Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Claude Anscombre

Un problème de dualisation dans les algèbres abstraites et les endomorphismes décomposants

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 14, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 14, 18 p.

17 mai 1971

UN PROBLÈME DE DUALISATION DANS LES ALGÈBRES ABSTRAITES ET LES ENDOMORPHISMES DÉCOMPOSANTS

par Jean-Claude ANSCOMBRE

1. Notions sommaires sur les algèbres abstraites.

1.1. Généralités.

Une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$ est un couple noté $(A, \mathfrak{F})$, où A, support de $\mathfrak{A}$, est un ensemble non vide, et $\mathfrak{F}$ une famille d'opérations, définie de la façon suivante : on considère, pour tout entier $n \geqslant 0$, une famille $\mathfrak{F}_n$, éventuellement vide, d'applications du produit cartésien A^n dans A. Chaque f de $\mathfrak{F}_n$ sera appelée opération à n variables, une opération à 0 variable consistant à désigner un élément a de A. On pose alors

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{n \in N} \mathfrak{F}_n \quad .$$

Une sous-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ est un couple $(B, \mathfrak{F})$ tel que B est une partie non vide de A, stable pour chacune des opérations f de $\mathfrak{F}$. On montre que la famille des sous-algèbres de $\mathfrak{A}$ forme une famille de Moore. Une congruence $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$ est une équivalence de A telle que, pour toute opération f de $\mathfrak{F}$ à n variables, et pour tout système $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de A, l'hypothèse

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n, \qquad x_i \equiv y_i \quad (\mathcal{C}) \quad ,$$

entraîne

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\mathcal{C}) \quad .$$

Soient deux algèbres abstraites $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{A}' = (A', \mathfrak{F}')$; s'il existe une bijection entre les deux familles d'opérations $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$, conservant le nombre des variables des opérations, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ seront dites de même type, et on ne distinguera pas en général $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}'$. Les classes d'algèbres, dont il sera question dans ce qui suit, sont des classes d'algèbres de même type.

Si $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{A}' = (A', \mathfrak{F}')$ sont deux algèbres abstraites de même type, une application η de A dans A' sera un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, si, pour toute f de $\mathfrak{F}$ à n variables, et pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de A^n, on a

$$\eta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\eta x_1, \eta x_2, \ldots, \eta x_n) \quad .$$

Un endomorphisme de $\mathfrak{A}$ sera un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$. Nous désignerons par $H(\mathfrak{A})$ le semi-groupe des endomorphismes de $\mathfrak{A}$. Si η est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, l'image S_η de $\mathfrak{A}$ par η sera définie par

$$S_\eta = \{y \in \mathfrak{A}' \; ; \; (\exists\, x \in \mathfrak{A}) \;\; y = \eta x\} \;\; ;$$

S_η est une sous-algèbre de $\mathfrak{A}'$. A l'image S_η de η , on fait correspondre dualement sa congruence nucléaire π_η , définie par

$$(x \equiv y \;\; (\pi_\eta)) \;\; \Longleftrightarrow \;\; (\eta x = \eta y) \;\; .$$

1.2. Rappels sur quelques types d'endomorphismes d'une algèbre abstraite.

Nous désignerons respectivement par Σ et Θ , l'ensemble des endomorphismes surjectifs et l'ensemble des endomorphismes injectifs. $A = \Sigma \cap \Theta$ sera le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}$. Nous appellerons endomorphisme extensif, tout endomorphisme de $\mathfrak{A}$ vérifiant l'égalité $S_\eta = S_{\eta^2}$.

Nous désignerons par Σ' , l'ensemble des endomorphismes extensifs. On montre que l'on a

$$(\eta \in \Sigma') \;\; \Longleftrightarrow \;\; (\pi_\eta(S_\eta) = \mathfrak{A}) \;\; .$$

Dualement, nous appellerons rétractif, tout endomorphisme η de $\mathfrak{A}$ vérifiant l'égalité $\pi_\eta = \pi_{\eta^2}$, et nous désignerons par Θ' l'ensemble des endomorphismes rétractifs de $\mathfrak{A}$. On montre que

$$(\eta \in \Theta') \;\; \Longleftrightarrow \;\; (\pi_\eta | S_\eta = \mathcal{E} | S_\eta) \;\; .$$

Nous dirons que η est un endomorphisme vectoriel à droite, s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ telle que l'on ait

$$\pi_\eta(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \; , \qquad \pi_\eta | \mathfrak{B} = \mathcal{E} | \mathfrak{B} \;\; .$$

Si l'on désigne par Ψ' l'ensemble des endomorphismes vectoriels à droite, on démontre que

$$(\eta \in \Psi') \;\; \Longleftrightarrow \;\; ((\exists\, \omega \in \Omega) \;\; \pi_\eta = \pi_\omega) \;\; ,$$

où Ω est l'ensemble des idempotents de $H(\mathfrak{A})$. De façon duale, nous dirons que η est un endomorphisme vectoriel à gauche, s'il existe une congruence $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$ telle que l'on ait

$$\mathcal{C}(S_\eta) = \mathfrak{A} \; , \qquad \mathcal{C} | S_\eta = \mathcal{E} | S_\eta \;\; .$$

Si Ψ'' est l'ensemble des endomorphismes vectoriels à gauche, on montre que

$$(\eta \in \Psi'') \;\; \Longleftrightarrow \;\; ((\exists\, \omega \in \Omega) \;\; S_\eta = S_\omega) \;\; .$$

Nous appellerons endomorphisme rationnel à droite, tout endomorphisme η de $\mathfrak{A}$ tel que

$$(\forall\ \lambda \in H(\mathfrak{A})) \qquad [(S_\lambda \subseteq S_\eta) \implies ((\exists\ \nu \in H(\mathfrak{A}))\ \ \lambda = \eta\nu)]\ .$$

L'ensemble des endomorphismes rationnels à droite sera noté Φ' . Dualement, nous appellerons endomorphisme rationnel à gauche, tout endomorphisme η de $\mathfrak{A}$ tel que

$$(\forall\ \lambda \in H(\mathfrak{A})) \qquad [(\pi_\lambda \supseteq \pi_\eta) \implies ((\exists\ \mu \in H(\mathfrak{A}))\ \ \lambda = \mu\eta)]\ ,$$

et nous noterons Φ'' l'ensemble des endomorphismes rationnels à gauche. Nous n'insisterons pas sur les propriétés des endomorphismes ci-dessus définis. On pourra se reporter à [12], [13], [14].

