Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paulo Ribenboim

Sur la localisation des anneaux non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 18, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 18, 18 p.

2 juillet 1971

SUR LA LOCALISATION DES ANNEAUX NON COMMUTATIFS

par Paulo RIBENBOIM

1. Introduction.

Tous les anneaux considérés ont un élément unité, et les homomorphismes d'anneaux sont unitaires.

Les résultats suivants sont bien connus. Soient A un anneau commutatif, S une partie multiplicative (non vide) de A.

THÉORÈME 0. - *Il existe un anneau commutatif* $S^{-1}A$, *et un homomorphisme d'anneaux* $\varphi : A \to S^{-1}A$, *tels que :*

1° *Tout élément de* $\varphi(S)$ *est inversible dans* $S^{-1}A$;

2° *Si* B *est un anneau commutatif,* $\psi : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux tel que tout élément de* $\psi(S)$ *soit inversible dans* B, *alors il existe un homomorphisme unique* $\overline{\psi} : S^{-1}A \to B$ *tel que* $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$.

(a) *Les éléments de* $S^{-1}A$ *sont des fractions* $x = a/s$, *c'est-à-dire, si* $x \in S^{-1}A$, *il existe* $s \in S$, $a \in A$, *tels que* $\varphi(s).x = \varphi(a)$.

(b) *L'application* $\varphi : A \to S^{-1}A$ *est un épimorphisme plat (dans la catégorie des anneaux commutatifs).*

Les propriétés indiquées ci-dessus sont très utiles. Il est donc intéressant de considérer leurs généralisations possibles pour le cas des anneaux non nécessairement commutatifs.

Peut-on généraliser le théorème 0 ? Alors, est-ce que les éléments de l'anneau qui généralise $S^{-1}A$ sont des fractions à gauche (ou à droite) ? Est-ce que l'homomorphisme canonique est un épimorphisme, plat à gauche (ou à droite) ?

Les résultats qui suivent sont eux aussi bien connus. Soient A un anneau (non nécessairement commutatif), S une partie multiplicative (non vide) de A.

THÉORÈME 1. - *Il existe un anneau* $S^{-1}A$, *et un homomorphisme d'anneaux* $\varphi : A \to S^{-1}A$, *tels que :*

1° *Tout élément de* $\varphi(S)$ *est inversible (à droite et à gauche) dans* $S^{-1}A$;

2° *Si* B *est un anneau,* $\psi : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux tel que tout élément de* $\psi(S)$ *soit inversible dans* B, *alors il existe un homomorphisme unique*

$\overline{\psi}$: $S^{-1}A \to B$ tel que $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$.

Démonstration. - Pour tout $s \in X$, soit X_s une indéterminée. Soit A' l'anneau libre sur A , engendré par les indéterminées X_s (pour $s \in S$). Les éléments de A' sont les sommes finies des monômes $a_0 X_{s_1} a_1 X_{s_2} a_2 \dots X_{s_m} a_m$ (avec $m \geqslant 0$, $a_i \in A$, $s_i \in S$), les opérations étant définies de façon évidente. On identifie A à un sous-anneau de A' . Dans A' , on considère l'idéal bilatère I , engendré par les éléments $sX_s - 1$, $X_s s - 1$, pour tout $s \in S$. Soient $S^{-1}A = A'/I$, et φ : $A \to S^{-1}A$ l'application donnée par $\varphi(a) = a + I$, pour tout $a \in A$. Alors φ est un homomorphisme, $\varphi(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$, son inverse étant la classe modulo I de l'indéterminée X_s .

Si ψ : $A \to B$ est un homomorphisme avec les propriétés indiquées, soit ψ' : $A' \to B$ l'unique homomorphisme tel que $\psi'(a) = \psi(a)$ (pour tout $a \in A$) et $\psi'(X_s) = (\psi(s))^{-1}$ (pour tout $s \in S$). Alors

$$\psi'(sX_s - 1) = 0 , \qquad \psi'(X_s s - 1) = 0 , \qquad \text{pour tout } s \in S ,$$

donc $\psi'(I) = 0$, et alors ψ' induit un homomorphisme $\overline{\psi}$: $S^{-1}A \to B$, à savoir $\overline{\psi}(f + I) = \psi'(f)$ (pour tout $f \in A'$). Donc $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$.

Si $\overline{\varkappa}$: $S^{-1}A \to B$ est un homomorphisme tel que $\overline{\varkappa} \circ \varphi = \psi$, alors nécessairement

$$\overline{\varkappa}(\varphi(a)) = \psi(a) = \overline{\psi}(\varphi(a)) .$$

En outre, de $sX_s + I = X_s s + I = 1 + I$ résulte

$$1 = \overline{\varkappa}(1 + I) = \overline{\varkappa}(s + I).\overline{\varkappa}(X_s + I) = \psi(s).\overline{\varkappa}(X_s + I) ,$$

et de même

$$1 = \overline{\varkappa}(X_s + I).\psi(s) .$$

Donc $\overline{\varkappa}(X_s + I) = (\psi(s))^{-1} = \overline{\psi}(X_s + I)$. Les homomorphismes $\overline{\varkappa}$, $\overline{\psi}$ coïncident sur un ensemble de générateurs de l'anneau $S^{-1}A$, donc $\overline{\varkappa} = \overline{\psi}$.

(c) L'application φ : $A \to S^{-1}A$ est un épimorphisme (dans la catégorie des anneaux).

Démonstration. - Si B est un anneau, et ψ , ψ' des homomorphismes de $S^{-1}A$ dans B tels que $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, alors $\psi(\varphi(s)) = \psi'(\varphi(s))$ est inversible dans B pour tout élément $s \in S$. D'après le théorème 1, il existe un homomorphisme unique $\varkappa$: $S^{-1}A \to B$ tel que $\varkappa \circ \varphi = \psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$. Donc $\varkappa = \psi = \psi'$.

Par contre, on ne saurait pas démontrer que $S^{-1}A$ est un A-module plat à gauche (ou à droite).

De la démonstration du théorème 1, il résulte que $S^{-1}A$ est l'anneau engendré par l'ensemble $\varphi(A) \cup \{\varphi(s)^{-1} \mid s \in S\}$. En particulier, si A est commutatif, alors $S^{-1}A$ est un anneau commutatif qui coïncide nécessairement avec celui du théorème 0.

L'anneau $S^{-1}A$ s'appelle l'anneau inverseur de S.

