n'est pas réduit à {0} ; nous noterons désormais $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S ($S^\times$ est non vide, car $0 \in S^\times$). En utilisant les résultats d'un article de GRILLET sur les intersections d'idéaux maximaux [6], S. SCHWARZ établit les résultats suivants (voir [12], lemme 3.1 pour (a), lemmes 2.1, 2.2, 3.3 et théorème 3.12 pour (b), théorème 3.11 pour (c), théorème 3.10 et lemme 3.13 pour (d) et (e)).

LEMME 2. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S , et E l'ensemble des idempotents de S .

(a) $S^\times$ ne contient pas d'autre idempotent que 0 ;

(b) Chaque $\mathcal{J}$-classe contenue dans $S \setminus S^\times$ contient un idempotent et le produit de deux $\mathcal{J}$-classes distinctes de $S \setminus S^\times$ est égal à {0} ;

(c) Le produit de deux idempotents est toujours 0 ;

(d) $S = \bigcup_{e\in E} Se = \bigcup_{f\in E} fS$; de plus si e et f sont deux idempotents distincts $Se \cap Sf = eS \cap fS = \{0\}$;

(e) Soit e un idempotent non nul de S ; Se (resp. eS) contient un idéal 0-minimal à gauche (resp. à droite) unique ; en outre :

$$r(Se) = \{\bigcup_f fS \ ; \ f \in E \ , \ f \neq e\} \ , \quad \ell(eS) = \{\bigcup_f Sf \ ; \ f \in E \ , \ f \neq e\} \ .$$

Soit e un idempotent non nul de S dual ; on note L (resp. R) l'idéal 0-minimal à gauche (resp. à droite) unique contenu dans Se (resp. eS) . Soit J_e la $\mathcal{J}$-classe de e (nous verrons ci-dessous (lemme 5), que c'est en fait une $\mathcal{D}$-classe) ; on pose

$$SE_\alpha = \bigcup_f (Sf : \ f \in E \cap J_e) \quad \text{et} \quad E_\alpha S = \bigcup_f (fS : \ f \in E \cap J_e) \ .$$

Nous avons les résultats suivants (voir [12] paragraphe 6).

LEMME 3.

(a) SE_α (resp. $E_\alpha S$) contient un seul idéal 0-minimal M (resp. N), et $M = LS$ (resp. $N = SR$) est exactement la réunion de tous les idéaux 0-minimaux à gauche (resp. à droite) contenus dans SE_α (resp. $E_\alpha S$).

(b) SeS (qui contient évidemment SE_α et $E_\alpha S$) contient un seul idéal 0-minimal si, et seulement si, $SE_\alpha = E_\alpha S$.

Le reste de l'article [12] est consacré à la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un demi-groupe dual soit réunion 0-directe de demi-groupes duaux d'un certain type (théorèmes6.2, 6.3, 6.8, 6.9).

Remarquons qu'un demi-groupe dual possède toujours au moins un idéal 0-minimal à gauche et au moins un idéal 0-minimal à droite (lemme 1 (c)), donc un demi-groupe dual 0-simple est complètement 0-simple ; comme la structure d'un demi-groupe complètement 0-simple dual est connue ([11] théorème 3.9), nous obtenons le lemme suivant.

LEMME 4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) S est un demi-groupe dual 0-simple ;

(B) S est un demi-groupe dual complètement 0-simple ;

(C) S est un demi-groupe complètement 0-simple et inverse ;

(D) S est un demi-groupe de Brandt.

Après la parution du dernier article de Stefan SCHWARZ, il était possible d'avoir une idée très précise sur la structure de $S/S^\times$, mais ce qui se passe dans $S^\times$ restait en grande partie inconnu (en dehors des propriétés énoncées dans le lemme 1 et le lemme 2).

Nous nous proposons d'exposer ici une partie des résultats que nous avons obtenus dans cette voie, et spécialement la structure des $\mathcal{D}$-classes contenues dans $S^\times$.

2. Résultats préliminaires.

Soient S un demi-groupe, E l'ensemble des idempotents de S. E est muni de la relation d'ordre classique, à savoir $e \leq f$ ($e \in E$, $f \in E$) si, et seulement si, $ef = fe = e$. On dit que S est complètement semi-simple si chacun des facteurs principaux de S est complètement 0-simple ou complètement simple ([4], page 32).

Le lemme ci-dessous découle du théorème 2 de [5].

LEMME 5. - Soient S un demi-groupe, D une $\mathcal{D}$-classe contenant un idempotent e minimal parmi les idempotents de D ; alors D est une $\mathcal{J}$-classe, et le facteur principal $J(e)/I(e)$ est complètement 0-simple ou complètement simple.

THÉORÈME 1. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S, E l'ensemble des idempotents de S ; Alors :

(a) Chaque $\mathcal{J}$-classe, contenue dans $S \setminus S^\times$, est une $\mathcal{D}$-classe, et $T = S \setminus S^\times \cup \{0\}$ est la réunion des $\mathcal{D}$-classes régulières de S ;

(b) T est un demi-groupe dual inverse complètement semi-simple ; si a est un élément de T, les classes de Green de a dans S et T coïncident ; si x et y sont deux éléments non nuls de T, $xy \neq 0$ si, et seulement si, $L_x \cap R_y$ contient un idempotent, et dans ce cas $xy \in R_x \cap L_y$.

Démonstration.

(a) Soit I une $\mathcal{J}$-classe contenue dans $S \setminus S^\times$; I contient un idempotent e (lemme 2 (b)) ; il suit du lemme 2 (c) que le seul idempotent comparable à e est 0, et il est clair que 0 n'appartient pas à I ; d'où I est une $\mathcal{D}$-classe (lemme 5) ; comme $S^\times$ ne contient pas d'autre idempotent que 0 (lemme 2 (a)), T est clairement la réunion des $\mathcal{D}$-classes régulières de S.

(b) Soient x et y deux éléments de $S \setminus S^\times$ tels que $xy \neq 0$; compte tenu de (a), il existe un idempotent e dans L_x et un idempotent f dans R_y ; alors xy appartient à $SefS$, d'où $e = f$ (sinon $ef = 0$ d'après le lemme 2 (c), et $SefS = \{0\}$, donc $xy = 0$) ; alors e étant un idempotent de $L_x \cap R_y$, xy appartient à $R_x \cap L_y$ ([3] théorème 2.17) ; en particulier T est un demi-groupe.

Soit a un élément de $S \setminus S^\times$, a est régulier dans S, donc il existe x dans S tel que $a = axa$; $S^\times$ étant un idéal, il est clair que x appartient à $S \setminus S^\times$, ce qui prouve que T est un demi-groupe régulier.

Soient a un élément de $S \setminus S^\times$ et b un élément de S appartenant à L_a ; il existe x et y dans S tels que $a = xb$ et $b = ya$; $S^\times$ étant un idéal, x et y appartiennent à $S \setminus S^\times$, donc la $\mathcal{L}$-classe de a dans T coïncide avec la $\mathcal{L}$-classe de a dans S ; en particulier, T est un demi-groupe inverse puisque deux idempotents distincts ne peuvent appartenir ni à la même $\mathcal{L}$-classe de S, ni à la même $\mathcal{R}$-classe de S d'après le lemme 2 (c) ; T est complètement semi-simple d'après le lemme 5, et si D est une $\mathcal{D}$-classe non nulle de T, $D \cup \{0\}$ est un demi-groupe complètement 0-simple et inverse, donc dual (lemme 4), et T dual suit du lemme 1 (h) et du lemme 2 (b).

Le corollaire ci-dessous généralise le lemme 4 puisqu'un demi-groupe 0-simple est évidemment semi-simple, c'est-à-dire un demi-groupe dont tout facteur principal est simple ou 0-simple.

COROLLAIRE 1.1. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) S est semi-simple ;

(B) S est complètement semi-simple ;

(C) $S^{\times} = \{0\}$;

(D) S est 0-simple dual ou réunion 0-directe de demi-groupes 0-simples duaux.

Démonstration.

(B) $\Rightarrow$ (A) est immédiat.

