Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Jacques Lévy-Bruhl

Quelques applications des catégories à involution aux algèbres universelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 10, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 10, 19 p.

1er mars 1971

QUELQUES APPLICATIONS DES CATÉGORIES À INVOLUTION AUX ALGÈBRES UNIVERSELLES

par Jacques LÉVY-BRUHL

Introduction. - Un groupoïde large E est un ensemble (ou une classe) sur lequel on a défini une multiplication, application de $A \subseteq E \times E$ dans E. Un groupoïde large E est à involution, si E est ordonné (ordre noté $\leqslant$), la relation d'ordre étant compatible avec la multiplication, et s'il existe dans E un anti-automorphisme involutif et isotone φ, appliquant $a \in E$ sur $\varphi(a) = a^0$. Si de plus E est une catégorie, on exige en outre

$$(a \in \mathrm{Hom}(A , B)) \implies (a^0 \in \mathrm{Hom}(B , A)) .$$

Si E est une catégorie à involution, l'application φ est un foncteur de E sur la catégorie 1-duale E^* : soit A un objet de E, et supposons que xA^0 existe. Alors $((xA^0)^0 = Ax^0 = x^0) \implies (xA^0 = x)$. On verrait de même que l'existence de $A^0 y$ entraîne $A^0 y = y$. Donc A^0 est un objet de E, et $(\exists\, AA^0) \implies (AA^0 = A = A^0)$.

La notion de groupoïde large à involution généralise bien des structures :

Exemple 1. - Un groupoïde de Brandt, une boucle, un groupe, sont des catégories à involution, en posant $(\leqslant) = (=)$ et $a^0 = a^{-1}$. Une boucle est un groupoïde large à involution.

Exemple 2. - L'ensemble E des parties d'un groupe G est une catégorie à involution avec $a^0 = \{\alpha^{-1}\}$, si $a = \{\alpha\}$, et $\leqslant$ étant l'inclusion ensembliste $\subseteq$.

Exemple 3. - Tout demi-groupe ordonné commutatif, à multiplication compatible, est un demi-groupe large à involution, trivialement, en posant $a^0 = a$, $\forall a$. En particulier, tout $\wedge$-demi-treillis, et tout treillis (avec $a^0 = a$, et $(\vee) = (.)$), est un demi-groupe large à involution.

Exemple 4. - La catégorie des relations binaires, dont les flèches sont les relations binaires entre ensembles, avec $(\leqslant) = (\subseteq)$, et a^0 la relation réciproque de la relation a, est une catégorie à involution.

Exemple 5. - Etant donnés des groupes à opérateurs, commutatifs ou non, notés additivement, A et B, on appelle relation additive r, tout sous-groupe (à opérateurs) du produit direct $A \times B$. On a

$$((\alpha , \beta) \in r , (\alpha' , \beta') \in r) \Longrightarrow ((\alpha - \alpha' , \beta - \beta') \in r) ,$$

et, si λ est un opérateur, $(\lambda\alpha , \lambda\beta) \in r$. Les relations additives forment une sous-catégorie de celle des relations binaires, stable pour l'intersection et l'involution.

Dans une catégorie à involution E , un morphisme $a = BaA$ est dit :

- Injectif à gauche, si $(a \in IG) \Longleftrightarrow aa^0 \leqslant B$;
- Surjectif à gauche, si $(a \in SG) \Longleftrightarrow a^0 a \geqslant A$;
- Injectif à droite, si $(a \in ID) \Longleftrightarrow a^0 a \leqslant A$;
- Surjectif à droite, si $(a \in SD) \Longleftrightarrow aa^0 \geqslant B$.

Les applications, c'est-à-dire les morphismes injectifs à gauche et surjectifs à gauche de E , forment une sous-catégorie E' . L'avantage des catégories à involution est qu'elles se prêtent à des calculs formels simples, le signe a^0 généralisant le symbole a^{-1} (cf. exemple 1), et que de nombreux exemples de catégories (catégories des ensembles, des groupes, exactes, abéliennes) sont isomorphes à la sous-catégorie E' des applications d'une catégorie à involution E .