On précise maintenant la notion d'anneau de fractions dans le cas non commutatif. Soient A un anneau (non nécessairement commutatif), S une partie multiplicative (non vide) de A. Soient $S\backslash A$ un anneau, $\varphi : A \to S\backslash A$ un homomorphisme. On dit que $S\backslash A$ est un anneau de fractions à gauche de A par S, lorsque :

1° Si $\varphi(a) = 0$, alors il existe $s \in S$ tel que $sa = 0$;

2° Si $s \in S$, alors $\varphi(s)$ est inversible dans $S\backslash A$;

3° Tout élément de $S\backslash A$ s'écrit sous la forme $[\varphi(s)]^{-1}.\varphi(a)$, où $a \in A$, $s \in S$.

On définit de même la notion d'anneau de fractions à droite de A par S, noté A/S.

Les résultats qui suivent sont classiques (voir BOURBAKI [2], chapitre II, p. 162).

THÉORÈME 2. - Un anneau de fractions à gauche $S\backslash A$ existe, si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :

1° Condition de Ore (à gauche) : Pour tout $s \in S$ et $a \in A$, il existe $t \in S$, $b \in A$, tels que $ta = bs$;

2° Si $a \in A$, $s \in S$, et $as = 0$, alors il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$.

(d) Si $S\backslash A$ existe, il satisfait la propriété universelle du théorème 1, c'est-à-dire $S\backslash A$ est l'anneau inverseur de S, et $\varphi = i$ (à un isomorphisme canonique près).

(e) Si les anneaux de fractions à gauche et à droite $S\backslash A$ et A/S existent, alors ils sont isomorphes.

Il en résulte que les éléments de l'anneau $S^{-1}A$ ne sont pas toujours de fractions. Il est intéressant de déterminer la nature de ces éléments. Cela sera probablement utile dans les questions d'immersion d'anneaux sans diviseurs de zéro dans des anneaux avec division.

2. Sur l'anneau inverseur de S .

THÉORÈME 3. - Soient A un anneau (non nécessairement commutatif), S une partie multiplicative (non vide) de A telle que $st = ts$ pour tout $s , t \in S$.

(i) Dans l'ensemble $S \times A$, soit la relation $(s , a) \equiv (t , b)$, lorsqu'il existe $u \in S$ tel que $uta = usb$. Alors, $\equiv$ est une relation d'équivalence.

(ii) On note a/s la classe d'équivalence de (s , a) , et G l'ensemble des classes d'équivalence. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$S^{-1} A \simeq (\mathbb{Z}\{X_g\}_{g\in G})/I \ ,$$

où $\mathbb{Z}\{X_g\}$ désigne l'anneau de polynômes aux indéterminées non commutatives X_g (pour $g \in G$), et I est l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$X_{a/s} + X_{b/t} - X_{(ta+sb)/st} \qquad (\text{pour } a , b \in A , s , t \in S) \ ,$$

$$X_{a/s}.X_{b/t} - X_{ab/st} \qquad (\text{pour } a , b \in A , s , t \in S) , \quad \text{lorsque } at = ta \ ,$$

$$X_{1/1} - 1 \ .$$

Démonstration.

(i) La relation $\equiv$ est évidemment réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive. En effet, si $(s , a) \equiv (t , b)$ et $(t , b) \equiv (r , c)$, soient $u , v \in S$ tels que $uta = usb$, $vrb = vtc$. Alors

$$vruta = vrusb = usvrb = usvtc \ ,$$

donc

$$(vut)ra = (vut)sc \ , \qquad \text{avec } vut \in S \ ,$$

c'est-à-dire $(s , a) \equiv (r , c)$.

(ii) Soit $L = \mathbb{Z}\{X_g\}_{g\in G}$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ aux indéterminées non commutatives X_g (pour $g \in G$) ; c'est l'anneau libre engendré par G . Soient l'anneau $A' = L/I$, et $\varphi' : A \to A'$ l'application définie par $\varphi'(a) = \overline{X}_{a/1}$ = classe de $X_{a/1}$ modulo I . Alors $\varphi'(1) = \overline{X}_{1/1} = 1$. Si $a , b \in A$, alors

$$\varphi'(a + b) = \overline{X}_{(a+b)/1} = \overline{X}_{a/1} + \overline{X}_{b/1} = \varphi'(a) + \varphi'(b) \ .$$

De même,

$$\varphi'(ab) = \overline{X}_{ab/1} = \overline{X}_{a/1}.\overline{X}_{b/1} = \varphi'(a)\ \varphi'(b) \ ,$$

car $a.1 = 1.a$. Donc $\varphi' : A \to A'$ est un homomorphisme. Si $s \in S$, alors

$$\overline{X}_{1/s}.\overline{X}_{s/1} = \overline{X}_{s/1}.\overline{X}_{1/s} = \overline{X}_{s/s} = \overline{X}_{1/1} \ ,$$

donc $\varphi'(s)$ est inversible dans A' (pour tout $s \in S$).

Soient maintenant B un anneau, et $\psi : A \to B$ un homomorphisme tel que $\psi(s)$ soit inversible dans B (pour tout $s \in S$). Il s'agit de définir un homomorphisme $\psi' : A' \to B$ tel que $\psi' \circ \varphi' = \psi$. Il suffit de définir un homomorphisme $\tilde{\psi} : L \to B$ tel que $\tilde{\psi}(I) = 0$ et $\tilde{\psi}(X_{a/1}) = \psi(a)$ pour tout $a \in A$.

L étant l'anneau libre engendré par G, il existe un homomorphisme unique $\tilde{\psi} : L \to B$ tel que $\tilde{\psi}(X_{a/s}) = \psi(a)/\psi(s)$ (pour tout $a/s \in G$). Alors

$$\tilde{\psi}(X_{a/s} + X_{b/t} - X_{(ta+sb)/st}) = \psi(a)/\psi(s) + \psi(b)/\psi(t) - (\psi(t)\,\psi(a) + \psi(s)\,\psi(b))/(\psi(s)\,\psi(t)) = 0 ,$$

car

$$(\psi(t)\,\psi(a))/(\psi(s)\,\psi(t)) = (\psi(s))^{-1}\,(\psi(t))^{-1}\,\psi(t)\,\psi(a) = \psi(s)^{-1}\,\psi(a) = \psi(a)/\psi(s) ,$$

$$(\psi(s)\,\psi(b))/(\psi(s)\,\psi(t)) = (\psi(s))^{-1}\,(\psi(t))^{-1}\,\psi(s)\,\psi(b) = (\psi(t))^{-1}\,(\psi(s))^{-1}\,\psi(s)\,\psi(b) = \psi(b)/\psi(t)$$

(en notant que $st = ts$). De même, si $at = ta$, alors

$$\tilde{\psi}(X_{a/s}.X_{b/t} - X_{ab/st}) = (\psi(s))^{-1}\,\psi(a)\,(\psi(t))^{-1}\,\psi(b) - (\psi(st))^{-1}\,\psi(ab) = 0 ,$$

car

$$\psi(a)\,(\psi(t))^{-1} = (\psi(t))^{-1}\,\psi(a) \qquad \text{et} \qquad (\psi(s))^{-1}\,(\psi(t))^{-1} = (\psi(t))^{-1}\,(\psi(s))^{-1}$$

(puisque $st = ts$). Enfin

$$\tilde{\psi}(X_{1/1} - 1) = \psi(1)/\psi(1) - 1 = 0 .$$

Ainsi $\tilde{\psi}(I) = 0$. En outre, $\tilde{\psi}(X_{a/1}) = \psi(a)/\psi(1) = \psi(a)$ pour tout $a \in A$.