(A) $\Rightarrow$ (C) : supposons $S^{\times}$ non réduit à $\{0\}$; alors $S^{\times}$ contient un idéal 0-minimal de S , I (lemme 1 (d)) ; mais I contient un idéal 0-minimal à gauche de S et un idéal 0-minimal à droite de S (lemme 1 (c)). Supposons $I^2 \neq \{0\}$, alors $I^2 = I$, et I est un demi-groupe 0-simple contenant un idéal 0-minimal à gauche de lui-même et un idéal 0-minimal à droite de lui-même ([3] théorèmes 2.29 et 2.35) ; alors I est complètement 0-simple, donc contient un idempotent non nul, ce qui est en contradiction avec $I \subseteq S^{\times}$ et le lemme 2 (a) ; donc $I^2 = \{0\}$, et le facteur principal associé à un élément non nul de I est ni 0-simple, ni simple, ce qui entraîne S non semi-simple.

(C) $\Rightarrow$ (B) suit du théorème 1 ;

(C) $\Rightarrow$ (D) suit facilement du théorème 1 ;

(D) $\Rightarrow$ (C) : si S est réunion 0-directe de demi-groupes 0-simples duaux S_i , $i \in I$, comme chaque S_i est régulier (lemme 4), S est clairement régulier, donc $S^{\times} = \{0\}$ d'après le théorème 1 (a).

Remarque 1. - Si $S^{\times} \neq \{0\}$, nous avons vu qu'il existait un idéal nilpotent I de S contenu dans $S^{\times}$, on en déduit facilement qu'un demi-groupe dual est sans idéaux nilpotents si, et seulement si, $S^{\times} = \{0\}$. Le théorème 1 (b) qui donne la structure d'un tel demi-groupe, permet de retrouver l'essentiel des résultats de NUMAKURA [10] et KRAJNAKOVA [8].

Remarque 2. - Après lecture du corollaire 1.1, on peut se demander si, dans un demi-groupe dual, tout facteur principal 0-simple est complètement 0-simple ; nous donnons ci-dessous (corollaire 2.1) une réponse partielle à cette question ; la réponse complète n'est pas connue.

THÉORÈME 2. - Soient S un demi-groupe, a un élément de S ; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) $a \mathcal{L} a^2$;

(B) $a \mathcal{R} a^2$;

(C) la $\mathcal{H}$-classe de a est un groupe.

Démonstration. - Soit a un élément de $S \setminus S^{\times}$ tel que $a \mathcal{R} a^2$; il suit du théorème 1 qu'il y a un idempotent unique e dans la $\mathcal{R}$-classe de a ; $ea = a$, d'où $a^2 = aea$; comme $a \mathcal{R} a^2$, il existe x dans S tel que $a = a^2 x = (ae)(ax)$; alors $a \mathcal{R} ae$. La $\mathcal{L}$-classe de a étant régulière, il existe un idempotent f dans la $\mathcal{L}$-classe de ae , L_{ae} ; Se étant un idéal à gauche est réunion de $\mathcal{L}$-

classes ; alors Se , contenant ae , contient f , et $fe = f$, ce qui n'est possible que si $e = f$, d'après le lemme 2 (c) ; $a \mathcal{R} ae$ et e idempotent de L_{ae} entraînent que ae appartient à H_e ; donc ae appartient à $R_a \cap L_e$, et il suit du théorème 2.17 de [3] que $L_a \cap R_e = H_a$ est un groupe.

Soit maintenant a un élément non nul de $S^\times$ (si a est nul, l'équivalence de (A), (B) et (C) est immédiate) tel que $a \mathcal{R} a^2$; d'où $aS = a^2 S$ (lemme 1 (b)) ; aS n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\ell(S) = \{0\}$ (lemme 1 (a)) ; de plus,

$$\ell(aS) \cap Sa = \{0\} ,$$

car s'il existe un élément y de S tel que $ya.aS = \{0\}$, nous avons

$$\{0\} = ya^2 S = yaS$$

et $ya = 0$ suit du lemme 1 (a).

Or si L_1 et L_2 sont deux idéaux à gauche d'un demi-groupe dual, nous avons vu que

$$r(L_1 \cap L_2) = r(L_1) \cup r(L_2) ;$$

donc $\ell(aS) \cap Sa = \{0\}$ entraîne

$$S = r[\ell(aS) \cap Sa] = aS \cup r(Sa) ;$$

comme a appartient à $S^\times$, $aS \subseteq S^\times$ et $r(Sa) \supseteq S \setminus S^\times$; alors $Sae = \{0\}$, c'est-à-dire $ae = 0$, pour tout idempotent e non nul de S (voir lemme 2 (a)), ce qui est en contradiction avec le lemme 2 (d) ; donc la relation $a \mathcal{R} a^2$ n'est pas possible.

Finalement comme (C) entraîne (B), nous avons prouvé l'équivalence des propriétés (B) et (C) ; un raisonnement analogue montrerait l'équivalence de (A) et (C).

Soient S un demi-groupe, a et b deux éléments de S ; la relation $L_a \leqslant L_b$ si, et seulement si, $L(a) \subseteq L(b)$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S ; de même $R_a \leqslant R_b$ si, et seulement si, $R(a) \subseteq R(b)$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S (voir [4] paragraphe 6.6).

COROLLAIRE 2.1. - Soient S un demi-groupe dual, J_a $(a \in S , a \neq 0)$ une $\mathcal{J}$-classe telle que le facteur principal associé $J(a)/I(a)$ soit 0-simple ; supposons que J_a vérifie l'une des trois propriétés suivantes :

(a) J_a contient une $\mathcal{L}$-classe minimale dans l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans J_a ;

(b) J_a contient une $\mathcal{R}$-classe minimale dans l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans J_a ;

(c) J_a contient un élément régulier dans S .

Alors $J(a)/I(a)$ est complètement 0-simple.

Démonstration. - Supposons que J_a vérifie (a), et soit L une $\mathcal{L}$-classe minimale dans l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes contenues dans J_a ; $L \cup \{I(a)\}$ est un idéal 0-minimal à gauche de $S/I(a)$ ([4], lemme 6.44) contenu dans $J(a)/I(a)$; il suit du théorème 2.35 de [3] que $J(a)/I(a)$ a la structure d'un demi-groupe 0-simple contenant un idéal 0-minimal à gauche de lui-même. Alors la $\mathcal{L}$-classe de a dans $J(a)/I(a)$ contient un sous-demi-groupe non vide ([4], lemme 8.30), donc il existe un élément b dans L_a tel que $b \mathcal{L} b^2$; la $\mathcal{H}$-classe de b étant un groupe (théorème 2), $J(a)/I(a)$ contient un idempotent non nul, c'est-à-dire est complètement 0-simple ([4], théorème 8.22)..

On montrerait de même que si J_a vérifie (b), $J(a)/I(a)$ est complètement 0-simple, et si J_a vérifie (c), il suit du théorème 1 que $J(a)/I(a)$ est complètement 0-simple.

Un élément a d'un demi-groupe S est croissant à gauche (resp. à droite) s'il existe un sous-ensemble propre de S , T , tel que $aT = S$ (resp. $Ta = S$) ; un élément ne pouvant être croissant de chaque côté (voir, par exemple, le livre de LJAPIN sur les Demi-groupes), on dit par simplification qu'un élément est croissant s'il est croissant d'un côté.

Nous avons vu [5] qu'il n'existe pas d'éléments croissants dans les demi-groupes stables (donc dans les demi-groupes compacts ou périodiques ou complètement semi-simples) ; un demi-groupe dual est un nouvel exemple de demi-groupe sans éléments croissants. Le lemme 6 suit du théorème 7 de [5].

LEMME 6. - Soient S un demi-groupe, A l'ensemble des éléments x de S tels que $xS = S$; si A non vide, A est une $\mathcal{R}$-classe, et l'ensemble des éléments croissants à gauche de S est la réunion des $\mathcal{H}$-classes contenues dans A qui ne sont pas des groupes.