2. Endomorphismes décomposants et endomorphismes co-décomposants.

2.1. Introduction.

La notion d'endomorphismes décomposants a été introduite et étudiée par R. BAER à propos d'une structure algébrique particulière : les boucles munies d'un ensemble M d'opérateurs (à gauche ou à droite), distributifs par rapport à la loi de composition de la boucle, et que BAER appelle M-boucles (M-loops). Cette notion d'endomorphisme décomposant avait déjà été définie et étudiée par H. FITTING et V. KOŘINEK lors de recherches sur la décomposition en produit direct de groupes à opérateurs. BAER est cependant le premier à avoir fait une étude systématique de tels endomorphismes, et à avoir fourni des conditions nécessaires et suffisantes d'existence. Pour plus amples détails, on pourra se référer à [1], [2].

La structure de M-boucle étant une structure relativement pauvre (en particulier, l'associativité ne figure pas au nombre des axiomes), on ne s'étonnera pas que la notion d'endomorphisme décomposant puisse être généralisée sans difficulté particulière aux algèbres abstraites, donc entre autres aux groupes à opérateurs (pour cette notion, se reporter à [12] et [18]). Par dualité, nous définirons la notion d'endomorphisme co-décomposant d'une algèbre abstraite, et nous verrons que cette dualisation s'opère sans difficulté, ce qui est rarement le cas. Nous situerons ensuite endomorphismes décomposants et endomorphismes co-décomposants dans l'ensemble des endomorphismes d'une algèbre abstraite, et nous verrons à ce propos quelques propriétés remarquables qui situent les endomorphismes décomposants (resp. co-décomposants) à mi-chemin entre endomorphismes extensifs (resp. rétractifs) et endomorphismes vectoriels à droite (resp. vectoriels à gauche). Pour terminer, nous nous attacherons à l'étude d'un cas particulier important, celui des groupes à multi-opérateurs : nous pourrons alors définir la notion de co-radical, notion duale de celle de radical (au sens de la théorie des anneaux), et nous verrons apparaître des difficultés lors de la caractérisation de ce co-radical, difficultés dues aux limitations inhérentes à la dualisation.

Nous signalons enfin que notre propos n'a pas été de réaliser une étude exhaustive des endomorphismes décomposants, mais d'étudier les possibilités, ou les impossibilités, de dualisation de certaines propriétés des endomorphismes d'une algèbre abstraite. Dans ce qui suit, on ne trouvera la démonstration que de quelques propriétés essentielles, ce afin de ne pas alourdir l'exposé.

2.2. Endomorphismes décomposants.

Soient donc $\mathfrak{A}$ une algèbre abstraite, $H(\mathfrak{A})$ le demi-groupe de ses endomorphismes. A chaque endomorphisme η de $\mathfrak{A}$ sont associées, la suite croissante

$$(\underset{\sim}{N}_\eta) \qquad \mathcal{E} \subseteq \pi_\eta \subseteq \pi_{\eta^2} \subseteq \ldots \subseteq \pi_{\eta^k} \subseteq \ldots$$

des congruences nucléaires des puissances successives de η, et la suite décroissante

$$(\underset{\sim}{S}_\eta) \qquad \mathfrak{A} \supseteq S_\eta \supseteq S_{\eta^2} \supseteq \ldots \supseteq S_{\eta^k} \supseteq \ldots$$

des images des puissances successives de η. On sait le rôle que jouent ces deux suites, en particulier dans la détermination des sous-groupes du demi-groupe des endomorphismes de $\mathfrak{A}$ (à ce propos, cf. [12], [13], [14]). Envisageons plus particulièrement la suite $(\underset{\sim}{N}_\eta)$; il est tout-à-fait naturel d'introduire la relation binaire suivante :

$$\mathcal{R}_\eta = \sup_{k \in N^*} \pi_{\eta^k} .$$

On démontre que $\mathcal{R}_\eta$ est une congruence de l'algèbre $\mathfrak{A}$, appelée congruence radicale de l'endomorphisme η, et qu'elle est de plus η-régulière et η-simplifiable.

DÉFINITION 2.2.1. - Nous dirons qu'un endomorphisme η d'une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$ est décomposant, et que $B \subseteq A$ est un complément de η, si :

(i) $\mathfrak{B} = (B , \mathfrak{F})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{A} = (A , \mathfrak{F})$;
(ii) $\mathcal{R}_\eta(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$, $\mathcal{R}_\eta | \mathfrak{B} = \mathcal{E} | \mathfrak{B}$;
(iii) $\eta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$.

On remarquera que cette définition présente certaines similitudes avec celle des endomorphismes vectoriels à droite.

Il existe des endomorphismes décomposants : tout endomorphisme idempotent est décomposant, tout automorphisme est décomposant. Notons que le complément d'un endomorphisme décomposant n'est pas nécessairement unique. Nous allons maintenant voir deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit décomposant.

THÉORÈME 2.2.1. - *Pour qu'un endomorphisme* η *soit décomposant, il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme idempotent* ω *tel que* :

(i) $\pi_\omega = \mathcal{R}_\eta$;
(ii) $S_\omega \subseteq S_\eta$;
(iii) $\omega\eta = \eta\omega$.

De plus, si η *est un endomorphisme décomposant de* $\mathfrak{A}$, *on a*

$$S_\omega \subseteq \bigcap_{k \in N^*} S_{\eta^k} \quad .$$

Ce théorème se démontre sans difficulté à partir de la définition d'un endomorphisme décomposant.

THÉORÈME 2.2.2. - η *est un endomorphisme décomposant pour l'algèbre abstraite* $\mathfrak{A}$, *si, et seulement si, il existe un endomorphisme* ξ *de* $\mathfrak{A}$ *et un endomorphisme idempotent* ω *tels que* :

(i) $\eta\xi = \xi\eta = \omega$;
(ii) $\xi\omega = \omega\xi = \xi$;
(iii) $\mathfrak{A} = \mathcal{R}_\eta(S_\xi)$.