Si $\psi' : A' \to B$ est l'homomorphisme induit par $\tilde{\psi}$, alors $\psi' \circ \varphi' = \psi$. Enfin ψ' est unique avec cette propriété, car, si $\psi'' : A' \to B$ est tel que $\psi'' \circ \varphi' = \psi$, alors

$$\psi''(\bar{X}_{a/s}) = \psi''(\bar{X}_{1/s}.\bar{X}_{a/1}) = \psi''(\bar{X}_{1/s})\,\psi''(\varphi'(a)) .$$

Or

$$\bar{X}_{1/s}.\bar{X}_{s/1} = \bar{X}_{s/1}.\bar{X}_{1/s} = \bar{X}_{1/1} = 1 ,$$

donc $\psi''(\bar{X}_{1/s})$ est l'inverse de $\psi(s)$. Ainsi

$$\psi''(\bar{X}_{a/s}) = \psi(a)/\psi(s) = \psi'(\bar{X}_{a/s}) , \qquad \text{pour tout } a/s \in G ,$$

ce qui montre que $\psi'' = \psi'$.

D'après la propriété universelle de l'anneau $S^{-1}A$, on conclut qu'il existe un isomorphisme canonique $\rho : S^{-1}A \to A'$ tel que $\rho \circ \varphi = \varphi'$.

Le théorème précédent s'applique lorsque $S = \langle s \rangle$, partie multiplicative engendrée par l'élément $s \in A$.

Remarque. - Soit $L_0 = \mathbb{Z}\{X_{a/s}\}$, $a/s \in G$, $a/s \neq 0/1$, et soit $I_0 = I \cap L_0$. Alors $L_0/I_0 \simeq L/I$. En effet, le noyau de l'homomorphisme composé

$$L_0 \xrightarrow{\subset} L \longrightarrow L/I$$

est égal à I_0 . D'autre part, étant donné $f + I \in L/I$, soit f_0 la somme des monômes de f qui appartiennent à L_0 . Ainsi $f = f_0 + (f - f_0)$, et chaque monôme de $f - f_0$ contient l'indéterminée $X_{0/1}$. Or $X_{0/1} \in I$, car

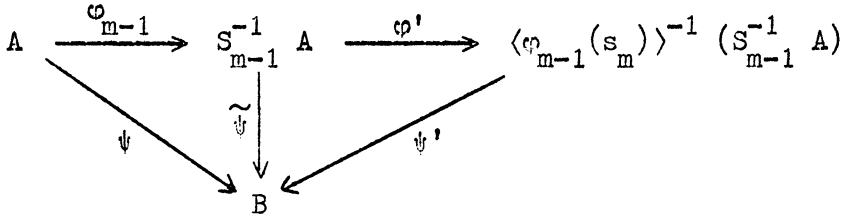
$$X_{0/1} = X_{1/1} + X_{0/1} - X_{1/1} \ .$$

Donc $f - f_0 \in I$ et $f + I = f_0 + I$. Ceci montre que $L_0/I_0 \simeq L/I$, canoniquement.

THÉORÈME 4. - Soient $m \geqslant 1$, S_j la partie multiplicative de A engendrée par les éléments $s_1 , \ldots , s_j$, et $\varphi_j : A \to S_j^{-1} A$ l'homomorphisme canonique (où $1 \leqslant j \leqslant m$). Soit $\langle \varphi_{m-1}(s_m) \rangle$ la partie multiplicative de $S_{m-1}^{-1} A$ engendrée par l'élément $\varphi_{m-1}(s_m)$, et soit $\varphi' : S_{m-1}^{-1} A \to \langle \varphi_{m-1}(s_m) \rangle^{-1} (S_{m-1}^{-1} A)$ l'homomorphisme canonique. Alors

$$S_m^{-1} A \simeq \langle \varphi_{m-1}(s_m) \rangle^{-1} (S_{m-1}^{-1} A) \qquad \text{et} \qquad \varphi_m = \varphi' \circ \varphi_{m-1} \ .$$

Démonstration.



Pour simplifier les notations, soient $A' = \langle \varphi_{m-1}(s_m) \rangle^{-1} (S_{m-1}^{-1} A)$, et $\varphi = \varphi' \circ \varphi_{m-1}$. $\varphi(s)$ est inversible dans A' pour tout élément $s \in S$, car cela est vrai pour les éléments $s_1 , \ldots , s_m$.

Si $\psi : A \to B$ est un homomorphisme tel que $\psi(s)$ soit inversible dans B (pour tout $s \in S$), alors il existe un homomorphisme $\tilde{\psi} : S_{m-1}^{-1} A \to B$, unique, tel que $\tilde{\psi} \circ \varphi_{m-1} = \psi$. Puisque $\tilde{\psi}(\varphi_{m-1}(s_m)) = \psi(s_m)$ est inversible dans B , il existe un homomorphisme $\psi' : A' \to B$, unique, tel que $\psi' \circ \varphi' = \tilde{\psi}$. Alors $\psi' \circ (\varphi' \circ \varphi_{m-1}) = \tilde{\psi} \circ \varphi_{m-1} = \psi$, et, si $\psi'' : A' \to B$ est un homomorphisme tel que $\psi'' \circ (\varphi' \circ \varphi_{m-1}) = \psi$, alors $(\psi'' \circ \varphi') \circ \varphi_{m-1} = \psi$, donc, par l'unicité, $\psi'' \circ \varphi' = \tilde{\psi}$; par la même raison, on conclut que $\psi'' = \psi'$.

En vertu de la propriété universelle, il existe un isomorphisme canonique $S_m^{-1} A \simeq A'$.