Le langage employé sera généralement celui de l'exemple 4 ci-dessus ; ainsi, $a = AaA$ sera dit réflexif si $A \leqslant a$, entier si $a \leqslant A$, transitif si $a^2 \leqslant a$, symétrique si $a^0 = a$, une équivalence s'il est réflexif, symétrique et transitif.

Aux systèmes d'axiomes proposés par MACLANE [5] et PUPPE [6], qui excluent dès l'abord le cas des relations binaires (exemple 4), nous avons substitué les suivants, dont ils sont la conséquence :

Axiome de modularité. - Un groupoïde large à involution est modulaire, si on a l'égalité

$$\text{(M)} \qquad ab \wedge c = (a(b \wedge a^0 c)) \wedge c \quad .$$

Un treillis (exemple 3) est modulaire, si, et seulement si, il vérifie les égalités de Dedekind qui définissent la modularité classique.

Un groupoïde large à involution est bimodulaire, s'il vérifie (M) et l'égalité 2-duale

$$(M^{**}) \qquad ab \vee c = (a(b \vee a^0 c)) \vee c \quad .$$

On trouvera, dans [4], des conséquences de la modularité et les axiomes qui suivent : dans une catégorie modulaire, si $a = BaA$, on pose $I(a) = aa^0 \wedge B$; on a les formules

(IM-i) $I(a) \leqslant B$ est symétrique et idempotent ,

(IM-ii) $$(a \leqslant b) \implies (I(a) \leqslant I(b)) ,$$

(IM-iii) $$I(ab) = I(a.I(b)) ,$$

(IM-iv) $$(I(a) \leqslant I(b)) \iff (a \leqslant bb^0 a) .$$

L'entier $I(a)$ est appelé image entière de a .

Les exemples 2 et 4 sont des exemples de catégorie modulaire, l'exemple 5 est un exemple de catégorie bimodulaire.

Les exemples 4 et 5 suggèrent en outre les axiomes suivants :

(K-i) Il existe, pour tout objet A , un endomorphisme minimum $w(A)$, et on appelle noyau entier de $a = BaA$, le morphisme $K(a) = I(a^0 w(B))$;
(K-ii") $(K(a) \leqslant K(b)) \iff (ba^0 a \leqslant b)$.

Ce dernier axiome, vérifié dans l'exemple 5, ne l'est pas dans le cas de relations binaires, et est nécessaire pour les démonstrations des lemmes d'algèbre homologique, pour lesquelles on utilisera constamment les formules

$$(a = BaA \in ID) \iff (K(a) = w(A)) ; \qquad (a \in SD) \iff (I(a) = B) ,$$
$$K(ba) = I(a^0 K(b)) ; \qquad K(a^0 a) = K(a) ; \qquad I(aa^0) = I(a) .$$

1. Algèbre universelle. Congruence. Couple stable.

On appelle algèbre universelle à une opération n-aire, une application a d'un ensemble de données $A = A_1 \times \dots \times A_n$ dans un ensemble B , appelé ensemble de résultats. Si a n'est pas une application mais une relation binaire injective à gauche, $a \subseteq A \times B$, alors a définira une algèbre universelle large (ou partielle) ([4], 0.10, p. 14, et 3.6.2). Enfin, l'algèbre universelle à une opération n-aire a sera dite interne, si $A_i = B$, $\forall\, i$. Une congruence (q , r) pour a est un couple de relations d'équivalences (q dans A , r dans B), telles que

(1) $$(\alpha \equiv \alpha' \ (q)) \implies (a(\alpha) \equiv a(\alpha') \ (r)) .$$

Si $i^0 = Ai^0 A'$, $j^0 = Bj^0 B'$, sont deux applications injectives, le couple d'entiers $(j^0 j , i^0 i)$ est dit stable pour a , si

(2) $$(\alpha \in A') \implies (a(\alpha) \in B') .$$

Dans le cadre de la catégorie des relations, (1) et (2) s'expriment par l'une quelconque des conditions équivalentes ([4], 3.4) :

(1') $$(raq = ra) \iff (aq \leqslant ra) \iff (aqa^0 \leqslant r) ;$$

(2') $(vau = au) \iff (au \leqslant va) \iff (u \leqslant ava^0)$, avec $u = i^0 i$, $v = j^0 j$.