(a) Supposons tout d'abord que η soit décomposant pour $\mathfrak{A}$, et soit $\mathfrak{B}$ un complément de η . Nous avons vu qu'il existe alors un idempotent ω tel que

$$\pi_\omega = \mathcal{R}_\eta \ , \qquad S_\omega = \mathfrak{B} \ , \qquad S_\omega \subseteq \bigcap_{k \in N^*} S_{\eta^k} \ , \qquad \eta\omega = \omega\eta \quad .$$

Soient alors ι l'injection canonique de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$, μ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta$. On démontre facilement que η induit un automorphisme $\eta^* = \eta\iota$ dans son complément $\mathfrak{B}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B} \arrow[r, "\iota"] \arrow[ddr, shift left, "\eta^*"'] & \mathfrak{A} \arrow[dd, "\eta"] \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "\omega"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \\
 & \mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta \arrow[uu, "j"] & \mathfrak{A} \arrow[uul, dashed, shift left, "\eta^{*-1}"']
\end{tikzcd}$$

Considérons alors l'application $\xi = (\eta^{*-1}\ \omega)$. Par construction, c'est un endomorphisme de $\mathfrak{A}$. De plus, $S_\xi = \eta^{*-1}\ \omega\mathfrak{A} = \eta^{*-1}\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Puisque η^* et η^{*-1} sont des automorphismes de $\mathfrak{B}$, on a

$$\mathcal{R}_\xi = \mathcal{R}_\omega = \mathcal{R}_\eta \quad .$$

Mais $\xi\mathfrak{B} = \eta^{*-1}\ \omega\mathfrak{B} = \eta^{*-1}\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, et donc $\mathfrak{B} \subseteq S_\xi$. Alors

$$\mathcal{R}_\eta(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{R}_\eta(S_\xi) = \mathcal{R}_\xi(S_\xi) \subseteq \mathfrak{A} \quad .$$

Comme $\mathcal{R}_\eta(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$, (iii) est vérifié. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \eta\xi &= \eta\eta^{*-1}\ \omega = \eta^*\ \eta^{*-1}\ \omega = \omega \quad , \\ \xi\eta &= \eta^{*-1}\ \omega\eta = \eta^{*-1}\ \eta\omega \qquad (\text{car} \quad \eta\omega = \omega\eta\ ) \quad , \\ &= \eta^{*-1}\ \eta^*\ \omega = \omega \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre (i). Par définition de ξ , $\xi\omega = \xi$. De plus, $\omega\xi = \omega\eta^{*-1}\ \omega$. Mais $\omega|\mathfrak{B} = \varepsilon|\mathfrak{B}$. D'où $\omega\xi = \xi$, ce qui démontre (ii).

(b) Supposons inversement qu'il existe un endomorphisme ξ de $\mathfrak{A}$ et un endomorphisme idempotent ω de $\mathfrak{A}$, tels que (i), (ii), (iii) soient vérifiés. Alors

$$\begin{aligned} (\xi\eta = \omega) \qquad &\text{implique} \qquad (S_\omega \subseteq S_\xi) \quad , \\ (\omega\xi = \xi) \qquad &\text{implique} \qquad (S_\xi \subseteq S_\omega) \quad . \end{aligned}$$

D'où $S_\xi = S_\omega$, et donc

(iv) $$\mathfrak{A} = \mathcal{R}_\omega(S_\omega) = \mathcal{R}_\eta(S_\xi) = \mathcal{R}_\eta(S_\omega) \quad .$$

Par ailleurs,

(v) $$\eta S_\omega = \eta S_\xi = \eta\xi\mathfrak{A} \ , \qquad \text{i. e.} \quad \eta S_\omega = S_\omega \quad .$$

Soient maintenant $x \in S_\omega$ et $y \in S_\omega$, tels que l'on ait

$$x \equiv y \quad (\mathcal{R}_\eta) \quad .$$

Par définition de $\mathcal{R}_\eta$,

$$(\exists\ k \in N^*) \qquad \eta^k\ x = \eta^k\ y \quad .$$

En utilisant les propriétés $\xi\eta = \omega$ et $\omega\xi = \xi\omega = \xi$, on en tire

(vi) $$x = y \ , \qquad \text{i. e.} \quad \mathcal{R}_\eta|S_\omega = \mathcal{E}|S_\omega \quad .$$

(iv), (v), (vi) entraînent que η est décomposant pour $\mathfrak{A}$, et de complément S_ω .

Nous allons maintenant voir une propriété intéressante des endomorphismes décomposants qui leur confère une certaine analogie avec les endomorphismes vectoriels à droite.

THÉORÈME 2.2.3. - Soit η un endomorphisme décomposant de l'algèbre abstraite $\mathfrak{A}$, et soit η' un endomorphisme de $\mathfrak{A}$ tel que $S_{\eta'} \subseteq S_\eta$. Il existe alors un endomorphisme λ de $\mathfrak{A}$ et un endomorphisme idempotent ω de $\mathfrak{A}$ tels que $\eta\lambda = \omega\eta'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B} & \\
& \mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta \arrow[ul, "j"'] \\
\mathfrak{A} \arrow[uu, "\omega"] \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\eta"'] & \\
& \mathfrak{A}/\mathcal{N}_\eta \arrow[uu, "\nu"'] \arrow[dl, "i"] \\
S_\eta &
\end{tikzcd}$$

Soient :

$\mathfrak{B}$ un complément de η, ω l'endomorphisme idempotent attaché à ce complément ;

j l'isomorphisme de $\mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta$ sur $\mathfrak{B}$, défini par $j\mathcal{R}_\eta(x) = \mathcal{R}_\eta(x) \cap \mathfrak{B}$;

μ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta$;

λ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\eta$;

ν l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\eta$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{R}_\eta$;

i l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\eta$ sur S_η.

Considérons alors l'homomorphisme ψ de S_η sur $\mathfrak{B}$, défini par $\psi = j\nu i^{-1}$. Posons $\eta^* = \eta|\mathfrak{B}$, et soit x, élément quelconque de $\mathfrak{A}$. $\eta' x \in S_\eta$, car, par hypothèse, $S_{\eta'} \subseteq S_\eta$. Il existe donc un élément y de $\mathfrak{A}$ tel que l'on ait $\eta' x = \eta y$. Alors

$$\begin{aligned}
\eta\psi\eta' x = \eta^* \psi\eta' x &= \eta^* \psi\eta y \\
&= \eta^* j\nu i^{-1} \eta y \\
&= \eta^* j\nu\mathcal{N}_\eta(y) \\
&= \eta^* j\mathcal{R}_\eta(y) \\
&= \eta^* \omega y \\
&= \eta\omega y = \omega\eta y \\
&= \omega\eta' x \quad .
\end{aligned}$$

Donc, pour tout élément x de $\mathfrak{A}$, on a $\eta(\psi\eta')x = \omega\eta' x$, i. e. $\eta(\psi\eta') = \omega\eta'$. De plus, $\lambda = \psi\eta'$ est par construction un endomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, ce qui achève la démonstration.