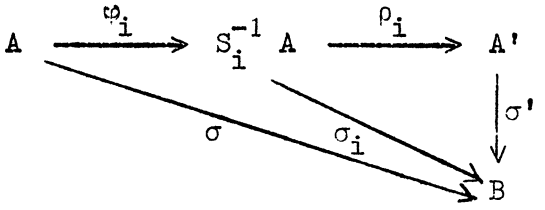
Soit S une partie multiplicative quelconque de A , et soit $(S_j)_{j\in J}$ la famille des parties multiplicatives de type fini contenues dans S . Pour tout $j \in J$, soit $\varphi_j : A \to S_j^{-1} A$ l'homomorphisme canonique. Si $S_i \subseteq S_j$, tous les éléments de $\varphi_j(S_i)$ sont inversibles dans $S_j^{-1} A$; d'après la propriété universelle, il existe un homomorphisme $\rho_{ij} : S_i^{-1} A \to S_j^{-1} A$, unique, tel que $\varphi_j = \rho_{ij} \circ \varphi_i$. Il en résulte que, si $S_i \subseteq S_j \subseteq S_k$, alors $\rho_{ik} = \rho_{jk} \circ \rho_{ij}$, et, de même, que ρ_{ii} est l'application identique.

La famille filtrante $(S_i^{-1} A , \rho_{ij})$ d'anneaux et homomorphismes, obtenue ci-dessus, a une limite directe.

THÉORÈME 5. - <u>Avec les notations ci-dessus</u>, $S^{-1} A = \varinjlim S_j^{-1} A$, <u>et l'homomorphisme canonique</u> $\varphi : A \to S^{-1} A$ <u>est</u> $\varphi = \varinjlim \varphi_j$.

<u>Démonstration</u>. - Pour toute partie multiplicative de type fini $S_j \subseteq S$, soit $\rho_j : S_j^{-1} A \to A' = \varinjlim S_i^{-1} A$ l'homomorphisme canonique. Donc A' est l'union des sous-anneaux $\rho_j(S_j^{-1} A)$, pour toute partie S_j . Si $S_i \subseteq S_j$, alors $\rho_j \circ \rho_{ij} = \rho_i$. Soit $\varphi' = \varinjlim \varphi_j : A \to A'$, donc $\varphi' = \rho_i \circ \varphi_i$ pour toute partie S_i .

Si $s \in S$, il existe S_i telle que $s \in S_i$. Alors $\varphi_i(s)$ est inversible dans $S_i^{-1} A$, donc $\varphi'(s) = \rho_i(\varphi_i(s))$ est inversible dans A' .



Soit $\sigma : A \to B$ un homomorphisme tel que $\sigma(s)$ soit inversible dans B pour tout $s \in S$. Alors, pour tout S_i , il existe un homomorphisme unique

$$\sigma_i : S_i^{-1} A \to B$$

tel que $\sigma_i \circ \varphi_i = \sigma$.

Si $S_i \subseteq S_j$, de $\sigma_j \circ \varphi_j = \sigma$ il résulte que

$$(\sigma_j \circ \rho_{ij}) \circ \varphi_i = \sigma_j \circ \varphi_j = \sigma = \sigma_i \circ \varphi_i ,$$

et, d'après l'unicité,

$$\sigma_j \circ \rho_{ij} = \sigma_i .$$

Ainsi, on peut considérer l'homomorphisme $\sigma' = \varinjlim \sigma_i : A' \to B$. Si $a \in A$, alors

$$\sigma'(\varphi'(a)) = \sigma' \circ \rho_i(\varphi_i(a)) = \sigma_i(\varphi_i(a)) = \sigma(a) , \qquad \text{pour tout } a \in A .$$

σ' est l'unique homomorphisme avec la propriété ci-dessus, car, si $\sigma'' : A' \to B$ est tel que $\sigma'' \circ \varphi' = \sigma$, alors $(\sigma'' \circ \rho_i) \circ \varphi_i = \sigma$, donc $\sigma'' \circ \rho_i = \sigma_i = \sigma' \circ \rho_i$ pour toute partie de type S_i . Or $A' = \bigcup \rho_i(S_i^{-1} A)$, donc nécessairement $\sigma'' = \sigma'$.

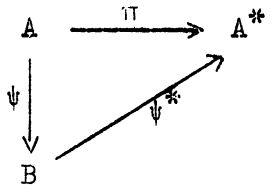
D'après la propriété universelle, on conclut, à un isomorphisme unique près, que $\varinjlim S_j^{-1} A = S^{-1} A$, et $\varphi' = \varphi$.

3. Extensions épi-plates de fractions.

Il s'agit maintenant de trouver un nouvel anneau dont les éléments sont des fractions (à gauche) ayant "dénominateurs" dans une partie multiplicative donnée, de façon que l'homomorphisme canonique soit un épimorphisme plat à gauche, universel par rapport à ces propriétés. Toutefois, on n'exigera pas que les éléments de la partie multiplicative donnée deviennent inversibles.

Dans le cas des anneaux commutatifs, on a le résultat suivant, dû à LAZARD :

(f) Soit A un anneau commutatif. Il existe un anneau A^* , et un épimorphisme plat et injectif $\pi : A \to A^*$, avec la propriété universelle suivante : Si B est un anneau commutatif, et $\psi : A \to B$ un épimorphisme plat et injectif, il existe un homomorphisme $\psi^* : B \to A^*$, unique, tel que $\psi^* \circ \psi = \pi$,



.

Dans sa démonstration, LAZARD utilise les produits tensoriels de A-algèbres commutatives, et le fait que les classes d'isomorphisme des épimorphismes plats injectifs de source A sont en bijection avec certains sous-ensembles de $\mathrm{Spec}(A)$.

Dans le résultat principal qui sera exposé ici, on considère aussi des parties multiplicatives de A . On ne suppose pas que l'anneau A soit commutatif, et, par conséquent, on doit envisager une technique qui permettra encore la considération d'anneaux produits tensoriels de certains anneaux non commutatifs. Ceci a été introduit par PROCESI, et se trouve exposé dans l'article de ARTIN [1].

Soit A un anneau (non nécessairement commutatif), soit M un A-module à droite et à gauche.

Le centralisateur de A dans M est l'ensemble

$$Z_A(M) = \{x \in M \mid ax = xa \text{ pour tout } a \in A\} \ ;$$

$Z_A(M)$ est un sous-groupe additif de M, et un module sur le centre de A. Si $M = A$, alors $Z_A(A)$ est le centre de l'anneau A.

On dit que M est un bimodule sur A, lorsque les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1° M est le A-module à droite engendré par $Z_A(M)$;
2° M est le A-module à gauche engendré par $Z_A(M)$;
3° Si $x \in M$, on peut l'écrire

$$x = \sum_i a_i z_i = \sum_i z_i a_i , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

où $a_i \in A$, $z_i \in Z_A(M)$.

Il en résulte que $(ax)a' = a(xa')$, pour tout a, $a' \in A$ et $x \in M$.

Si M, N sont des bimodules sur A, un homomorphisme $\varphi : M \to N$ (en tant que bimodules) est un homomorphisme de A-modules à droite et à gauche. Dans ce cas, $\varphi(Z_A(M)) \subseteq Z_A(N)$. Le composé de deux homomorphismes de bimodules est un homomorphisme de bimodules. Ceci permet de considérer la catégorie des bimodules sur A.