COROLLAIRE 2.2. - Un demi-groupe dual S ne possède pas d'éléments croissants.

Supposons que S possède un élément a croissant à gauche ; alors il existe une partie propre de S , T , telle que $aT = S$; d'où $a^2 T = aS = S$; alors $a \mathcal{R} a^2$, donc la $\mathcal{H}$-classe de a est un groupe (théorème 2), ce qui est en contradiction avec le lemme 6.

3. $\mathcal{A}$-classes d'un demi-groupe dual.

Le théorème 1 nous a permis de localiser le produit de deux éléments de $S \setminus S^\times$; nous allons étudier le produit ab lorsque l'un des deux éléments a et b appartient à $S \setminus S^\times$ (théorème 4), et préciser ce qui arrive lorsque les deux éléments sont situés dans $S^\times$ (théorème 5).

THÉORÈME 3. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S , e et f les idempotents (uniques) tels que $fa = ae = a$. Alors :

(a) L'égalité $a\alpha = a$ (resp. $\beta a = a$) entraîne α élément de H_e (resp. β élément de H_f) ;

(b) Soit b un élément de la $\mathcal{R}$-classe de a ; il existe deux éléments de S, c et d, tels que $ac = b$, $bd = a$, et un idempotent unique g tel que $bg=b$; alors e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe, c appartient à $R_e \cap L_g$, d appartient à $L_e \cap R_g$;

(c) Soit x un élément de la $\mathcal{L}$-classe de a ; il existe deux éléments de S, y et z, tels que $ya = x$, $zx = a$, et un idempotent unique h tel que $hx=x$; alors f et h appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe, y appartient à $R_h \cap L_f$, z appartient à $L_h \cap R_f$.

Démonstration.

(a) Supposons d'abord que a soit un élément de $S \setminus S^\times$; $S^\times$ idéal et $a\alpha = a$ impliquent alors que α est dans $S \setminus S^\times$; il résulte du théorème 1 (puisque $a\alpha \neq 0$) que $a\alpha$ est dans $R_a \cap L_\alpha$ (donc $L_\alpha = L_a$), et que $L_a \cap R_\alpha$, c'est-à-dire la $\mathcal{H}$-classe de α, contient un idempotent ; le seul idempotent de la $\mathcal{L}$-classe de a étant e (conséquence facile du lemme 2 (d)), α appartient à H_e.

Supposons maintenant que a soit un élément non nul de $S^\times$; il existe un idempotent unique f' tel que α soit dans f' S ; si $f' \neq e$, $a = a\alpha$ appartient à $Se\,f'\,S = S\,0\,S = 0$ (lemme 2 (c)), en contradiction avec a non nul ; donc $e = f'$, et $\alpha S \subseteq eS$, ce qui entraîne $\ell(\alpha S) \supseteq \ell(eS) = U_f$ (Sf : $f \in E$; $f \neq e$) d'après le lemme 2 (e).

Pour montrer que $\ell(\alpha S) = \ell(eS)$, on voit facilement qu'il suffit d'établir l'égalité $\ell(\alpha S) \cap Se = \{0\}$; si cette égalité n'était pas satisfaite, l'idéal à gauche $\ell(\alpha S) \cap Se$ serait non nul et contiendrait un idéal 0-minimal à gauche (lemme 1 (c)), qui ne pourrait être que l'unique idéal à gauche 0-minimal L contenu dans Se (lemme 2 (e)) ; or $Sa \subseteq Se$ et a non nul entraînent, pour les mêmes raisons (lemme 1 (c), lemme 2 (e)), que Sa contient L ; comme $a\alpha = a$ implique $xa\alpha=xa$ pour tout x de S, pour tout y non nul de L, nous avons $y\alpha = y$, et L ne peut être contenu dans $\ell(\alpha S)$; d'où $\ell(\alpha S) = \ell(eS)$.

Alors $r[\ell(\alpha S)] = r[\ell(eS)]$, c'est-à-dire $\alpha S = eS$, et α est élément de la $\mathcal{R}$-classe de e ; mais $a\alpha = a$ implique $a\alpha^2 = a$; α et α^2 appartiennent à la même $\mathcal{R}$-classe ; la $\mathcal{H}$-classe de α est un groupe (théorème 2), et comme la $\mathcal{R}$-classe de e contient un seul idempotent à savoir e, α est élément de H_e.

(b) Supposons d'abord que a soit un élément de $S \setminus S^\times$; $S^\times$ étant un idéal, on voit facilement que b, c et d appartiennent à $S \setminus S^\times$; alors $L_a \cap R_c$ contient un idempotent (théorème 1) qui ne peut être que e (lemme 2 (d)) et $b = ac$ appartient à $R_a \cap L_c$; il est clair que g est l'idempotent de $L_c = L_b$, donc c appartient à $R_e \cap L_g$; on montrerait de même que d appartient à $L_e \cap R_g$.

Supposons maintenant que a soit un élément non nul de $S^\times$; il est clair que b est un élément non nul de $S^\times$; soit k (resp. h) l'idempotent unique tel que $kc = c$ (resp. $hd = d$) ; comme $b = ac = aekc$ (resp. $a = bd = bghd$) , il suit du lemme 2 (c) que $e = k$ et $g = h$; comme $a = acd$ et $b = bdc$, cd appartient à H_e et dc à H_g . Mais $eS = R_e \cup A$ avec $A \subseteq S^\times$, d'après la loi de composition dans $S \setminus S^\times$ (théorème 1) et le fait que $eS^\times \subseteq S^\times$. Si c appartenait à A , on aurait cd dans $AS \subseteq S^\times S \subseteq S^\times$, ce qui est impossible. Donc c appartient à R_e , et on montrerait de même que d est dans R_g ; cd n'étant pas nul, cd est situé dans $R_c \cap L_d$, donc e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe ; de même, dc étant non nul est situé dans $R_d \cap L_c$; finalement, $L_d \cap R_c = H_e$, $L_c \cap R_d = H_g$, d'où c est situé dans $R_e \cap L_g$, d dans $L_e \cap R_g$.

Dans le théorème ci-dessous, il va être nécessaire de distinguer si S possède ou non un élément neutre. Si un demi-groupe dual possède un élément neutre d'un côté e , on a, par exemple, $Se = S$, et il suit du lemme 2 (d) que $S = Se = eS$, donc e est neutre et est l'unique idempotent non nul de S . Il suit alors du théorème 1 que $H_e = J_e = S \setminus S^\times$. Si un demi-groupe dual S ne possède pas d'élément neutre, il suit toujours du lemme 2 (d) que S possède au moins deux idempotents distincts et non nuls ; dans ce cas, le théorème 1 nous montre que si e est un idempotent non nul de S , les ensembles $S \setminus (S^\times \cup L_e)$ et $S \setminus (S^\times \cup R_e)$ sont non vides.

THÉORÈME 4. - *Soient S un demi-groupe dual sans élément neutre, a un élément non nul de S , e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$, et E l'ensemble des idempotents de S . On appelle T_e le complémentaire de R_e dans $S \setminus S^\times$, ${}_fT$ le complémentaire de L_f dans $S \setminus S^\times$, et D la $\mathcal{D}$-classe de a . Alors :*

(a) $\{h \; ; \; h \in E \; ; \; Sh \cap D$ *non vide*$\}$ *est égal à* $E \cap D_e$ *et*
$\{h \; ; \; h \in E \; ; \; hS \cap D$ *non vide*$\}$ *est égal à* $E \cap D_f$;

(b) $aT_e = \{0\}$, $aR_e = R_a$, $R_a(S \setminus S^\times) = R_a \cup \{0\}$ *et* $D(S \setminus S^\times) = D \cup \{0\}$;

(c) ${}_fTa = \{0\}$, $L_f a = L_a$, $(S \setminus S^\times)L_a = L_a \cup \{0\}$ *et* $(S \setminus S^\times)D = D \cup \{0\}$;

(d) $D = L_a R_e = L_f R_a = L_f aR_e$;

(e) *Soit* g (*resp.* h) *un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de* e (*resp.* f) ; *on pose* $H = R_e \cap L_g$, $H^\times = R_h \cap L_f$; *nous avons*

$$aH = R_a \cap Sg \; , \quad H^\times a = L_a \cap hS \quad \text{et} \quad H^\times aH = D \cap hSg \; .$$

Démonstration.