Si a définit une algèbre universelle interne, on définit une <u>congruence interne</u> (r^{*n}, r) , un couple stable interne (v^{*n}, v) , où

(3) $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \ (r^{*n})) \iff (\alpha_i \equiv \alpha'_i \ (r) , \ \forall i)$,

(4) $(((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in v^{*n}) \iff ((\alpha_i, \alpha_i) \in v , \ \forall i)$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1.

(a) <u>Pour une algèbre universelle interne,</u> (r^{*n}, r) <u>est une congruence (interne), si, et seulement si,</u>

$$(\alpha_k \equiv \alpha'_k \ (r) , \ \forall k) \implies (a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv a(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \ (r)) .$$

(b) <u>Pour une algèbre universelle interne,</u> (v , v^{*n}) <u>est un couple stable (interne) pour</u> a , <u>si, et seulement si,</u>

$$((\alpha_k, \alpha_k) \in v , \ \forall k) \implies ((a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in v) .$$

<u>Remarque</u>. - D'après (a), (r^{*n}, r) est congruence interne, si, et seulement si, r est congruence au sens classique ; d'après (b), (v , v^{*n}) est couple stable interne, si, et seulement si, avec $v = j^0 j$, $B' = jj^0$ est partie stable de l'algèbre universelle (B , a) . Mais on peut définir, pour les algèbres universelles, même internes, d'autres congruences et couples stables que les internes (cf. par exemple, ci-dessous 2.4 (c)). Le lecteur pourra interpréter, en termes d'algèbres universelles, les développements qui suivent.

2. Entier saturé pour une équivalence.

Rappelons que, dans une catégorie à involution E , un entier $u = AuA$ est dit <u>saturé</u> pour l'équivalence r $(r = ArA)$, si, et seulement si, $I(ru) = u$.

PROPOSITION 2.1. - <u>Soient, dans une catégorie à involution</u> E , <u>une équivalence</u> $r = ArA$, <u>et</u> $u = AuA$ <u>un morphisme entier, symétrique, idempotent.</u>

(a) <u>Les morphismes</u> ur , ru , uru <u>sont idempotents. Si</u> E <u>est modulaire,</u> $I(uru) = u$.

(b) <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>sont des endomorphismes symétriques de</u> A , <u>on a</u>

$$(ab \leqslant ba) \iff (ab = ba) .$$

(c) <u>Si</u> E <u>est modulaire, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) L'entier u est saturé pour r ;

(ii) $ru = uru$;

(iii) $ur = ru$;

(iv) $ur \leqslant ru$;

(v) $rur = ru$ (on peut dire indifféremment que (r , r) est une congruence pour u , ou que (u , u) est un couple stable pour r) ;

(vi) Si, de plus, E vérifie les axiomes (K-i), (K-ii"), $K(r) \leqslant u$.

(d) Les équivalences dans A , telles que $I(qu) = u$, où u est un entier donné, forment une classe convexe (i. e.

$$(I(qu) = I(q'u) = u \ , \quad q \leqslant q'' \leqslant q') \implies (I(q''u) = u) \ ).$$

(e) Si $u \leqslant v \leqslant A$, on a $rurvr = rur$.

(f) Si E est la catégorie des relations binaires, et si $u = i^0 i$, où i^0 est l'injection $i^0 = Ai^0 U$, les conditions de (c) expriment que U est union de classes d'équivalence modulo r .

Démonstration.

(a) $(A \leqslant r) \implies (ru = ru^2 \leqslant ruru)$, et $(u \leqslant A) \implies (ruru \leqslant r^2 u = ru)$. De même, $urur = ur$, et, par suite, $uru.uru = ur.ur.u = uru$. On a $u \leqslant I(uru)$, car $u \leqslant uru$, et $I(uru) \leqslant I(u) = u$ ([4], 3.8.1 (c)).