Un homomorphisme de bimodules est un isomorphisme de bimodules, si, et seulement si, il est un homomorphisme bijectif. Si M, N sont des bimodules sur A, alors $M \otimes_A N$ est encore un bimodule sur A, engendré par

$$\{x \otimes y \mid x \in Z_A(M) , \ y \in Z_A(N)\} \subseteq Z_A(M \otimes N) .$$

En tant que bimodules sur A, on a les isomorphismes

$$M \simeq A \otimes_A M , \qquad M \simeq M \otimes_A A ,$$

$$M \otimes_A (N \otimes_A P) \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P) .$$

En outre, il existe un isomorphisme de bimodules

$$\tau : M \otimes_A N \to N \otimes_A M ,$$

qui est unique, tel que $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ pour $x \in Z_A(M)$, $y \in Z_A(N)$. En fait, si $x \in Z_A(M)$ ou $y \in Z_A(N)$, on a aussi $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Si $\alpha : M \to M'$, $\beta : N \to N'$, sont des homomorphismes de bimodules, alors

$$\alpha \otimes \beta : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

est un homomorphisme de bimodules, et

$$\tau' \circ (\alpha \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta) \circ \tau \ .$$

Soient A , B des anneaux, et $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Au moyen de φ , B devient un A-module à droite et à gauche. φ est appelé une extension, lorsque B est un bimodule sur A . Par abus de langage, on dit aussi que B est une extension de A . Par exemple, si $\varphi(A)$ est contenu dans le centre de l'anneau B , alors φ est une extension. De même, si φ est surjectif, alors B est le A-module engendré par $1 \in Z_A(B)$; donc φ est une extension.

Si G est un semi-groupe multiplicatif, A un anneau, et $A[G]$ l'anneau du semi-groupe G à coefficients dans A , alors l'application canonique $\varphi : A \to A[G]$ est une extension. En effet, si $g \in G$, alors $ag = ga$ pour tout $a \in A$; donc $G \subseteq Z_A(A[G])$, et G est un ensemble des générateurs du A-module $A[G]$. En particulier, l'anneau de polynômes, à indéterminées non commutatives et coefficients dans A , est l'anneau du semi-groupe des monômes, donc une extension de A .

Si $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to C$ sont des extensions, alors $\psi \circ \varphi : A \to C$ est une extension. On peut alors considérer la catégorie des anneaux ayant comme morphismes les extensions d'anneaux.

(g) Soient $\beta : A \to B$ et $\beta' : A \to B'$ des extensions. Sur le A-bimodule $B \otimes_A B'$, il existe une structure d'anneau, unique, telle que :

1° $(b \otimes 1)(1 \otimes b') = (1 \otimes b')(b \otimes 1) = b \otimes b'$, lorsque $b \in Z_A(B)$, $b' \in Z_A(B')$;

2° Les homomorphismes canoniques de bimodules $j : B \to B \otimes_A B'$ et $j' : B' \to B \otimes_A B'$ sont des extensions.

Il en résulte que $\tau(xy) = \tau(x)\,\tau(y)$ pour tout x , $y \in B \otimes_A B'$, et

$$\gamma = j \circ \beta = j' \circ \beta'$$

est une extension.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \beta\ } & B \\ {\scriptstyle \beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ B' & \xrightarrow[\ j'\ ]{} & B \otimes_A B' \end{array}$$

En outre, si $b'_1 \in Z_A(B')$ ou $b_2 \in Z_A(B)$, alors

$$(b_1 \otimes b'_1)(b_2 \otimes b'_2) = b_1\, b_2 \otimes b'_1\, b'_2 \ .$$

On note aussi, pour un usage ultérieur, que, si a , $a' \in A$, alors

$$(1 \otimes \beta'(a'))(\beta(a) \otimes 1) = j'(\beta'(a')).j(\beta(a)) = \gamma(a')\,\gamma(a)$$
$$= j(\beta(a')).j'(\beta'(a)) = (\beta(a') \otimes 1)(1 \otimes \beta'(a)) = \beta(a') \otimes \beta'(a)$$

Dans la situation précédente, si β est un épimorphisme d'anneaux, alors $j' : B' \to B \otimes_A B'$ est un épimorphisme d'anneaux. Donc, si β et β' sont des épimorphismes, alors $\gamma = j \circ \beta = j' \circ \beta'$ est un épimorphisme.

En ce qui concerne la platitude, on rappelle la propriété suivante :

(h) Si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, plat à gauche, si $a \in A$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche de l'anneau A, alors $\varphi(a)$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche de l'anneau B.

La démonstration peut se trouver dans [2].

Avec les notations déjà utilisées, si $\beta : A \to B$ et $\beta' : A \to B'$ sont des extensions plates à gauche, alors $\gamma = j \circ \beta = j' \circ \beta' : A \to B \otimes_A B'$ est une extension plate à gauche.

Soient I un ensemble ordonné filtrant à droite, et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux. Si $i, j \in I$ et $i \leqslant j$, soit $\rho_{ij} : B_i \to B_j$ une extension, de façon que ρ_{ii} est l'application identique, et, si $i \leqslant j \leqslant k$, alors $\rho_{ik} = \rho_{jk} \circ \rho_{ij}$. Soit $B = \varinjlim B_i$ l'anneau limite directe de la famille $(B_i)_{i \in I}$, relativement aux extensions ρ_{ij} $(i \leqslant j)$. Soit $\lambda_i : B_i \to B$ l'homomorphisme canonique. Alors, λ_i est une extension. De plus, si, pour tout $i \in I$, $\varphi_i : A \to B_i$ est une extension, telle que $\varphi_j = \rho_{ij} \circ \varphi_i$ lorsque $i \leqslant j$, et si $\varphi : A \to B$ est égal à $\varphi = \varinjlim \varphi_i$, alors φ est une extension. Si chaque φ_i est plate à gauche, alors $\varphi = \varinjlim \varphi_i$ est aussi plate à gauche.

Une fois rappelés ces faits assez simples, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Soient A un anneau, S une partie multiplicative (non vide) de A. Il existe un anneau A^S, et une extension $\alpha^S : A \to A^S$, tels que :

(I) 1° α^S est un épimorphisme d'anneaux ;

2° α^S est plat à gauche ;

3° Si $b \in A^S$, il existe $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche de A, et il existe $a \in A$, tels que

$$\alpha^S(s).b = \alpha^S(a) \quad .$$

(II) Si B est un anneau, si $\beta : A \to B$ est une extension satisfaisant les conditions 1°, 2°, 3°, de (I), il existe une extension $\beta^* : B \to A^S$, unique (parmi les homomorphismes d'anneaux), telle que $\beta^* \circ \beta = \alpha^S$.