(a) Supposons $D \cap Sh$ non vide ($h = h^2$) ; $D \cap Sh$ étant réunion de $\mathcal{L}$-classes, il existe b dans la $\mathcal{R}$-classe de a tel que $bh = b$; donc h appartient à la $\mathcal{D}$-classe de e (théorème 3 (b)). Réciproquement, soit h un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e ; il existe x dans $R_e \cap L_h$; alors $ax = axh$ appartient à $Sh \cap R_a$ (suit de $aR_e = R_a$ qui sera démontré dans (b)), et $Sh \cap D$ est non vide.

(b) Si b appartient à la $\mathcal{R}$-classe de a, il existe un élément c de R_e tel que $ac = b$ (théorème 3 (b)), donc $aR_e \supseteq R_a$; réciproquement, si x est un élément de R_e, il existe y dans S avec $xy = e$; alors $ax \mathcal{R}\, a$, car $(ax)y = ae = a$ d'où $aR_e = R_a$. Pour toute $\mathcal{R}$-classe R_g $(g = g^2)$ contenue dans $S \setminus S^\times$ telle que $g \neq e$, aR_g est contenu dans $SgS = S \cap S = \{0\}$, d'où $aT_e = \{0\}$; on en déduit immédiatement

$$R_a(S \setminus S^\times) = R_a \cup \{0\} \quad \text{et} \quad D(S \setminus S^\times) = D \cup \{0\} .$$

(c) s'établit d'une manière analogue.

(d) Si b est un élément de L_a, il est clair que $be = b$, d'où $bR_e = R_b$; on en déduit $D = L_a R_e$ et dualement $D = L_f R_a$; comme $L_f a = L_a$, $D = L_a R_e$ entraîne $D = L_f aR_e$.

(e) Il est clair que $aH \subseteq R_a$; comme $H \subseteq Sg$, $aH \subseteq SeSg \subseteq S_g$, d'où $aH \subseteq R_a \cap Sg$; réciproquement, si b est un élément de $R_a \cap Sg$, il existe c tel que $b = ac$, d'où $b = bg = acg$; cg appartient à Sg, à R_e (théorème 3 (b)), donc à H (théorème 1), et $aH = R_a \cap Sg$; nous avons dualement $H^\times a = L_a \cap hS$. Enfin, pour tout élément x de H, $fax = ax$, d'où $L_f ax = L_{ax}$; il suit que $H^\times ax = L_{ax} \cap hS$, d'où $H^\times aH = D \cap hSg$.

Si S est dual avec élément neutre, pour tout élément a de S, $ae = ea = a$, et les ensembles T_e et ${}_eT$ sont vides ; on obtient sans difficulté les résultats suivants :

THÉORÈME 4 bis. - Soient S un demi-groupe dual avec élément neutre e, $G = S \setminus S^\times$ le groupe maximal contenant e, a un élément non nul de S, et D la $\mathcal{D}$-classe de a ; alors :

(a) $R_a = aG = R_a G$;

(b) $L_a = Ga = GL_a$;

(c) $D = GaG = GD = DG = GDG$.

COROLLAIRE 4.1. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$; on note respectivement H, R, L, D, la $\mathcal{H}$-classe de a, la $\mathcal{R}$-classe de a, la $\mathcal{L}$-classe de a, la $\mathcal{D}$-classe de a :

(a) $\{Lx ; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de D.

(b) $\{yR ; y \in L_f\}$ est l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de D.

(c) $\{Hx ; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de R.

(d) $\{yH ; y \in L_f\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de L.

(e) $\{yHx ; y \in L_f ; x \in R_e\}$ est l'ensemble des $\mathcal{H}$-classes de D.

Si x appartient à R_e, ax est élément de R, donc $Hx \cap R$ est non vide ; il suit du lemme 3.15 de [3] que Hx est une $\mathcal{H}$-classe contenue dans R, et que Lx est la $\mathcal{L}$-classe contenant Hx. Comme $aR_e = R_a$, (a) et (c) suivent sans difficulté ; dualement, nous obtenons (b) et (d) ; (e) s'obtient en combinant (c) et (d), et en remarquant que, pour tout élément z de L, nous avons $ze = z$.

COROLLAIRE 4.2. - Les ensembles SE_α et $E_\alpha S$ du lemme 3 sont réunion de $\mathcal{D}$-classes.

Suit immédiatement du théorème 4 (a).

THÉORÈME 5. - Soient S un demi-groupe dual, a et b deux éléments non nuls de S, et e, f, g, h, les idempotents tels que $a = ae = fa$, $b = gb = bh$; si $D_a D_b$ n'est pas réduit à $\{0\}$, e et g appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe ; dans ce qui suit, nous supposerons que c'est le cas, et nous poserons $H = D_e = H_e$ si la $\mathcal{D}$-classe de e contient un seul idempotent, et $H = (R_e \cap L_g) \cap \{0\}$ dans le cas contraire. Alors :

(a) $L_a R_b = D_{ab}$, donc le produit LR d'une $\mathcal{L}$-classe L et d'une $\mathcal{R}$-classe R est toujours une $\mathcal{D}$-classe ;

(b) $aR_b = R_{ab}$; $L_a b = L_{ab}$; $aL_b = R_a b = R_a L_b = aHb$;

(c) $R_a R_b = aD_b$ est le saturé par $\mathcal{R}$ de aHb ;
$L_a L_b = D_a b$ est le saturé par $\mathcal{L}$ de aHb ;
$D_a D_b$ est le saturé par $\mathcal{D}$ de aHb.

En particulier tout produit de $\mathcal{R}$-classes (resp. de $\mathcal{L}$-classes, de $\mathcal{D}$-classes) est réunion de $\mathcal{H}$-classes (resp. de $\mathcal{L}$-classes, de $\mathcal{D}$-classes).

Démonstration. - Supposons $D_a D_b$ non réduit à $\{0\}$; il existe c dans D_a, d dans D_b avec $cd \neq 0$, donc un idempotent k tel que $ck = c$ et $kd = d$; $ck = c$ et $ae = a$ entraînent que k appartient à la $\mathcal{D}$-classe de e (théorème 4 (a)) ; on voit de même que k appartient à la $\mathcal{D}$-classe de g ($kd = d$ et $gh = b$) donc e et g sont dans la même $\mathcal{D}$-classe.

(a) $L_a = L_f a$ et $R_b = bR_h$ entraînent $L_a R_b = L_f abR_h$; comme $fabh = ab$, $L_f abR_h = D_{ab}$ (théorème 4 (d)).

(b) De même, $aR_b = abR_h = R_{ab}$ et $L_a b = L_f ab = L_{ab}$.

Nous allons distinguer deux cas suivant que la $\mathcal{D}$-classe de e contient ou non au moins deux idempotents distincts.

Si la $\mathcal{D}$-classe de e contient un seul idempotent, nous avons

$$e = g, \quad R_e = D_e = H_e \quad \text{et} \quad R_e L_g = L_g = R_e = H_e ;$$

d'où $aL_b = aL_g b = aH_e b$; de même,

$$R_a b = aR_e b = aH_e b \quad \text{et} \quad R_a L_b = aR_e L_g b = aH_e b .$$

Supposons que la $\mathcal{Q}$-classe de e contienne au moins deux idempotents distincts ; $aL_b = aL_g\ b$; il suit du théorème 4 (b) que $aR_e = R_a$ et $a(S \setminus S^\times \cup R_e) = \{0\}$. Comme $L_g \setminus R_e \cap L_g$ n'est pas vide (même si $g = e$), aL_b contient $a(L_g \setminus R_e \cap L_g)b$ c'est-à-dire 0 et

$$aL_b = a(R_e \cap L_g)\ b \cup \{0\} = aHb\ ;$$

on voit de même que

$$R_a\ b = aR_e\ b = a(R_e \cap L_g)\ b \cup \{0\} = aHb\ .$$

Pour déterminer $R_a\ L_b$ nous avons besoin de $R_e\ L_g$, car $R_a\ L_b = aR_e\ L_g\ b$; soient x dans R_e et y dans L_g, alors ou $xy = 0$, ou xy appartient à $R_x \cap L_y$ (théorème 1), c'est-à-dire $R_e \ni L_g$, d'où

$$R_e\ L_g \subseteq (R_e \cap L_g) \cup \{0\}\ ;$$

réciproquement, si z appartient à $R_e \cap L_g$, $ez = z$, d'où $e(R_e \cap L_g) = R_e \cap L_g$; en particulier,

$$R_e\ L_g \supseteq e(R_e \cap L_g) = R_e \cap L_g \quad \text{et} \quad R_e\ L_g = (R_e \cap L_g) \cup \{0\}$$

c'est-à-dire H, d'où $R_a\ L_b = aHb$.