(b) $(ab \leqslant ba) \implies ((ab)^0 = b^0 a^0 \leqslant (ba)^0 = a^0 b^0) \implies (ba \leqslant ab) \implies (ba = ab)$.

(c) On a (iii) $\iff$ (iv) , d'après (b).

Prouvons (i) $\iff$ (iii) :

$$(I(ru) = u) \iff (I(ru) \leqslant I(u)) \iff (ru \leqslant uu^0 r = ur) \iff (ru = ur) \ .$$

Prouvons (iii) $\iff$ (ii) :

$$(ru = ur) \implies (ru = ru^2 = uru) \quad \text{et} \quad (ru = uru \leqslant ur) \implies (ru = ur) \ .$$

Prouvons (iii) $\iff$ (v) :

$$(ru = ur) \implies (ru = r^2 u = rur)$$

et

$$(rur = ru) \implies (ur \leqslant rur = ru) \implies (ur = ru) \ .$$

Mais (ii) exprime que (u , u) est couple stable pour r , et (v) que (r , r) est une congruence pour u .

Prouvons que (iii) $\implies$ (vi) :

$$(ur = ru) \implies (K(r) = K(ur) = K(ru) = I(u.K(r)) \leqslant u) \ .$$

Prouvons que (vi) $\implies$ (v) :

$(K(r) \leqslant u) \implies (K(r) = K(r) \wedge u = K(r)u = u.K(r)) \implies \cdots$

$\implies (I.K(r) = K(r) \leqslant I(u.K(r)) = K(ru)) \implies (rur \leqslant ru)$

$\implies (rur = ru) \quad (K\text{-}ii'')$.

(d) $u = I(qu) \leqslant I(q''u) \leqslant I(q'u) = u$. Donc $I(q''u) = u$.

(e) $(u \leqslant v) \implies (rur = rurur \leqslant rurvr)$, et $(v \leqslant A) \implies (rurvr \leqslant rur^2 = rur)$.

PROPOSITION 2.2. - Dans une catégorie modulaire E , on se donne une application $f = A'fA$. On pose $f(u) = I(fu)$, si $u \leqslant A$, et, si $u' \leqslant A'$, on pose $f^0(u') = I(f^0 u') \leqslant A$. Si F est l'ensemble des entiers de A , muni de la relation $\leqslant$, et F' l'ensemble des entiers de A' , muni de la relation $\geqslant$, alors les deux applications f et f^0 déterminent sur F et F' une correspondance de Galois. Si les entiers de A et de A' forment des treillis complets, les éléments fermés de F , de la forme $f^0 f(u)$, et les éléments fermés de F' , de la forme $f(u)$, forment deux treillis T et T' isomorphes. De plus, la fermeture $f^0 f(u)$ d'un élément u n'est autre que la saturation de u par l'équivalence $f^0 f$.

Démonstration. - On a

$$(u \leqslant v) \implies (I(fv) \geqslant I(fu)) \qquad \text{et} \qquad (u' \geqslant v') \implies (I(f^0 v') \leqslant I(f^0 u')) ,$$

d'où l'anti-isotonie de f et f^0 . Comme $f \in IG$, on a $u' \geqslant I(ff^0 u')$, et comme $f \in SG$, on a $u \leqslant I(f^0 fu)$, ce qui prouve l'existence de la correspondance de Galois. Les éléments fermés de F , qui sont les éléments saturés pour l'équivalence $f^0 f$, sont en bijection avec les éléments fermés de F' , images par f d'éléments de F , par la bijection φ : $\varphi(f^0 f(u)) = f(u)$. On a

$$(u \leqslant v) \iff (\varphi(u) \leqslant \varphi(v)) , \qquad \text{si} \quad (u , v) \in T^2 ,$$

et, si T est un treillis complet, alors T' sera un treillis complet isomorphe ([4], 2.2.3 (c)). Il en sera notamment ainsi si F est un treillis complet, car T est alors une famille de Moore de F ([4], 2.4.6).