Démonstration. - Soit (B, β) un couple, tel que B est un anneau, et $\beta : A \to B$ est une extension satisfaisant les propriétés 1°, 2°, 3°, ci-dessus.

Alors $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A \times S)$. En effet, pour tout $b \in B$, soit

$$F(b) = \{(a , s) \in A \times S \mid s \text{ n'est pas diviseur de zéro à gauche dans } A , \text{ et } \beta(s).b = \beta(a)\} .$$

D'après l'hypothèse 3°, $F(b) \neq \emptyset$. Si $b \neq b'$, alors $F(b) \cap F(b') = \emptyset$, car, si $\beta(s).b = \beta(a) = \beta(s).b'$, on a $\beta(s).(b - b') = 0$. Or, β est plate à gauche, donc $\beta(s)$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche de B ; donc $b = b'$. Ceci montre que $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A \times S)$.

Si (B , β) , (B' , β') sont des couples du type considéré ci-dessus, on pose $(B , \beta) \equiv (B' , \beta')$ lorsqu'il existe un isomorphisme d'anneaux $\delta : B \to B'$ tel que $\delta \circ \beta = \beta'$. La relation $\equiv$ est une équivalence. Tout couple (B , β) est équivalent à un couple (B' , β') , où $B' \subseteq A \times S$. En effet, étant donné que $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A \times S)$, il existe une bijection $\delta : B \to \delta(B) \subseteq A \times S$. On prend $B' = \delta(B)$, avec la structure d'anneau transportée de celle de B au moyen de δ ; si $\beta' = \delta \circ \beta$, alors $(B , \beta) \equiv (B' , \beta')$.

Il s'ensuit que les classes d'isomorphisme des couples (B , β) forment un ensemble, lequel sera noté $\mathfrak{B}$. La classe d'équivalence de (B , β) se désigne par $[B , \beta]$.

L'ensemble $\mathfrak{B}$ est ordonné, en posant $[B , \beta] \leqslant [B' , \beta']$ lorsqu'il existe une extension $\delta : B \to B'$ telle que $\delta \circ \beta = \beta'$. Cette relation est bien définie (indépendante du choix des couples représentants des classes d'équivalence) ; en outre, $\leqslant$ satisfait les propriétés réflexive et transitive de façon évidente. Enfin, si $[B , \beta] \leqslant [B' , \beta']$ et $[B' , \beta'] \leqslant [B , \beta]$, si δ , δ' sont des extensions telles que $\delta \circ \beta = \beta'$, $\delta' \circ \beta' = \beta$, alors $(\delta \circ \delta') \circ \beta' = \delta \circ \beta = \beta'$, et, puisque β' est un épimorphisme d'anneaux, alors $\delta \circ \delta' = \mathrm{id}_{B'}$; de même, $\delta' \circ \delta = \mathrm{id}_B$, donc δ , δ' sont des isomorphismes réciproques, et

$$[B , \beta] = [B' , \beta'] .$$

En passant, on remarque que, si $[B , \beta] \leqslant [B' , \beta']$, alors l'extension δ , telle que $\delta \circ \beta = \beta'$, est l'unique homomorphisme d'anneaux avec cette propriété ; en effet, si $\delta' \circ \beta = \beta' = \delta \circ \beta$, alors $\delta' = \delta$, car β est un épimorphisme. On notera sans ambiguïté $\delta_{BB'}$ cet homomorphisme. De $\delta_{BB'} \circ \beta = \beta'$, il résulte aussi que $\delta_{BB'}$ est un épimorphisme d'anneaux.

Le couple (A , id_A) satisfait les propriétés 1°, 2°, 3°, de (I), et

$$[A , \mathrm{id}_A] \leqslant [B , \beta] , \qquad \text{pour tout } [B , \beta] \in \mathfrak{B} .$$

Maintenant on démontrera que $\mathfrak{B}$ est filtrant à droite, selon la relation $\leqslant$. Etant donnés $[B , \beta]$, $[B' , \beta'] \in \mathfrak{B}$, soient

$$j : B \to B \otimes_A B' , \qquad j' : B' \to B \otimes_A B' ,$$

les extensions canoniques,

$$\gamma = j \circ \beta = j' \circ \beta'$$

l'extension composée. Il suffit de montrer que $[B \otimes_A B' , \gamma] \in \mathfrak{B}$, d'où il résulte que

$$[B , \beta] \leqslant [B \otimes_A B' , \gamma] , \qquad [B' , \beta'] \leqslant [B \otimes_A B' , \gamma] .$$

Tout d'abord, γ est un épimorphisme, car β , β' sont des épimorphismes. De même, γ est plat à gauche. Pour montrer la propriété 3°, on établit un lemme.

LEMME. - Soit $\beta : A \to B$ une extension satisfaisant la propriété 3°. Soient $b_1 , \dots , b_n \in Z_A(B)$. Alors il existe $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche de A , et des éléments $a'_1 , \dots , a'_n \in A$, tels que

$$\beta(s).b_i = a'_i \qquad (i = 1 , \dots , n) .$$

En effet, soient $s_i \in S$, s_i non diviseur de zéro à gauche de A , et $a_i \in A$, tels que $\beta(s_i).b_i = a_i$ (pour chaque $i = 1 , \dots , n$). Soit $s = s_1 , \dots , s_n$, donc $s \in S$, et s n'est pas un diviseur de zéro à gauche de A . En tenant compte que $b_i \in Z_A(B)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \beta(s).b_i &= \beta(s_1 , \dots , s_{i-1}).\beta(s_i).\beta(s_{i+1} , \dots , s_n).b_i \\ &= \beta(s_1 , \dots , s_{i-1}).\beta(s_i).b_i.\beta(s_{i+1} , \dots , s_n) \\ &= \beta(s_1 , \dots , s_{i-1}).\beta(a_i).\beta(s_{i+1} , \dots , s_n) \\ &= \beta(s_1 , \dots , s_{i-1}.a_i.s_{i+1} , \dots , s_n) , \end{aligned}$$

pour tout $i = 1 , \dots , n$.