(c) $R_a\ R_b = aR_e\ bR_h = aHbR_h$ puisque $aR_e\ b = R_a\ b = aHb$; pour tout x de H, tel que axb soit non nul, il est clair que $axbh = axb$, d'où $axb\ R_h = R_{axb}$, donc $R_a\ R_b$ est le saturé par $\mathcal{R}$ de aHb ; comme $D_b = L_g\ bR_h$ (théorème 4 (d)), $aD_b = aL_g\ bR_h$; mais $aL_g\ b = aL_b = aHb$, d'où $aD_b = aHbR_h$, c'est-à-dire $R_a\ R_b$.

Dualement, on obtient $L_a\ L_b = D_a\ b = L_f\ aHb$ c'est-à-dire le saturé par $\mathcal{L}$ de aHb.

$D_a\ D_b = L_f\ aR_e\ L_g\ bR_h$ (théorème 4 (d)) ; mais nous avons vu ci-dessus que $R_e\ L_g$ est égal à H, d'où $D_a\ D_b = L_f(aHb)\ R_h$; pour tout x de H tel que axb soit non nul, on a $faxb = axb = axbh$, alors $L_f(aHb)\ R_h$ est le saturé par $\mathcal{Q}$ de aHb (théorème 4 (d)).

Remarque. - Même si S est un demi-groupe dual possédant un élément neutre e (dans ce cas $H = H_e = S \setminus S^\times$), il n'y a aucune raison pour que aHb soit contenu dans une seule $\mathcal{Q}$-classe. En effet, si L_b contient au moins deux éléments b et c non $\mathcal{R}$-équivalents, bS est différent de cS (lemme 1 (b)), donc $\ell(bS)$ est distinct de $\ell(cS)$; supposons par exemple l'existence de a dans $\ell(bS) \setminus \ell(cS)$, alors $0 = ab = aeb$ et $0 \neq ac = axb$ avec x dans H, puisque $c\ \mathcal{L}\ b$ [Si $\ell(bS) \setminus \ell(cS)$ était vide, on pourrait choisir a dans $\ell(cS) \setminus \ell(bS)$, et on aurait de même $aec = 0$ et $axc \neq 0$ pour un élément x dans H].

4. Groupes de Schützenberger.

Nous allons établir une suite de lemmes qui nous amèneront au théorème 6.

LEMME 7. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, et e

et f les idempotents tels que $a = ae = fa$. On pose

$$K_a = \{x \in S ; \ ax \in H_a\} , \quad {}_aK = \{x \in S ; \ xa \in H_a\} ,$$

$$N_a = \{x \in S ; \ ax = a\} , \quad {}_aN = \{x \in S ; \ xa = a\} .$$

Alors K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) sont des sous-groupes de H_e (resp. H_f) ; en outre $H_a = a(K_a) = ({}_aK)a = H_a\alpha = \beta H_a$ pour tout α de K_a et tout β de ${}_aK$.

Soit x un élément de K_a ; $ax \ \mathcal{R}\ a$ donc x appartient à R_e (théorème 3) ; comme $axe = ax$, il suit du théorème 4 (e) que x appartient à H_e ; $H_a x \cap H_a$ étant non vide, $H_a x = H_a$ suit du corollaire 4.1 (c).

Alors, si x et y sont deux éléments de K_a , $H_a = H_a x = H_a y$, d'où

$$H_a xy = H_a yx = H_a ;$$

si x^{-1} est l'inverse de x dans le groupe H_e ,

$$H_a = H_a e = H_a xx^{-1} = H_a x^{-1} ,$$

donc x^{-1} appartient à K_a , et K_a est un sous-groupe de H_e ; le reste du lemme s'établit par des méthodes analogues.

LEMME 8. - Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 7, les ensembles K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) ne dépendent que de la $\mathcal{L}$-classe (resp. la $\mathcal{R}$-classe) de a .

Supposons $a \ \mathcal{L}\ b$ pour toute la démonstration (b dans S) ; il existe x et y dans S tels que $a = xb$ et $b = ya$; si α appartient à N_a , $a\alpha = a$, d'où $ya\alpha = ya$, c'est-à-dire $b\alpha = b$ et $N_a \subseteq N_b$; de même, $b\beta = b$ (β dans N_b) entraîne $xb\beta = xb$; d'où $N_a = N_b$.

Soit α un élément de K_a ; $a\alpha$ appartient à H_a , donc $ya\alpha$ appartient à yH_a ; mais yH_a contient $ya = b$, et $yH_a \cap L_a$ est non vide ; il suit du lemme 3.15 de [3] que $yH_a = H_b$; alors $ya\alpha = b\alpha$ appartient à H_b , et $K_a \subseteq K_b$; la réciproque s'établit en permutant a et b .

Rappelons brièvement comment est construit le groupe de Schützenberger à droite associé à une $\mathcal{H}$-classe H d'un demi-groupe S ; si S est sans élément neutre, on note $S^1 = S \cup \{1\}$ avec $a1 = 1a = a$, pour tout a de $S \cup \{1\}$. On définit $T(H) = \{t \in S^1 ; \ Ht \subseteq H\}$; à tout élément t de $T(H)$, on associe la translation à droite sur H , γ_t , définie par $\gamma_t(x) = xt$ (x dans H).

Alors $T^{\times}(H) = \{\gamma_t ; \ t \in T(H)\}$ est un groupe simplement transitif de permutations de H , et $T^{\times}(H)$ est isomorphe à $T(H)/\varepsilon$, ε étant l'équivalence suivante : $t \ \varepsilon\ t'$ (t et t' dans $T(H)$) si, et seulement si, $ht = ht'$ pour tout élément h de H .

Remarquons qu'il était nécessaire de considérer $S \cup \{1\}$ pour définir $T(H)$, car il peut arriver que $H_a = \{a\}$ et qu'il n'existe pas d'élément x dans S tel que $ax = a$; alors $\{t \in S ; \ H_a t \subseteq H_a\}$ est vide. Ceci n'arrive jamais dans un

demi-groupe dual, car il existe toujours un idempotent e tel que $ae = a$.

LEMME 9. - Sous les hypothèses du lemme 7, K_a/N_a et ${}_aK/{}_aN$ sont isomorphes au groupe de Schützenberger à droite de H_a ; en particulier N_a (resp. ${}_aN$) est un sous-groupe distingué de K_a (resp. ${}_aK$) .