PROPOSITION 2.3. - Soient E une catégorie modulaire, f_1 et f_2 deux applications telles que $(f_1^0 f_1 , f_2^0 f_2)$ soit une congruence pour $a = A_2 a A_1$.

(a) Si (u_2 , u_1) est un couple stable pour a , l'image de (u_2 , u_1) par (f_1 , f_2) est un couple stable pour le morphisme induit $f_2 a f_1^0 = a'$.

(b) Si (u_2' , u_1') est stable pour a' , l'image de (u_2' , u_1') par (f_1^0 , f_2^0) est un couple stable pour a .

(c) Il y a une bijection bi-isotone entre les couples stables pour a saturés pour $(f_1^0 f_1 , f_2^0 f_2)$ et les couples stables pour a' qui sont images par

(f_1, f_2) *de couples stables pour* a.

(d) *Soient* s *une surjection de source* A, u *et* v *deux endomorphismes entiers de* A, *tels que* v *soit saturé pour* $r = s^0 s$. *On a* :

(α) $s(u \wedge v)s^0 = sus^0 \wedge svs^0$;

(β) $I(r(u \wedge v)) = I(ru) \wedge I(rv)$.

Démonstration.

(a) Il faut prouver

$$f_2\, af_1^0 . I(f_1\, u_1) \leqslant I(f_2\, u_2) . f_2\, af_1^0 \quad . \tag{5}$$

Mais

$$f_2\, af_1^0 . I(f_1\, u_1) = f_2\, af_1^0\, f_1\, u_1\, f_1^0 \leqslant f_2\, f_2^0\, f_2\, au_1\, f_1^0 = f_2\, au_1\, f_1^0 \leqslant \ldots$$
$$\leqslant f_2\, u_2\, af_1^0 \leqslant f_2\, u_2\, f_2^0\, f_2\, af_1^0 = I(f_2\, u_2) . f_2\, af_1^0 \ .$$

(b) Il faut prouver ([4], 3.81 (b))

$$a . I(f_1^0\, u_1') \leqslant I(f_2^0\, u_2')a \qquad \text{ou} \qquad af_1^0\, u_1'\, f_1 \wedge a \leqslant f_2^0\, u_2'\, f_2\, a \wedge a \quad .$$

Mais

$$af_1^0\, u_1'\, f_1 \leqslant f_2^0\, f_2\, af_1^0\, u_1'\, f_1 \leqslant f_2^0\, u_2'\, f_2\, af_1^0\, f_1 \leqslant f_2^0\, u_2'\, f_2\, f_2^0\, f_2\, a = f_2^0\, u_2'\, f_2\, a \quad .$$

(c) est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.

(d) L'intersection de deux entiers est égale à leur produit ([4], 3.8.1 (h)), et donc

$$sus^0 \wedge svs^0 = sus^0\, svs^0 = suvs^0\, ss^0 = suvs^0 = s(u \wedge v)s^0 \qquad (2.1\ (c)\ (iii)) \quad .$$

On a, d'après ([4], 3.8.1 (b), et 2.1 (c) (ii)),

$$I(ru) \wedge I(rv) = rur \wedge A \wedge v = (rur \wedge A)v = rurv \wedge v = ruvrv \wedge v = I(ruv)v \leqslant \ldots$$
$$\leqslant I(ruv) = I(r(u \wedge v)) \ .$$

L'inclusion 2-duale résulte de l'isotonie de I.

PROPOSITION 2.4.

(a) *L'image par un homomorphisme d'une sous-algèbre d'une algèbre universelle est une sous-algèbre de l'algèbre-image.*

(b) *L'image réciproque d'une sous-algèbre de l'algèbre-image dans un homomorphisme est une sous-algèbre.*

(c) *Soit* V *une partie permise à gauche d'un groupoïde* A, a *étant une application de* A/A *dans* A. *Si* i^0 *est l'injection canonique de* $A \times V$ *dans* $A \times A$, avec $u = i^0 i$, j^0 l'injection canonique de V dans A , avec $v = j^0 j$, alors V est permise à gauche pour a , si, et seulement si, (v , u) est stable pour a .