2.3. Endomorphismes co-décomposants.

Etant donnée une algèbre abstraite $\mathfrak{A} = (A , \mathfrak{F})$, à toute image endomorphe S_η de $\mathfrak{A}$, on fait correspondre dualement la congruence nucléaire $\mathfrak{N}_\eta$ de η ; à une partie de A , nous ferons correspondre dans cette dualité une équivalence $\mathcal{R}$ de A , et à une sous-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$, une congruence de $\mathfrak{A}$. Dans cette dualité, l'homologue de la suite croissante $(\underline{\mathbb{N}}_\eta)$ sera la suite décroissante $(\underline{\mathbb{S}}_\eta)$, et l'homologue de la notion de congruence radicale $\mathcal{R}_\eta$ sera la notion d'<u>image radicale</u> de l'endomorphisme η , que nous noterons $\mathbb{S}_\eta$, et qui est définie par

$$\mathbb{S}_\eta = \bigcap_{k\in N^*} S_{\eta^k} = \inf_{k\in N^*} S_{\eta^k} \quad .$$

Il est clair que $\eta\mathbb{S}_\eta \subseteq \mathbb{S}_\eta$.

Pour pouvoir dualiser la notion d'endomorphisme décomposant, il nous faut trouver la propriété duale de la propriété : " $\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{A}$ telle que $\eta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ ". Nous chercherons tout d'abord la notion duale de $\eta\mathfrak{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\eta^*"'] & & \mathfrak{A} \arrow[dl, "\eta"] \\ & \mathfrak{A} & \end{tikzcd} \qquad \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{A}/\mathcal{E} \arrow[rr, "\pi"] & & \mathfrak{A}/\mathcal{C} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\eta"] \arrow[ur, "\eta^*"'] & \end{tikzcd}$$

Soit i l'endomorphisme canonique de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$. C'est une injection à laquelle nous faisons correspondre dualement la surjection π de $\mathfrak{A}/\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une congruence de $\mathfrak{A}$. A un isomorphisme près, η est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}/\mathcal{E}$. A l'image de ηi , correspond par dualité la congruence nucléaire de $\pi\eta$. La notion duale de $\eta\mathfrak{B}$ est donc $\mathfrak{N}_{\pi\eta}$, avec $\mathfrak{N}_\pi = \mathcal{C}$. La propriété duale de la propriété énoncée est donc : "Il existe une congruence $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$ telle que, si π est l'homomorphisme surjectif canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$, $\mathfrak{N}_{\pi\eta} = \mathfrak{N}_\pi$ ". On constate immédiatement que $\mathfrak{N}_{\pi\eta} = \mathfrak{N}_\pi$ est équivalent à $\mathcal{C}$ est η-régulière et η-simplifiable.

DÉFINITION 2.3.1. - <u>Soient</u> $\mathfrak{A} = (A , \mathfrak{F})$ <u>une algèbre abstraite,</u> $H(\mathfrak{A})$ <u>le semi-groupe des endomorphismes.</u> η <u>est dit co-décomposant pour l'algèbre abstraite</u> $\mathfrak{A}$, <u>si on peut trouver une congruence</u> $\mathcal{C}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>telle que</u> :

(i) $\mathcal{C}(\mathbb{S}_\eta) = \mathfrak{A}$, $\mathcal{C}|\mathbb{S}_\eta = \mathcal{E}|\mathbb{S}_\eta$;

(ii) $\mathcal{C}$ <u>est</u> η-<u>régulière et</u> η-<u>simplifiable</u>.

Remarquons qu'il existe des endomorphismes co-décomposants : tout endomorphisme idempotent de $\mathfrak{A}$, tout automorphisme de $\mathfrak{A}$, sont co-décomposants.

THÉORÈME 2.3.1. - *Pour qu'un endomorphisme* η *d'une algèbre abstraite* $\mathfrak{A}$ *soit co-décomposant, il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme idempotent* ω *de* $\mathfrak{A}$ *tel que :*

(i) $\mathbb{S}_\eta = S_\omega$;

(ii) $\mathcal{N}_\eta \subseteq \mathcal{N}_\omega$;

(iii) $\omega\eta = \eta\omega$.

De plus, si η *est co-décomposant, pour tout tel idempotent* ω , *on a* $\mathcal{R}_\eta \subseteq \mathcal{N}_\omega$.

Ce théorème se déduit aisément de la définition d'un endomorphisme co-décomposant. Comme dans le cas des endomorphismes décomposants, on peut trouver une troisième série de conditions équivalentes aux deux précédentes.

THÉORÈME 2.3.2. - *Pour qu'un endomorphisme* η *d'une algèbre abstraite* $\mathfrak{A}$ *soit co-décomposant, il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme* ξ *de* $\mathfrak{A}$, *et un endomorphisme idempotent* ω *de* $\mathfrak{A}$, *tels que :*

(i) $\eta\xi = \xi\eta = \omega$;

(ii) $\omega\xi = \xi\omega = \xi$;

(iii) $\mathcal{N}_\xi | \mathbb{S}_\eta = \mathcal{E} | \mathbb{S}_\eta$.

(a) Supposons tout d'abord que η soit co-décomposant pour l'algèbre abstraite $\mathfrak{A}$, et soit $\mathcal{C}$ un co-complément de η . Nous avons vu qu'il existe alors un endomorphisme idempotent ω tel que

$$S_\omega = \mathbb{S}_\eta , \qquad \mathcal{N}_\eta \subseteq \mathcal{N}_\omega , \qquad \omega\eta = \eta\omega .$$

On peut alors montrer que η induit dans $\mathbb{S}_\eta$ un automorphisme défini par $\eta^* = \eta i$, où i est l'injection canonique de $\mathbb{S}_\eta$ dans $\mathfrak{A}$. Considérons alors l'application $\xi = \eta^{*-1}\,\omega$. Par construction, c'est un endomorphisme de $\mathfrak{A}$, dont l'image est $S_\xi = \mathbb{S}_\eta$. De plus, $\xi\mathbb{S}_\eta = \eta^{*-1}\,\omega\mathbb{S}_\eta = \mathbb{S}_\eta$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{S}_\eta \arrow[rr, "i"] \arrow[ddrr, "\eta^*"'] & & \mathfrak{A} \arrow[dd, "\eta"] \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "\omega"] \arrow[dr, "\mu"'] & & & \\
& \mathfrak{A}/\mathcal{C} \arrow[uu, "j"] & & \mathfrak{A} \arrow[uull, dashed, "\eta^{*-1}"']
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs,

$$\xi\eta = \eta^{*-1}\ \omega\eta \ ,$$
$$= \eta^{*-1}\ \eta\omega \qquad (\text{car } \ \eta\omega = \omega\eta\ ) \ ,$$
$$\xi\eta = \omega \ ,$$
$$\eta\xi = \eta\eta^{*-1}\ \omega = \omega \ .$$