On voit facilement que $K_a = T(H_a)$ si S a un élément neutre, et que

$$K_a = T(H_a) \setminus \{1\}$$

dans le cas contraire. On note ε_a l'équivalence suivante sur K_a : $x \, \varepsilon_a \, y$ (x et y dans K_a) si, et seulement si, $ax = ay$; il est clair que $hx = hy$ pour tout élément h de H_a , donc ε_a est la restriction à K_a de l'équivalence ε , définie ci-dessus sur $T(H_a)$; ε_a est régulière à droite, car $ax = ay$ entraîne $ax\alpha = ay\alpha$ pour tout α de K_a ; montrons que ε_a est régulière à gauche : $ax=ay$ entraîne $axy^{-1} = a$ (y^{-1} inverse de y dans le groupe H_e) , et xy^{-1} dans N_a ; mais $N_a = N_{a\alpha}$ pour tout α de K_a d'après le lemme 8 ; donc $a\alpha xy^{-1} = a\alpha$, c'est-à-dire $a\alpha x = a\alpha y$ pour tout α de K_a . Le groupe $K_a/\varepsilon^{\times}$ est clairement isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$, car il y a toujours un élément b dans S tel que $ab = a$; la classe de l'élément neutre de K_a , e , étant N_a , N_a est un sous-groupe distingué de K_a , et K_a/N_a est isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$; un raisonnement analogue montrerait que ${}_aK/{}_aN$ est isomorphe à $T(H_a)/\varepsilon$; (${}_aK/{}_aN$ n'est pas le groupe de Schützenberger à gauche de H_a qui est anti-isomorphe en général au groupe de Schützenberger à droite).

Compte tenu des résultats du lemme 8, si L (resp. R) est la $\mathcal{L}$-classe de a (resp. la $\mathcal{R}$-classe de a) , nous noterons K_L et N_L (resp. ${}_RK$ et ${}_RN$) les ensembles K_a et N_a (resp. ${}_aK$ et ${}_aN$) .

Rappelons que si H est un sous-groupe d'un groupe G , l'image aHa^{-1} ($a \in G$) de H par un automorphisme intérieur de G est dit conjugué de H .

LEMME 10. - Soient S un demi-groupe dual, D une $\mathcal{D}$-classe de S , et e (resp. f) un idempotent de S tel que $D \cap Se$ (resp. $D \cap fS$) soit non vide ; on note $\overline{L}$ (resp. $\overline{L}_e$) l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans D (resp. dans $D \cap Se$) ; on définit dualement $\overline{R}$ (resp. $\overline{R}_f$) comme l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans D (resp. dans $D \cap fS$) ; alors :

(a) Les ensembles K_L (resp. N_L , ${}_RK$, ${}_RN$) , où L parcourt $\overline{L}$ et R parcourt $\overline{R}$, sont isomorphes entre eux.

(b) Soient L_0 dans $\overline{L}_e$ et R_0 dans $\overline{R}_f$, alors l'ensemble des K_L (resp. N_L , ${}_RK$, ${}_RN$) , où L parcourt $\overline{L}_e$ et R parcourt $\overline{R}_f$, est l'ensemble des sous-groupes conjugués de K_{L_0} (resp. N_{L_0} , ${}_{R_0}K$, ${}_{R_0}N$) .

Démonstration.

(a) Soient a et b deux éléments de D appartenant à la même $\mathcal{R}$-classe, g et h les idempotents tels que $ag = a$ et $bh = b$.

Supposons $g \neq h$; alors g et h appartiennent à la même $\mathcal{D}$-classe (théorème 4 (a)), et il existe α dans S tel que $b = a\alpha$; α appartient à $R_g \cap L_h$ d'après le théorème 3, il existe un inverse α' de α dans $L_g \cap R_h$ ([3] théorème 2.18), d'où $\alpha\alpha' = g$ et $\alpha'\alpha = h$ ([3] théorème 2.17) ; on sait que

$$\varphi_1 : x \longrightarrow \alpha' x\alpha \quad \text{et} \quad \varphi_2 : y \longrightarrow \alpha y\alpha'$$

sont des isomorphismes mutuellement réciproques de H_g sur H_h et H_h sur H_g respectivement ([3] théorème 2.20). Nous allons montrer que $\varphi_1(N_a) = N_b$ et $\varphi_1(K_a) = K_b$.

$\varphi_1(N_a) = N_b$: en effet, soit x dans N_a ; $ax = a$, d'où $ax\alpha = a\alpha = b$; mais $b\alpha' = a\alpha\alpha' = ag = a$; alors $(ax\alpha = b)$ entraîne $(b\alpha' x\alpha = b)$; $\alpha' x\alpha = \varphi_1(x)$ appartient à N_b , et $\varphi_1(N_a) \subseteq N_b$; en permutant a et b , on obtient $\varphi_2(N_b) \subseteq N_a$ d'où

$$N_b = \varphi_1 \circ \varphi_2(N_b) \subseteq \varphi_1(N_a) .$$

$\varphi_1(K_a) = K_b$: si x appartient à K_a , $H_a x = H_a$ (lemme 7) ; considérons $H_b \varphi_1(x) = H_b \alpha' x\alpha$; $H_b \alpha'$ étant une $\mathcal{H}$-classe (corollaire 4.1) contenant $b\alpha' = a\alpha\alpha' = a$, $H_b \alpha' = H_a$; alors $H_b \varphi_1(x) = H_a x\alpha = H_a \alpha$, et $H_a \alpha$ étant une $\mathcal{H}$-classe contenant $a\alpha = b$, $H_a \alpha = H_b$, d'où $\varphi_1(K_a) \subseteq K_b$, et la réciproque s'établit comme pour N_a .

Le cas particulier où $g = h$ va découler de (b).

(b) Soient a un élément de L_0 , L un élément de $\overline{L}_e$, et b un élément de $L \cap R_a$; il existe β dans H_e tel que $a\beta = b$ (théorème 4 (e)) ; nous allons montrer que $K_{a\beta} = \beta^{-1} K_a \beta$, β^{-1} étant l'inverse de β dans H_e .

Soit γ un élément de $K_{a\beta}$; alors $H_{a\beta}\gamma = H_{a\beta}$ (lemme 7) ; d'où $H_{a\beta\gamma} = H_{a\beta}$; Du corollaire 4.1 suit :

$$H_a = (H_{a\beta})\beta^{-1} = H_{a\beta\gamma}\beta^{-1} = H_{a\beta\gamma\beta^{-1}} = H_a \beta\gamma\beta^{-1} ;$$

donc $\beta\gamma\beta^{-1}$ est dans K_a , et $\beta K_{a\beta} \beta^{-1} \subseteq K_a$, c'est-à-dire $K_{a\beta} \subseteq \beta^{-1} K_a \beta$; d'autre part, si γ est un élément de K_a , c'est-à-dire si $H_a \gamma = H_a$, nous avons :

$$H_{a\beta}(\beta^{-1}\gamma\beta) = H_{a\beta\beta^{-1}}\gamma\beta = H_a \gamma\beta = H_a \beta = H_{a\beta} ;$$

donc $\beta^{-1} K_a \beta \subseteq K_{a\beta}$, ce qui prouve l'égalité.

Nous avons de même $N_{a\beta} = \beta^{-1} N_a \beta$; par exemple, si x est un élément de N_a , $ax = a$, d'où $ax\beta = a\beta$; mais $ax\beta = a\beta\beta^{-1} x\beta$, d'où $a\beta = a\beta(\beta^{-1} x\beta)$, et $\beta^{-1} N_a \beta \subseteq N_{a\beta}$; l'inclusion inverse s'établit de la même façon.

LEMME 11. - Sous les mêmes hypothèses qu'au lemme 10, on pose

$$N = \bigcap (N_L ; L \in \overline{L}_e) \quad \text{et} \quad M = \bigcap ({}_R N ; R \in \overline{R}_f) ;$$

alors N (resp. M) est un sous-groupe distingué de H_e (resp. H_f) ; H_e/N

(resp. H_f/M) est un groupe transitif de permutations de $R \cap Se$ (resp. $L \cap fS$), R (resp. L) étant une $\mathcal{R}$-classe (resp. une $\mathcal{L}$-classe) quelconque contenue dans D ; si N_L (resp. ${}_RN$) est distingué dans H_e (resp. H_f), H_e/N (resp. H_f/M) est un groupe simplement transitif de permutations de $R \cap Se$ (resp. $L \cap fS$).