Démonstration. - (a) résulte de (2.3 (a)) ; (b) résulte de (2.3 (b)). Quant à (c), de démonstration immédiate, il permet de ramener la notion de partie permise à celle de couple stable.

PROPOSITION 2.5 (Application aux groupes). - Soient A un groupe, f un homomorphisme du groupe A dans le groupe A' .

(a) Un sous-groupe U est saturé pour la congruence $f^0 f$, si, et seulement si, U contient le noyau $H = \vec{K}(f^0 f)$ de l'homomorphisme.

(b) On a $f(A) \simeq A/H$ ([4], 3.8.5). Il existe un isomorphisme de treillis φ entre l'ensemble F des sous-groupes de A , contenant H , et l'ensemble F' des sous-groupes de A/H , défini par $\varphi(U) = U/H$, si $H \subseteq U \in A$ (2.2, et 2.3 (c)).

On a donc, si $U_i \subseteq F$, $\forall\ i$:

(α) $(\cap\ U_i)/H \simeq \cap(U_i/H)$;

(β) $\vee(U_i/H) \simeq (\vee\ U_i)/H$, si $\vee$ désigne le plus petit majorant dans le treillis des sous-groupes.

(c) Si U_1 et U_2 sont deux sous-groupes tels que $H \subseteq U_1 \cap U_2$, on a encore $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$.

(d) Du premier théorème d'isomorphisme, on peut déduire que U_1 est normal dans U_2 si, et seulement si, $\varphi(U_1)$ est normal dans $\varphi(U_2)$. En particulier, $H\ (C')\ U$, si, et seulement si, U/H' est simple (on rappelle que $H\ (C')\ U$ si, et seulement si, $(H \lhd V \lhd U) \implies (V = U$ ou $V = H$, avec $H \neq U)$). On en déduit que, d'après le deuxième théorème d'isomorphisme, les sous-groupes du groupe A vérifient l'axiome de voisinage ([4], 7.2.3) :

$$(Y\ (C')\ XY) \implies ((X \cap Y)\ (C')\ X) ,$$

et que l'axiome de la compatibilité de la couverture normale est vérifié ([4], 7.2.3),

$$((X\ (C')\ Y , Z)Y) \implies (X \cap Z\ (C')\ Y \cap Z) ,$$

ce qui donne une démonstration du théorème de Jordan-Hölder pour les groupes par la méthode de ([4], 7.1).

(e) Si $U_1 \lhd A$, $U_2 \lhd A$, $H \subseteq U_1 \cap U_2$, et $H \lhd U_1 U_2 = U_1 \vee U_2$, on a, d'après ((b) (β)),

$$(U_1 U_2)/H \simeq (U_1/H) \vee (U_2/H) .$$

Si $H = U_1 \cap U_2$, ce dernier groupe est un produit direct, et, en appliquant le deuxième théorème d'isomorphisme, on a

$$(U_1\ U_2)/(U_1 \cap U_2) \simeq ((U_1\ U_2)/U_1) \times ((U_1\ U_2)/U_2) \quad .$$

(f) Les résultats précédents subsistent (en remplaçant les structures de groupe quotient par des structures d'espace homogène), si H est un sous-groupe qui n'est plus nécessairement normal de A .

On peut appliquer les propositions 2.2, 2.3, 2.4, à d'autres structures. On a, par exemple :

PROPOSITION 2.6 (Application aux anneaux commutatifs unitaires). - Soit f un homomorphisme surjectif d'anneau commutatif unitaire, d'un anneau A sur un anneau A' .

(a) L'image d'un idéal de A est un idéal de A' , et l'image réciproque d'un idéal de A' est un idéal de A (2.4 (c)).

(b) Un idéal de A est fermé pour la fermeture $f^0 f$, si, et seulement si, il contient le noyau $H = \overline{K}(f^0 f)$ de l'homomorphisme f . Dans l'isomorphisme φ du treillis T (des idéaux de A contenant H) sur le treillis T' des idéaux de A/H , on a les résultats suivants :

(α) U est entier maximal dans A , si, et seulement si, $\varphi(U)$ est entier maximal dans A/H . En particulier, U est entier maximal, si, et seulement si, A/U est un corps.