D'où

(iv) $$\eta\xi = \xi\eta = \omega \ .$$

Par définition de ξ , $\xi\omega = \xi$. Pour tout élément x de $\mathfrak{A}$, on a $\omega\xi x = \mathcal{C}(\xi x) \cap \mathbb{S}_\eta$. Mais $\mathbb{S}_\eta = S_\xi$, d'où $\xi x \in \mathbb{S}_\eta$, et, d'autre part, $\xi x \in \mathcal{C}(\xi x)$. D'où $\omega\xi x = \xi x$, et $\omega\xi = \xi$. On a par conséquent

(v) $$\omega\xi = \xi\omega = \omega \ .$$

Les relations (iv) et (v) impliquent, entre autres, que $\pi_\xi = \pi_\omega$; comme par ailleurs $\mathbb{S}_\eta = S_\omega$, on a

(vi) $$\pi_\xi|\mathbb{S}_\eta = \mathcal{E}|\mathbb{S}_\eta \ .$$

(iv), (v), (vi) montrent que la condition est <u>nécessaire</u>.

(b) Supposons inversement que η soit un endomorphisme quelconque de $\mathfrak{A}$, vérifiant (i), (ii), (iii), et posons $\mathcal{C} = \pi_\omega$. D'après (i), $\pi_\xi \subseteq \pi_\omega$. D'après (ii), $\pi_\omega \subseteq \pi_\xi$. D'où $\mathcal{C} = \pi_\xi = \pi_\omega$, et, par conséquent,

(vii) $$\mathcal{C}|\mathbb{S}_\eta = \mathcal{E}|\mathbb{S}_\eta \ .$$

Toujours d'après (i),

$$\eta\xi = \omega \ ,$$
$$\eta^2\ \xi^2 = \eta\omega\xi = \eta\xi = \omega \ ,$$
$$\cdots$$

et, par récurrence,

$$\eta^k\ \xi^k = \omega \ , \qquad \text{pour tout } \ k \in N^* \ .$$

On en déduit immédiatement $S_\omega \subseteq \mathbb{S}_\eta$, d'où

(viii) $$\mathcal{C}(\mathbb{S}_\eta) = \mathfrak{A} \ .$$

Soient maintenant x et y des éléments de $\mathfrak{A}$, tels que l'on ait $x \equiv y \ (\mathcal{C})$. Par définition de $\mathcal{C}$, c'est équivalent à

$$\xi x = \xi y \ .$$

D'où

$$\eta\xi x = \eta\xi y \ ,$$
$$\xi\eta x = \xi\eta y \qquad (\text{en utilisant (i)}) \ ,$$

i. e. $\eta x \equiv \eta y \quad (\mathfrak{N}_\xi)$, et finalement $\eta x \equiv \eta y \quad (\mathcal{C})$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est η-régulière. On démontrerait de façon analogue que $\mathcal{C}$ est aussi η-simplifiable. Donc

(ix) $\qquad\qquad$ $\mathcal{C}$ est η-régulière et η-simplifiable .

(vii), (viii), (ix) entraînent que η est co-décomposant pour l'algèbre $\mathfrak{A}$.

THÉORÈME 2.3.3. - Soit η un endomorphisme co-décomposant d'une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$, et soit η' un endomorphisme de $\mathfrak{A}$, tel que $\mathfrak{N}_\eta \subseteq \mathfrak{N}_{\eta'}$. Il existe alors un endomorphisme λ de $\mathfrak{A}$, et un endomorphisme idempotent ω de $\mathfrak{A}$, tels que $\lambda\eta = \eta'\omega$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & S_\eta \arrow[dd, "\sigma"] & \\
 & \mathfrak{A}/\mathcal{C} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{S}_\eta \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\sigma^*"] & & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\eta"'] \arrow[dl, "\mu"] \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[urr, "\omega"'] \arrow[rrr, "\gamma'"'] \arrow[dr, "\eta'"'] & & & \mathfrak{A}/\mathfrak{N}_\eta \arrow[d, "\lambda"] & \\
 & S_{\eta'} & & \mathfrak{A}/\mathfrak{N}_{\eta'} \arrow[ll, "\mu'"] &
\end{tikzcd}$$

Soient :

γ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est un co-complément de η ;
φ l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$ sur $\mathbb{S}_\eta$;
σ l'isomorphisme canonique de S_η sur $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}_\eta$;
μ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}_\eta$;
i l'injection canonique de $\mathbb{S}_\eta$ dans S_η ;
λ l'homomorphisme surjectif de $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}_\eta$ sur $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}_\eta$, défini par

$$(\forall\ x \in \mathfrak{A}) \qquad \lambda\mathfrak{N}_\eta(x) = \mathfrak{N}_{\eta'}(x) \quad ;$$

μ' l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}_{\eta'}$ sur $S_{\eta'}$.

Considérons $\sigma^* = \sigma i$; σ^* est la restriction de σ à $\mathbb{S}_\eta$. Posons

$$\gamma' = \sigma^* \varphi\gamma \ , \qquad \xi = \mu'\lambda\gamma' \quad ;$$

ξ est un homomorphisme comme produit d'homomorphismes, et c'est une application de $\mathfrak{A}$ dans $S_{\eta'}$. De plus :

$$(\forall\ x \in \mathfrak{A}) \qquad \begin{aligned} \gamma' x &= \sigma^* \varphi\gamma(x) = \sigma^* \varphi\mathcal{C}(x) \ , \\ &= \sigma^*(\mathcal{C}(x) \cap \mathbb{S}_\eta) \ , \\ \gamma' x &= \sigma^* \omega x \ . \end{aligned}$$

D'où l'on déduit $\gamma' = \sigma^* \omega$. Alors

$$(\forall\ x \in \mathfrak{X}) \qquad \begin{aligned} \xi\eta x &= \mu'\lambda\gamma'\eta x \\ &= \mu'\lambda\sigma^*\ \omega\eta x \\ &= \mu'\lambda\sigma^*\ \eta\omega x \qquad (\text{car}\quad \eta\omega = \omega\eta\ ) \\ &= \mu'\lambda\pi_\eta(\omega x) \\ &= \mu'\pi_{\eta'}(\omega x) \\ &= \eta'\omega x \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent, $\xi\eta = \eta'\omega$.