Soient a un élément de D, e l'idempotent tel que $ae = a$, et x un élément de S tel que ax soit dans $R_a \cap Se$; x appartient à H_e (théorème 3 (b)) ; comme $R_a \cap Se = aH_e$ (théorème 4 (e))

$$(R_a \cap Se)x = aH_e\, x = aH_e = R_a \cap Se ;$$

supposons $ax = bx$ avec a et b dans $R_a \cap Se$; alors, si x^{-1} est l'inverse de x dans H_e, $axx^{-1} = bxx^{-1}$, d'où $a = b$; on note γ_x la translation à droite sur $R_a \cap Se$, définie par $\gamma_x(b) = bx$; alors $T^{\times}(R_a \cap Se) = \{\gamma_x \ ; \ x \in H_e\}$ est un groupe transitif de permutations de $R_a \cap S_e$; l'application $x \longrightarrow \gamma_x$ de H_e sur $T^{\times}(R_a \cap Se)$ est clairement un homomorphisme dont le noyau est $\{x \in H_e \ ; \ ax = a$ pour tout a de $R_a \cap Se\}$, on voit facilement que c'est $N = \cap N_L$, L parcourant $\overline{L}_e$, donc N est distingué dans H_e, et $T^{\times}(R_a \cap Se)$ est isomorphe à H_e/N.

En général, $T^{\times}(R_a \cap Se)$ n'est pas simplement transitif, car $ax = ax'$ implique seulement $bx = bx'$ pour tout élément de la $\mathcal{R}$-classe de a ; cependant, si L est un élément de $\overline{L}_e$ tel que N_L soit distingué dans H_e, il suit du lemme 10 (b), que les N_L coïncident pour tous les éléments L de L_e ; en particulier, ($N = N_L$ et $ax' = ax$ (x et x' dans H_e)) entraîne ($ax'\, x^{-1} = a$ (x^{-1} inverse de x dans H_e)), d'où $bx'\, x^{-1} = b$, c'est-à-dire $bx' = bx$ pour tout élément b de $R_a \cap Se$.

Dans ce qui suit, si H est un sous-groupe d'un groupe G, nous noterons $G|H$ l'ensemble des classes à droite de G par rapport à H.

LEMME 12. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$, D la $\mathcal{D}$-classe de a, et $\overline{L}_g$, $\overline{R}_h$ (h et g idempotents) $\overline{L}$ et $\overline{R}$, définis comme au lemme 10. L (resp. R) désigne un élément quelconque de L_e (resp. R_f).

Alors les ensembles décrits ci-dessous dans la même partie (ils sont numérotés de 1 à 11) sont équipotents :

(1) $\overline{L}_e$ et H_e/K_L ;

(2) $\overline{R}_f$ et ${}_RH_f/K$;

(3) Les ensembles $\overline{L}_g$, g parcourant $E \cap D_e$;

(4) Les ensembles $\overline{R}_h$, h parcourant $E \cap D_f$;

(5) $\overline{L}$ et $(H_e/K_L) \times (D_e \cap E)$;

(6) $\overline{R}$ et $({}_RH_f/K) \times (D_f \cap E)$;

(7) H_e/N_L et chacun des ensembles $R^* \cap Sg$, g parcourant $E \cap D_e$; et R^* parcourant $\overline{R}$;

(8) $H_f/_R N$ et chacun des ensembles $L^\times \cap hS$, h parcourant $E \cap D_f$, et $L^\times$ parcourant $\overline{L}$;

(9) $H_E/N_L \times H_f/_R K$, $H_e/K_L \times H_f/_R N$, ainsi que $D \cap hSg$, g parcourant $E \cap D_e$ et h parcourant $E \cap D_f$;

(10) Les ensembles ${}_hH_g = \{\mathcal{H}\text{-classes contenues dans } D \cap hSg\}$, g parcourant $E \cap D_e$, et h parcourant $E \cap D_f$; ainsi que $H_e/K_L \times H_f/_R K$;

(11) $(D_e \cap E) \times (D_f \cap E) \times (H_e/N_L) \times (H_f/_R K)$,
$(D_e \cap E) \times (D_f \cap E) \times (H_e/K_L) \times (H_f/_R N)$, ainsi que D.

Démonstration.

(1) Il suit du corollaire 4.1 et du théorème 4 (e) que $\{Lx ;\ x \in H_e\} = \overline{L}_e$, si L désigne un élément de $\overline{L}_e$; soient x et y dans H_e, y^{-1} l'inverse de y dans H_e, alors nous avons :

$(Lx = Ly) \Leftrightarrow (Lxy^{-1} = L) \Leftrightarrow (xy^{-1}$ élément de $K_L) \Leftrightarrow (x$ appartient à $K_L\ y)$,

d'où l'existence d'une bijection entre $\overline{L}_e$ et H_e/K_L.

(2) s'établit dualement.

(3) Soient g un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e, α un élément de $R_e \cap L_g$, α' l'inverse de α dans $L_e \cap R_g$ ([3] théorème 2.18), d'où $\alpha\alpha' = e$ et $\alpha'\alpha = g$; on considère l'application φ qui, à tout élément L_0 de $\overline{L}_e$, associe $L_0\alpha$; il suit du corollaire 4.1 que $L_0\alpha$ est une $\mathcal{L}$-classe de D et, comme $L_0\alpha g = L_0\alpha$, $L_0\alpha$ appartient à $\overline{L}_g$.

φ est injective car, si L_0 et L_1 sont deux éléments de $\overline{L}_e$ tels que $L_0\alpha = L_1\alpha$, nous avons $L_0\alpha\alpha' = L_1\alpha\alpha'$, d'où $L_0 e = L_1 e$, c'est-à-dire $L_0 = L_1$; soit maintenant $L^\times$ un élément de $\overline{L}_g$; si ℓ est dans $L^\times$, $\ell = \ell g = \ell\alpha'\alpha$; comme $\ell\alpha' e = \ell\alpha'$, $\ell\alpha'$ appartient à $R_\ell \cap Se$ (théorème 4 (e)), et $L_{\ell\alpha'}\alpha = L^\times$ suit du corollaire 4.1 ; donc φ est surjective, et les ensembles $\overline{L}_e$ et $\overline{L}_g$ sont équipotents.

(4) s'établit dualement.

(5) (resp. 6) est une conséquence de (1) et (3) (resp. (2) et (4)) du théorème 4 (a).

(7) $aH_e = R_a \cap Se$ découle du théorème 4 (e) ; soient x et y dans H_e, y^{-1} l'inverse de y dans H_e ; nous avons

$(ax = ay) \Leftrightarrow (axy^{-1} = a) \Leftrightarrow (xy^{-1}$ élément de $N_{L_a}) \Leftrightarrow (x$ élément de $N_{L_a}\ y)$;

d'où l'existence d'une bijection entre $R_a \cap Se$ et H_e/N_{L_a} ; si g est un idempotent de la $\mathcal{D}$-classe de e, l'équipotence de $R_a \cap Se$, et $R_a \cap Sg$ provient de (3) et du fait que les $\mathcal{H}$-classes d'une même $\mathcal{D}$-classe sont équipotentes ; cette

dernière remarque entraîne l'équipotence de $R_1 \cap Sg$ et $R_2 \cap Sg$, lorsque R_1 et R_2 sont deux $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans D.

(8) suit dualement.

(9) suit facilement de (1), (2), (7), (8), et entraîne (11).

(10) suit de (1), (2), (3) et (4).

En regroupant les lemmes 7 à 12, nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soient S un demi-groupe dual, a un élément non nul de S, D la $\mathcal{D}$-classe de a, et e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$; on note $\overline{L}$ (resp. $\overline{L}_e$) l'ensemble des $\mathcal{L}$-classes de S contenues dans D (resp. dans $D \cap Se$). On définit de même $\overline{R}$ (resp. $\overline{R}_f$) comme l'ensemble des $\mathcal{R}$-classes de S contenues dans D (resp. $D \cap fS$) ; enfin on pose

$$K_a = \{x \in S ; \ ax \in H_a\}, \quad N_a = \{x \in S ; \ ax = a\},$$

$$_aK = \{x \in S, \ ya \in H_a\}, \quad _aN = \{y \in S ; \ ya = a\}.$$

Alors K_a et N_a (resp. $_aK$ et $_aN$) ne dépendent que de la $\mathcal{L}$-classe (resp. la $\mathcal{R}$-classe) de a, et seront notés K_{L_a}, N_{L_a} (resp. $_{R_a}K$; $_{R_a}N$). Pour tout élément L (resp. R) de $\overline{L}_e$ (resp. $\overline{R}_f$). K_L et N_L (resp. $_RK$ et $_RN$) sont des sous-groupes de H_e (resp. H_f). De plus :

(a) pour tout $L \in \overline{L}$ et tout $R \in \overline{R}$, N_L (resp. $_RN$) est distingué dans K_L (resp. $_RK$) ; $\cap (N_L : L \in \overline{L}_e)$ (resp. $\cap (_RN : R \in \overline{R}_f)$) est distingué dans H_e (resp. H_f).