Le lemme étant démontré, soit $b \in B \otimes_A B'$. On peut écrire $b = \sum_i b_i \otimes b'_i$, où chaque $b_i \in Z_A(B)$, $b'_i \in B'$. En effet, $b = \sum_k b_k \otimes b'_k$, où $b_k \in B$, $b'_k \in B'$. Mais $b_k = \sum_j b_{kj}.\beta(a_j)$ (où $b_{kj} \in Z_A(B)$, $a_j \in A$), donc

$$b = \sum_k (\sum_j b_{kj}.\beta(a_j)) \otimes b'_k = \sum_k \sum_j b_{kj} \otimes \beta'(a_j).b'_k ,$$

et cette expression est de la forme indiquée. D'après le lemme, il existe $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche, et $c_i \in A$ (pour tout i), tels que $\beta(s).b_i = \beta(c_i)$ (pour tout i). Alors

$$\begin{aligned} \gamma(s).(\sum_i b_i \otimes b'_i) = \sum_i (\beta(s) \otimes 1)(b_i \otimes b'_i) = \sum_i \beta(s).b_i \otimes b'_i = \sum_i \beta(c_i) \otimes b'_i \\ = \sum_i 1 \otimes \beta'(c_i).b'_i = 1 \otimes b' , \end{aligned}$$

où $b' = \sum_i \beta'(c_i).b'_i$. On peut écrire

$$b' = \sum_k \beta'(a'_k).b'_k \ ,$$

où $b'_k \in Z_A(B')$, et $a'_k \in A$ (pour tout k). D'après le lemme, il existe $s' \in S$, s' non diviseur de zéro à gauche, et $c'_k \in A$ (pour tout k), tels que $\beta'(s').b'_k = \beta'(c'_k)$ (pour tout k). Alors

$$1 \otimes b' = 1 \otimes (\sum_k \beta'(a'_k).b'_k) = \sum_k \beta(a'_k) \otimes b'_k = \sum (1 \otimes b'_k)(\beta(a'_k) \otimes 1) \ .$$

Enfin $s's \in S$, $s's$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche de A , et

$$\begin{aligned}\gamma(s's).(\sum_i b_i \otimes b'_i) &= \gamma(s').(1 \otimes b') = \sum_k \gamma(s').(1 \otimes b'_k)(\beta(a'_k) \otimes 1) \\ &= \sum_k (1 \otimes \beta'(s'))(1 \otimes b'_k)(\beta(a'_k) \otimes 1) = \sum_k (1 \otimes \beta'(s').b'_k)(\beta(a'_k) \otimes 1) \\ &= \sum_k (1 \otimes \beta'(c'_k))(\beta(a'_k) \otimes 1) = \sum_k \gamma(c'_k).\gamma(a'_k) = \gamma(\sum c'_k\, a'_k) \ .\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété 3° est satisfaite, et $\mathfrak{B}$ est filtrant à droite.

Soit la famille d'anneaux $(\Phi_{[B,\beta]})_{[B,\beta]\in\mathfrak{B}}$, où chaque $\Phi_{[B,\beta]} = B$. Si $[B\ ,\ \beta] \leqslant [B'\ ,\ \beta']$, soit

$$\delta_{[B,\beta],[B',\beta']} = \delta_{BB'} : \ B \to B' \ ,$$

unique extension telle que $\beta' = \delta_{BB'} \circ \beta$. D'après l'unicité de $\delta_{BB'}$, il résulte que $\delta_{[B,\beta],[B,\beta]} = id_B$, et, si $[B\ ,\ \beta] \leqslant [B'\ ,\ \beta'] \leqslant [B''\ ,\ \beta'']$, alors

$$\delta_{[B,\beta],[B'',\beta'']} = \delta_{[B',\beta'],[B'',\beta'']} \circ \delta_{[B,\beta],[B',\beta']} \ .$$

Soit $A^S = \varinjlim \Phi_{[B,\beta]}$ la limite directe de la famille filtrante d'anneaux $\Phi_{[B,\beta]}$. Soit $\alpha^S : \ A \to A^S$ la limite directe des extensions $\beta : \ A \to \Phi_{[B,\beta]}$. Donc α^S est une extension.

Pour tout $[B\ ,\ \beta] \in \mathfrak{B}$, soit

$$\beta^*_{[B,\beta]} = \beta^* : \ B \to A^S$$

l'extension canonique telle que $\alpha^S = \beta^* \circ \beta$. Donc, si $[B\ ,\ \beta] \leqslant [B'\ ,\ \beta']$, alors

$$\beta^*_{[B',\beta']} \circ \delta_{[B,\beta],[B',\beta']} = \beta^*_{[B,\beta]} \ .$$

Comme il a été indiqué, il résulte de la construction que $(A^S\ ,\ \alpha^S)$ satisfait les propriétés 1°, 2°, de (I). Quant à la propriété 3°, soit $c \in A^S$; il existe $[B\ ,\ \beta] \in \mathfrak{B}$ telle que $c = \beta^*(b)$, avec $b \in B$. Soit $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche de A , et soit $a \in A$, tels que $\beta(s).b = \beta(a)$. En appliquant β^* ,

on déduit que $\alpha^S(s).c = \alpha^S(a)$.

Soit maintenant (B , β) un couple vérifiant les propriétés 1°, 2°, 3°, de (I). D'après la construction, il existe une extension $\beta^* : B \to A^S$ telle que $\beta^* \circ \beta = \alpha^S$. Enfin, β^* est l'unique homomorphisme avec cette propriété, car, si $\beta_1^* : B \to A^S$ satisfait $\beta_1^* \circ \beta = \alpha^S = \beta^* \circ \beta$, alors $\beta_1^* = \beta$, puisque β est un épimorphisme d'anneaux.

De façon analogue, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - Soient A un anneau, S une partie multiplicative (non vide) de A . Il existe un anneau A_S , et une extension $\alpha_S : A \to A_S$, tels que :

(I) (0) α_S est injective ;

(1) α_S est un épimorphisme d'anneaux ;

(2) α_S est plate à gauche ;

(3) Si $b \in A_S$, il existe $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche de A , et $a \in A$, tels que

$$\alpha_S(s).b = \alpha_S(a) \quad .$$

(II) Si B est un anneau, si $\beta : A \to B$ est une extension satisfaisant les conditions (0), (1), (2), (3), de (I), il existe une extension $\beta^* : B \to A_S$, unique (parmi les homomorphismes d'anneaux), telle que $\beta^* \circ \beta = \alpha_S$.

Démonstration. - La démonstration de ce théorème est analogue. Il suffit de tenir compte des faits suivants :

Si $\beta : A \to B$ et $\beta' : A \to B'$ sont des extensions injectives, si β' est plate à gauche, alors la suite exacte de A-modules à droite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\beta} B$$

donne lieu à la suite exacte de B'-modules à droite

$$0 \longrightarrow A \otimes_A B' \simeq B' \xrightarrow{j'} B \otimes_A B' \quad .$$

Donc $\gamma = j' \circ \beta'$ est injective.

Si chaque extension $\beta : A \to B$ est injective, alors la limite directe $\varinjlim \beta = \alpha_S$ est aussi injective.

On remarque que, d'après la propriété universelle de (A^S , α^S) et de (A_S , α_S) , il existe une extension $\gamma : A_S \to A^S$, unique homomorphisme tel que $\gamma \circ \alpha_S = \alpha^S$.