On remarquera l'analogie avec une des propriétés fondamentales des endomorphismes vectoriels à gauche.

2.4. Propriétés générales.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par B' et B'' respectivement, l'ensemble des endomorphismes décomposants et l'ensemble des endomorphismes co-décomposants. Nous ne citons ici que quelques propriétés, choisies parmi les plus intéressantes.

(i) B' et B'' sont des parties semi-stables.

(ii) $B' \cap B''$ est une partie fuselée.

(iii) $B' \cap \Theta' = \Sigma' \cap B'' = \Theta' \cap \Sigma'$.

(iv) $\Sigma \cap B'' = B' \cap \Theta = \Sigma \cap \Theta = A$.

(v) $B' \cap I'' = I' \cap B'' = I' \cap I'' = A$, où I' et I'' désignent respectivement l'ensemble des endomorphismes inversibles à droite, et l'ensemble des endomorphismes inversibles à gauche.

(vi) $B' \cap B'' = \rho(B' \cap B'') = \rho(B') \cap \rho(B'') = \rho(B') \cap B'' = B' \cap \rho(B'')$, où $\rho(P)$ désigne le radical de P , i. e. la plus petite partie semi-première contenant P .

3. Cas particulier des groupes à multi-opérateurs.

3.1. Généralités.

DÉFINITION 3.1.1. - Soit G un groupe additif, l'addition étant notée $+$, et soit A son ensemble sous-jacent ; nous désignerons par 0 l'élément neutre de G , bien que G ne soit pas nécessairement abélien. Donnons-nous dans G un système $\mathfrak{M}$ de multi-opérateurs tels que

$$(\forall\ \mu \in \mathfrak{M}) \qquad \mu(0\ ,\ 0\ ,\ \dots\ ,\ 0) = 0 \quad .$$

Nous appellerons groupe à multi-opérateurs, l'algèbre abstraite

$$\mathfrak{A} = (A\ ,\ \mathfrak{M} \cup \{+\})\quad .$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter à [18].

DÉFINITION 3.1.2. - Nous appellerons idéal d'un groupe à multi-opérateurs $\mathfrak{A}$, tout sous-ensemble M de A tel que :

(i) M est sous-groupe distingué de G ;

(ii) Pour tout μ de $\mathfrak{M}$, pour tout n-uplet $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ de A^n, pour tout m de M, et pour tout $i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$, on a

$$\mu(x_1,\dots,x_{i-1}\ ,\ m+x_i\ ,\ x_{i+1},\dots,x_n) - \mu(x_1,\dots,x_{i-1}\ ,\ x_i\ ,\ x_{i+1},\dots,x_n) \in M\quad .$$

DÉFINITION 3.1.3. - Nous appellerons noyau radical d'un endomorphisme η d'un groupe à multi-opérateurs $\mathfrak{A} = (A\ ,\ \mathfrak{M} \cup \{+\})$, l'idéal de $\mathfrak{A}$, défini par $\mathfrak{R}_\eta = \mathcal{R}_\eta(0)$.

La notion duale de noyau radical est, dans le cas particulier des groupes, l'image radicale $\mathbb{S}_\eta$ déjà vue précédemment.

DÉFINITION 3.1.4. - Nous dirons qu'un endomorphisme η d'un $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$ est un nil-endomorphisme, si l'on a $\mathfrak{R}_\eta = \mathfrak{A}$.

Dualement, nous aurons la définition ci-après.

DÉFINITION 3.1.5. - Un endomorphisme d'un $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$ sera appelé co-nil-endomorphisme, si l'on a $\mathbb{S}_\eta = \{0\}$.

3.2. Endomorphismes décomposants.

THÉORÈME 3.2.1. - Un endomorphisme η d'un $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$ est décomposant, si, et seulement si, il existe un sous-$\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ tel que :

(i) $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}_\eta + \mathfrak{B}\ ,\quad \mathfrak{R}_\eta \cap \mathfrak{B} = \{0\}$;

(ii) $\eta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$.

Ce théorème n'est qu'une simple transposition, au cas particulier des $\mathfrak{M}$-groupes, de la définition d'un endomorphisme décomposant d'une algèbre abstraite.

Pour obtenir des théorèmes plus précis concernant les endomorphismes décomposants d'un $\mathfrak{M}$-groupe, nous allons nous attacher à l'étude des endomorphismes décomposants dont l'image S_η est incluse dans un sous-$\mathfrak{M}$-groupe non trivial donné $\mathfrak{B}$. A cet effet, nous posons

$$H(\mathfrak{B}) = \{\eta \in H(\mathfrak{A})\ ;\quad S_\eta \subseteq \mathfrak{B}\}\quad .$$

Dans le cas particulier où l'on prend $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, on obtient alors des résultats valables pour le semi-groupe $H(\mathfrak{A})$ tout entier.

Dans tout ce qui suit, nous ferons l'hypothèse suivante :

(h_1) *La somme de deux endomorphismes quelconques de* $H(\mathfrak{B})$ *est un endomorphisme de* $H(\mathfrak{A})$.

Il est facile de voir que cette somme est alors un endomorphisme de $H(\mathfrak{B})$, ce qui confère à $H(\mathfrak{B})$ une structure d'anneau. (h_1) est une hypothèse restrictive, mais nous signalons que, dans de nombreux cas, elle peut être remplacée par une hypothèse plus faible portant sur les idempotents de $H(\mathfrak{B})$.

THÉORÈME 3.2.2. - *Un endomorphisme* η *de* $H(\mathfrak{B})$ *est décomposant pour le* $\mathfrak{M}$-*groupe* $\mathfrak{A}$, *si, et seulement si, il existe un endomorphisme* ξ *de* $H(\mathfrak{B})$, *et un endomorphisme idempotent* ω *de* $H(\mathfrak{B})$, *tels que* :

(i) $\eta\xi = \xi\eta = \omega$;

(ii) $\xi\omega = \omega\xi = \xi$;

(iii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}_{\eta-\omega\eta}$.