(b) Si L_0 (resp. R_0) est un élément de $\overline{L}_e$ (resp. $\overline{R}_f$), $\{K_L ; L \in \overline{L}_e\}$ (resp. $\{_RK ; R \in \overline{R}_f\}$) est l'ensemble des sous-groupes conjugués de K_{L_0} (resp. $_{R_0}K$). Résultats analogues pour les N_L et les $_RN$.

(c) Les ensembles K_L (resp. N_L, $_RK$, $_RN$), où L parcourt $\overline{L}$, et R parcourt $\overline{R}$, sont isomorphes entre eux.

(d) K_L/N_L est le groupe de Schützenberger à droite de toute $\mathcal{H}$-classe contenue dans L, et $_RK/_RN$ est isomorphe au groupe de Schützenberger à droite de toute $\mathcal{H}$-classe contenue dans R ($L \in \overline{L}$ et $R \in \overline{R}$).

(e) Si N_L (resp. $_RN$) avec L élément de $\overline{L}_e$ (resp. R élément de $\overline{R}_f$) est distingué dans H_e (resp. H_f), H_e/N_L (resp. $H_f/_RN$) est un groupe simplement transitif de permutations de $R^\times \cap Se$ (resp. $L^\times \cap fS$), $R^\times$ (resp. $L^\times$) étant un élément de $\overline{R}$ (resp. $\overline{L}$).

(f) On a toutes les équipotences du lemme 12.

Cas particuliers.

1° Soit S dual avec élément neutre e tel que $S \setminus S^\times = H_e$ soit contenu dans le centre de S ; alors, pour tout x de H_e et pour tout a de S, ax (resp.

xa) appartient à $H_e\,a$ (resp. aH_e), donc

$$H_e\,a = aH_e = R_a = L_a = H_a\ .$$

De plus,

$$H_a\,H_b = aH_e\,H_e\,b = aH_e\,b = H_e\,ab = H_{ab}\ ;$$

donc l'application de $S \to S/\mathcal{H}$ qui à a associe H_a est un homomorphisme ; $S/\mathcal{H}$ est un demi-groupe d'élément neutre $\{H_e\}$ dont toute $\mathcal{D}$-classe est triviale. On voit facilement que l'application qui, à un idéal à gauche L de S, associe $L/\mathcal{H}$ est une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux à gauche de S et l'ensemble des idéaux à gauche de $S/\mathcal{H}$; même remarque pour les idéaux à droite ; on en déduit facilement que $S/\mathcal{H}$ est dual.

2° Soit S dual avec élément neutre e tel que le groupe maximal contenant e, $S \setminus S^\times$, soit abélien ; alors pour toute $\mathcal{L}$-classe L (resp. $\mathcal{R}$-classe R) de S, N_L (resp. ${}_RN$) est distingué dans H_e. Donc nous pouvons associer à toute $\mathcal{R}$-classe R (resp. $\mathcal{L}$-classe L) de S, un groupe simplement transitif de permutations de R (resp. de L) à savoir H_e/N_L (resp. $H_e/{}_RN$).

3° Soit S dual avec élément neutre e ; S contient un idéal 0-minimal unique M (lemme 3 (a)) et, compte tenu du lemme 1 (c) et du lemme 2 (e), M est à la fois unique idéal à gauche 0-minimal de S et unique idéal à droite 0-minimal de S, donc S est la réunion de $\{0\}$ et d'une $\mathcal{H}$-classe. Posons $M^* = M \setminus \{0\}$, et supposons que $N_{M^*} = {}_{M^*}N = \{e\}$ (dans ce cas, H_e est le groupe de Schützenberger de M^* puisque $K_{M^*} = {}_{M^*}K = H_e$) ; alors, pour tout élément a de S, $N_a = {}_aN = \{e\}$ (par exemple $(ax = a)$ entraîne $(mx = m)$ par tout élément m de M^*, puisque $M \subseteq Sa$ d'après le lemme 1 (c). Donc H_e est un groupe simplement transitif de permutations de R (resp. de L), R (resp. L) étant une $\mathcal{R}$-classe (resp. une $\mathcal{L}$-classe) quelconque de S ; en particulier, H_e, R et L sont équipotents.

4° Soit S dual avec élément neutre e, et supposons que le groupe maximal contenant e, H_e, soit un groupe fini de n éléments. Soient D une $\mathcal{D}$-classe de S, et ℓ (resp. r) le nombre de $\mathcal{L}$-classes (resp. $\mathcal{R}$-classes) contenues dans D ; alors ℓ et r sont des diviseurs de n (lemme 12 (1)). Posons $n = m\ell = pr$; alors $m = \operatorname{card} K_L$ et $p = \operatorname{card} {}_RK$, L (resp. R) étant une $\mathcal{L}$-classe (resp. $\mathcal{R}$-classe) contenue dans D ; posons $\alpha = \operatorname{card} N_L$, et $\beta = \operatorname{card} {}_RN$; α (resp. β) divise m (resp. p) ; de plus $m/\alpha = p/\beta = h$, où h est le nombre d'éléments d'une $\mathcal{H}$-classe de D (K_L/N_L groupe de Schützenberger d'une $\mathcal{H}$-classe contenue dans L), donc h divise m, p et n. Le cardinal de D est $\ell r \frac{m}{\alpha} = \ell r \frac{p}{\beta}$, d'où $(nr/\alpha) = (n\ell/\beta)$ et $r\beta = \ell\alpha$.

On voit apparaître une liaison étroite entre les groupes maximaux contenus dans $S \setminus S^\times$ et la structure des $\mathcal{D}$-classes de S ; cette liaison sera développée dans une prochaine note.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.). - Rings with duals, Amer. J. Math, t. 65, 1943, p. 569-584.

[2] BONSALL (F.) and GOLDIE (A.). - Annihilator algebras, Proc. London math. Soc., t. 4, 1954, p. 154-167.

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Tome I. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Tome II. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[5] GERENTE (A.). - Idempotents $\mathcal{Q}$-primitifs dans un demi-groupe Semigroup Forum (à paraître).

[6] GRILLET (P. A.). - Intersections of maximal ideals in semigroups, Amer. math. Monthly, t. 76, 1969, p. 503-509.

[7] KAPLANSKY (I.). - Dual rings, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 689-701.

[8] KRAJNAKOVA (D.). - On dual semigroups, Matem. Časopis, t. 20, 1970, p. 87-91.

[9] NAJMARK (M. A.). - Anneaux normés [en russe]. - Moskva, 1956 ; Normed rings. - Groningen, P. Noordhoff, 1959.

[10] NUMAKURA (K.). - Compact dual semigroups without nilpotent ideals, Duke math. J., t. 31, 1964, p. 555-574.

[11] SCHWARZ (Štefan). - On dual semigroups, Czechoslovak math. J., t. 10, 1960, p. 201-230.

[12] SCHWARZ (Štefan). - On the structure of dual semigroups, Czechoslovak math. J., t. 21, 1971, p. 461-483.

[13] WOLFSON (K. G.). - Annihilator rings, J. London math. Soc., t. 31, 1956, p. 94-104.

Note. - Cet exposé a fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus sous le titre $\mathcal{Q}$-classes dans un demi-groupe dual, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 581-584.

Alain GERENTE
Laboratoire de Mathématiques
Centre d'Enseignement supérieur
Boîte postale 847
97400 SAINT DENIS DE LA RÉUNION