(i) Si la partie multiplicative S est contenue dans le centre de A , si $\beta : A \to B$ est une extension satisfaisant les conditions (2), (3), du théorème 6,

alors $\beta(S)$ est contenue dans le centre de B .

Démonstration. - Soient $b \in B$, $s \in S$; on montrera que $\beta(s).b = b.\beta(s)$. Par hypothèse, il existe $a_1 \in A$ et $s_1 \in S$, s_1 non diviseur de zéro à gauche de A , tels que $\beta(s_1).b = \beta(a_1)$. Alors

$$\beta(s_1).\beta(s).b = \beta(s_1\, s).b = \beta(s).\beta(s_1).b = \beta(s).\beta(a_1)$$
$$= \beta(a_1\, s) = \beta(a_1).\beta(s) = \beta(s_1).b.\beta(s) .$$

Donc

$$\beta(s_1).[\beta(s).b - b.\beta(s)] = 0 .$$

Puisque β est plate à gauche, alors $\beta(s_1)$ n'est pas diviseur de zéro à gauche de B , donc $\beta(s).b = b.\beta(s)$.

De même, on a le résultat ci-après.

(j) Si A est un anneau commutatif, si $\beta : A \to B$ est une extension satisfaisant les propriétés (2), (3), du théorème 6, alors B est un anneau commutatif.

Démonstration. - Soient b , $b' \in B$. Par hypothèse, il existe des éléments a , $a' \in A$ et s , $s' \in S$, ceux-ci non diviseurs de zéro à gauche de A , et tels que $\beta(s).b = \beta(a)$, $\beta(s').b' = \beta(a')$. Alors

$$\beta(s).b.\beta(s').b' = \beta(a).\beta(a') .$$

D'après le résultat précédent, $b.\beta(s') = \beta(s').b$, donc $\beta(ss').b.b' = \beta(aa')$. De même, $\beta(s's).b'.b = \beta(a'a)$. Or, A est commutatif, donc

$$\beta(ss')[bb' - b'b] = 0 .$$

Puisque β est plate à gauche, alors $\beta(ss')$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche de A , donc $bb' = b'b$. Ceci montre que B est commutatif.

En particulier, si A est commutatif, les anneaux A^S et A_S sont commutatifs. D'après la propriété universelle de l'anneau A^* , construit par LAZARD, pour chaque partie multiplicative S de A , il existe un homomorphisme unique $\alpha_S^* : A_S \to A^*$ tel que $\alpha_S^* \circ \alpha_S = \pi$.

Si S est une partie multiplicative de A , contenue dans le centre de A , les conditions du théorème 2 sont satisfaites, et il existe l'anneau de fractions de A par S (à droite et à gauche) ; à un isomorphisme près, il est l'anneau inverseur $S^{-1}A$.

Si S ne contient aucun diviseur de zéro de A , alors l'application canonique $\varphi : A \to S^{-1}A$ est injective.

THÉORÈME 8. - Si S est une partie multiplicative, contenue dans le centre de A, et sans diviseurs de zéro, alors il existe un isomorphisme canonique

$$\sigma : S^{-1}A \to A_S \qquad \text{tel que} \quad \sigma \circ \varphi = \alpha_S \ .$$

Démonstration. - $\varphi : A \to S^{-1}A$ est une extension d'anneaux, car tout élément de $S^{-1}A$ est de la forme $a/s = a/1.1/s = 1/s.a/1$ (où $a \in A$, $s \in S$), et, pour tout $s \in S$, on a $1/s \in Z_A(S^{-1}A)$.

Comme il est connu, φ est un épimorphisme plat ; il est injectif, car S ne contient aucun diviseur de zéro de A. Enfin, si $b \in S^{-1}A$, alors

$$b = a/s = 1/s.a/1 \ ,$$

donc

$$\varphi(s).b = s/1.1/s.a/1 = a/1 = \varphi(a) \ .$$

D'après la propriété universelle, il existe une extension $\sigma : S^{-1}A \to A_S$, unique parmi les homomorphismes tels que $\sigma \circ \varphi = \alpha_S$. Si $\sigma(a/s) = 0$, alors $0 = \sigma(s/1).\sigma(a/s) = \sigma(a/1) = \sigma \circ \varphi(a) = \alpha_S(a)$. Puisque α_S est injectif, alors $a = 0$, donc $a/s = 0$. Ceci montre que σ est injectif.

D'autre part, si $b \in A_S$, soient $a \in A$ et $s \in S$, tels que $\alpha_S(s).b = \alpha_S(a)$. De même,

$$\alpha_S(s).\sigma(a/s) = \sigma(\varphi(s)).\sigma(a/s) = \sigma(\varphi(s).a/s) = \sigma(s/1.a/s) = \sigma(a/1) = \sigma(\varphi(a)) = \alpha_S(a) \ .$$

Ainsi $\alpha_S(s)[b - \sigma(a/s)] = 0$. Puisque α_S est plate à gauche, alors $\alpha_S(s)$ n'est pas diviseur de zéro à gauche de A_S, donc $b = \sigma(a/s)$. On conclut que σ est un isomorphisme.

Plus généralement :

(k) Soit S une partie multiplicative contenue dans le centre de A. Alors il existe un homomorphisme surjectif $\rho : S^{-1}A \to A^S$, unique, tel que $\rho \circ \varphi = \alpha^S$.

Démonstration. - Au cours de la démonstration précédente, on a vu que φ est une extension et un épimorphisme plat à gauche. D'après le théorème 6, il existe une extension $\rho : S^{-1}A \to A^S$, qui est l'unique homomorphisme satisfaisant $\rho \circ \varphi = \alpha^S$. Il reste à montrer que ρ est surjectif.

Si $b \in A^S$, soient $a \in A$ et $s \in S$, s non diviseur de zéro à gauche de A, tels que $\alpha^S(s).b = \alpha^S(a)$. Alors $\rho(\varphi(s)).b = \rho(\varphi(a))$. Or $\varphi(a) = \varphi(s).a/s$, donc $\rho(\varphi(s)).b = \rho(\varphi(a)) = \rho(\varphi(s)).\rho(a/s)$. Puisque $\varphi(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$, alors $\rho(\varphi(s))$ est inversible dans A^S, donc $b = \rho(a/s)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.). - On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, J. of Algebra, t. 11, 1969, p. 532-563.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, Chapitres 1-2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[3] FINDLAY (G. D.). - Flat epimorphic extensions of rings, Math. Z., t. 118, 1970, p. 281-289.

[4] LAZARD (D.). - Epimorphismes plats d'anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 314-316.

(Texte reçu le 13 juillet 1971)

Paulo RIBENBOIM
Department of Mathematics
Queen's University
KINGSTON, Ont. (Canada)