Nous n'insisterons pas sur la démonstration de ce théorème, qui n'offre pas de difficultés particulières. Remarquons que la condition (iii) est équivalente à " $(\eta - \omega\eta)$ est un nil-endomorphisme".

THÉORÈME 3.2.3. - *Si* η *est un endomorphisme de* $H(\mathfrak{B})$, *décomposant pour le* $\mathfrak{M}$-*groupe* $\mathfrak{A}$, *on a les propriétés suivantes* :

(i) $\bigcap_{n\in N^*} H(\mathfrak{B})(\eta - \omega\eta)^n = \{0\}$ (ω *idempotent attaché à* η) ;

(ii) $\Xi = \{\tau - \tau\omega \; ; \; \tau \in H(\mathfrak{B})\}$ *est idéal à gauche de* $H(\mathfrak{B})$;

(iii) $\bigcap_{i\in N^*} \Xi\eta^i = \{0\}$;

(iv) $H(\mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B})\omega + \Xi$, $H(\mathfrak{B})\omega \cap \Xi = \{0\}$.

La démonstration de ce théorème étant longue, nous l'éviterons, afin de ne pas alourdir l'exposé.

Faisons maintenant, outre (h_1), l'hypothèse suivante :

(h_2) $H(\mathfrak{B})$ *est décomposant pour* $\mathfrak{A}$ (*i. e. tout endomorphisme de* $H(\mathfrak{B})$ *est décomposant pour le* $\mathfrak{M}$-*groupe* $\mathfrak{A}$).

On a alors la caractérisation remarquable suivante d'un nil-endomorphisme :

THÉORÈME 3.2.4. - *Un endomorphisme* η *de* $H(\mathfrak{B})$ *est un nil-endomorphisme, si, et seulement si,*

$$\bigcap_{n\in N^*} H(\mathfrak{B})\eta^n = \{0\} \quad .$$

Considérons alors le radical $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ de l'anneau $H(\mathfrak{B})$, i. e. l'intersection des idéaux à droite maximaux (ou à gauche maximaux, c'est équivalent) de $H(\mathfrak{B})$. Dans le cadre des hypothèses (h_1) et (h_2), $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ se caractérise de la façon simple suivante :

THÉORÈME 3.2.5.

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{B}) = \{\eta \in H(\mathfrak{B}) \ ; \ \omega \in H(\mathfrak{B})\eta \implies \omega = 0\} \ ,$$
$$= \{\eta \in H(\mathfrak{B}) \ ; \ \xi \in H(\mathfrak{B})\eta \implies \mathcal{R}_\xi = \mathfrak{A}\} \ .$$

Le radical $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ intervient dans la recherche des endomorphismes de $H(\mathfrak{B})$ décomposants pour le $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$. En effet, si η est un endomorphisme de $H(\mathfrak{B})$ décomposant pour $\mathfrak{A}$, il existe un idempotent ω dans $H(\mathfrak{B})$ (cf. théorème 3.2.2). Par conséquent, il existe un idempotent ω tel que $S_\omega \subseteq \mathfrak{B}$. On peut donc s'attacher à trouver à quelles conditions, si possible nécessaires et suffisantes, il n'existe pas de tels idempotents. On peut montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.6. - <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $\{0\}$ <u>est le seul rétract de</u> $\mathfrak{A}$ <u>inclus dans</u> $\mathfrak{B}$, <u>et différent de</u> $\overline{\bigcup_{\eta\in H(\mathfrak{B})} S_\eta}$;

(ii) <u>Si</u> ω <u>est un idempotent de</u> $H(\mathfrak{B})$, <u>différent de</u> 0 , ω <u>est identité à gauche de</u> $H(\mathfrak{B})$;

(iii) $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ <u>est l'ensemble des éléments de</u> $H(\mathfrak{B})$ <u>qui ne possèdent pas d'inverse à gauche</u>.

3.3. <u>Endomorphismes co-décomposants.</u>

Dans le cas des $\mathfrak{M}$-groupes, nous remplacerons la notion de congruence radicale $\mathcal{R}_\eta$ d'un endomorphisme η par celle de noyau $\mathfrak{N}_\eta$ de η , avec $\mathfrak{N}_\eta = \mathcal{R}_\eta(0)$.

THÉORÈME 3.3.1. - <u>Un endomorphisme</u> η <u>d'un</u> $\mathfrak{M}$-<u>groupe</u> $\mathfrak{A}$ <u>est co-décomposant, si, et seulement si, il existe une congruence</u> $\mathcal{C}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>telle que</u> :

(i) $\mathfrak{A} = \mathcal{C}(0) + S_\eta$, $\mathcal{C}(0) \cap S_\eta = \{0\}$;

(ii) $\mathcal{C}$ <u>est</u> η-<u>régulière et</u> η-<u>simplifiable (ce qui peut encore s'écrire</u> $\eta\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(0)$).

De même que dans le cas des endomorphismes décomposants, ce théorème s'obtient aisément à partir de la définition générale d'un endomorphisme co-décomposant.

Par dualité, nous sommes amenés à nous intéresser à l'étude des endomorphismes co-décomposants dont la congruence nucléaire contient une congruence donnée de $\mathfrak{A}$, soit $\mathcal{C}$. Posons donc

$$H^*(\mathcal{C}) = \{\eta \in H(\mathfrak{A}) \; ; \; \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_\eta\} \; .$$

Dans le cas particulier où l'on prend $\mathcal{C} = \mathcal{E}$, on obtient des résultats applicables au semi-groupe $H(\mathfrak{A})$ tout entier.

Dans tout le paragraphe, nous ferons l'hypothèse suivante :

(h_1^*) La somme de deux endomorphismes quelconques de $H^*(\mathcal{C})$ est un endomorphisme de $H(\mathfrak{A})$.

On constate immédiatement que cette somme est alors un endomorphisme de $H^*(\mathcal{C})$, ce qui confère à $H^*(\mathcal{C})$ une structure d'anneau. Comme dans le cas des endomorphismes décomposants, l'hypothèse (h_1^*), qui est assez restrictive, peut souvent être remplacée par une hypothèse plus faible portant sur les idempotents de $H^*(\mathcal{C})$.

THÉORÈME 3.3.2. - Un endomorphisme η d'un $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$ est co-décomposant pour $\mathfrak{A}$, si, et seulement si, il existe un endomorphisme ξ dans $H^*(\mathcal{C})$, et un endomorphisme idempotent dans $H^*(\mathcal{C})$, tels que :

(i) $\eta\xi = \xi\eta = \omega$;
(ii) $\xi\omega = \omega\xi = \xi$;
(iii) $\mathcal{S}_{\eta-\omega\eta} = \{0\}$.

Nous obtenons donc le théorème dual du théorème 3.2.2. Remarquons encore que la condition (iii) du théorème est équivalente à " $(\eta - \omega\eta)$ est un co-nil-endomorphisme".

THÉORÈME 3.3.3. - Si η est un endomorphisme de $H^*(\mathcal{C})$ co-décomposant pour le $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$, on a les propriétés suivantes :

(i) $\bigcap_{n\in N^*} (\eta - \omega\eta)^n.H^*(\mathcal{C}) = \{0\}$ (ω idempotent associé à η) ;
(ii) $\Xi^* = \{\tau - \omega\tau \; ; \; \tau \in H^*(\mathcal{C})\}$ est un idéal à droite de $H^*(\mathcal{C})$;
(iii) $\bigcap_{i\in N^*} \eta^i.\Xi^* = \{0\}$;
(iv) $H^*(\mathcal{C}) = \Xi^* + \omega H^*(\mathcal{C})$, $\Xi^* \cap \omega H^*(\mathcal{C}) = \{0\}$.

La démonstration de ce théorème est longue, et nous ne la reproduirons pas ici. Outre (h_1^*), nous ferons maintenant l'hypothèse suivante :

(h_2^*) $H^*(\mathcal{C})$ est co-décomposant pour $\mathfrak{A}$.

On a alors la caractérisation remarquable d'un co-nil-endomorphisme :

THÉORÈME 3.3.4. - Un endomorphisme η de $H^*(\mathcal{C})$ est un co-nil-endomorphisme, si, et seulement si,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \eta^n.H^*(\mathcal{C}) = \{0\} .$$

On peut alors s'attacher à définir la notion duale du radical $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$.

DÉFINITION 3.3.1. - Nous appellerons co-radical $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ de l'anneau $H^*(\mathcal{C})$, le sous-ensemble de $H^*(\mathcal{C})$, défini par

$$\mathfrak{L}(\mathcal{C}) = \{\eta \in H^*(\mathcal{C}) \ ; \quad \omega \in \eta H^*(\mathcal{C}) \implies \omega = 0\} .$$

On peut alors montrer le nouveau résultat suivant :

THÉORÈME 3.3.5. - $\mathfrak{L}(\mathcal{C}) = \{\eta \in H^*(\mathcal{C}) \ ; \quad \xi \in \eta H^*(\mathcal{C}) \implies \mathfrak{S}_\xi = \{0\}\}$.

Le co-radical $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ intervient dans la recherche des endomorphismes de $H^*(\mathcal{C})$ co-décomposants pour le $\mathfrak{M}$-groupe $\mathfrak{A}$. En effet, si η est un endomorphisme de $H^*(\mathcal{C})$ co-décomposant pour $\mathfrak{A}$, il existe un idempotent ω dans $H^*(\mathcal{C})$ (cf. théorème 3.3.2). Par conséquent, il existe un idempotent ω , tel que $\mathfrak{N}_\omega \supseteq \mathcal{C}$. Il est alors logique de s'attacher à trouver à quelles conditions, si possible nécessaires et suffisantes, il n'existe pas de tels idempotents. On peut montrer le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 3.3.6. - Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{A}$ est le seul noyau d'idempotent contenant $\mathcal{C}(0)$, et différent de $\bigcap_{\eta\in H^*(\mathcal{C})} \mathfrak{N}_\eta$;

(ii) $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ est l'ensemble des éléments de $H^*(\mathcal{C})$ qui ne possèdent pas d'inverse à droite ;

(iii) Si ω est un endomorphisme idempotent de $H^*(\mathcal{C})$, non nul, alors ω est identité à droite de $H^*(\mathcal{C})$.

Malheureusement, il ne nous a pas été possible de démontrer que le co-radical $\mathfrak{L}(\mathcal{C})$ était égal à la somme des idéaux minimaux à droite de $H^*(\mathcal{C})$ (lorsqu'il en existe), ce qui serait la propriété duale attendue de : " $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de $H(\mathfrak{B})$ ". Nous sommes seulement parvenus à prouver que "le co-radical contient la somme des idéaux à droite minimaux de carré nul". L'état de nos recherches ne nous a pas encore permis d'affirmer ou d'infirmer l'égalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.). - Splitting endomorphisms, Trans. Amer. math. Soc., t. 61, 1947, p. 508-516.

[2] BAER (R.). - Endomorphism rings of operator loops, Trans. Amer. math. Soc., t. 61, 1947, p. 517-529.

[3] BAER (R.). - Radical ideals, Amer. J. of Math., t. 65, 1943, p. 537-568.

[4] BOURBAKI (N.). - Théorie des ensembles, Chapitres 1-2. 3e édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1212 b ; Bourbaki, 17).

[5] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chapitre 1 : Structures algébriques. 2e édition. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1144 a ; Bourbaki, 4).

[6] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chapitre 2 : Algèbre linéaire. 3e édition. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 b ; Bourbaki, 6).

[7] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[8] CEYLERETTE (J.). - Dualisation dans les algèbres abstraites, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 22e année, 1968/69, n° 12, 11 p.

[9] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (J. B.). - The algebraic theory of semigroups, Volume 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[10] COHN (P. M.). - Universal algebra. - New York, Harper and Row, 1965 (Harper international Student Reprint).

[11] CROISOT (R.). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 361-379.

[12] DUBREIL (P.). - Théorie des demi-groupes, Cours de D. E. A., Paris, 1967/68 (non publié).

[13] DUBREIL (P.). - Endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n° 23, 20 p.

[14] DUBREIL (P.). - Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Serie 8, t. 46, 1969, p. 149-153.

[15] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. 2e édition. - Paris, Dunod, 1964 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).

[16] GRÄTZER (G.). - Universal algebra. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1968 (University Series in higher Mathematics).

[17] GREEN (J. A.). - A duality in abstract algebra, J. of London math. Soc., t. 27, 1952, p. 64-73.

[18] KUROŠ (A. G.). - Algèbre générale. Traduit par J.-P. Peaudecerf. - Paris, Dunod, 1967 (Collection universitaire de Mathématiques, 22).

(Texte reçu le 2 juillet 1971)

Jean-Claude ANSCOMBRE
13 bis boulevard Victor Hugo
78 - SAINT-GERMAIN-en-Laye