(β) U est premier dans A , si, et seulement si, U/H est premier. En particulier, U est premier si, et seulement si, A/U est intègre.

(γ) U est semi-premier dans A , si, et seulement si, U/H est semi-premier dans A/H , en particulier, si, et seulement si, A/U n'admet pas d'éléments nilpotents non nuls.

3. Autre expression du deuxième théorème d'isomorphisme.

Sous forme abrégée, le deuxième théorème d'isomorphisme peut s'énoncer (en termes d'algèbre universelle) : Etant données une algèbre universelle S , et une sous-algèbre S' , l'image de S' par un homomorphisme f , l'image par f de la saturation de S' par la congruence $f^0 f$, et le quotient de S' par la congruence induite de $f^0 f$, sont trois algèbres isomorphes ([4], 3.8.8). On se propose de donner ici une autre expression de ce théorème.

PROPOSITION 3.1. - Soient E une catégorie à involution, $r = ArA$ une équivalence, $u = i^0 i$ et $v = m^0 m$ deux entiers de A , symétriques et idempotents, où i^0 et m^0 sont des injections. On suppose $u \leqslant v$, et on pose $s^0 s = iri^0$, $t^0 t = mrm^0$, où s et t sont des surjections.

(a) <u>Le morphisme</u> $x = tmi^0 s^0$ (<u>de source</u> $(A//i)/s$, <u>et de but</u> $(A//m)/t$) <u>est une injection</u>.

(b) <u>Le morphisme</u> x <u>est une bijection, si, et seulement si, on a une des trois conditions équivalentes suivantes</u> :

(i) $mrurm^0 = mrm^0$;

(ii) $v \leqslant rur$;

(iii) (<u>si</u> E <u>est modulaire</u>) $v \leqslant I(ru)$.

<u>Démonstration</u>.

(a) On a

$$x^0 x = sim^0 t^0 tmi^0 s^0 = sim^0 mrm^0 mi^0 s^0 \quad .$$

Mais $(u \leqslant v) \Longrightarrow (m^0 mi^0 = i^0) \Longrightarrow (m^0 mu = u)$, et mi^0 est une injection ([4], 3.3.3***). Par suite,

$$x^0 x = siri^0 s^0 = ss^0 ss^0 = (A//i)/s \ , \qquad \text{et} \qquad x \in ID \cap SG \quad .$$

Par ailleurs,

$$xx^0 = tmi^0 s^0 sim^0 t^0 = tmi^0 iri^0 im^0 t^0 = tmurum^0 t^0 \leqslant tmrm^0 t^0 = tt^0 \quad \text{et} \quad x \in IG \ .$$

(b) On a

$$(tt^0 \leqslant xx^0) \iff (t^0 t \leqslant t^0 xx^0 t = t^0 tmurum^0 t^0 t = \ldots$$
$$= mrm^0 murum^0 mrm^0 = mrururm^0 = mrurm^0)$$

car $m^0 mu = vu = u$, et $rurur = rur$ (2.1 (a)). Par suite, x est une bijection, si, et seulement si,

$$(tt^0 \leqslant xx^0) \iff (t^0 t = mrm^0 \leqslant mrurm^0) \iff (mrm^0 = mrurm^0) \qquad (i) \quad .$$

Prouvons (ii) $\iff$ (iii) :

$$(v \leqslant rur) \iff (v = v^2 \leqslant rurv) \iff (v = I(v) \leqslant I(ru)) \qquad (III\text{-}iv) \quad .$$

Prouvons (i) $\Longrightarrow$ (ii) :

$$(mrm^0 = mrurm^0) \Longrightarrow (vrv = vrurv) \Longrightarrow (v \leqslant vrv = vrurv \leqslant rur) \quad .$$

Prouvons (ii) $\Longrightarrow$ (i) :

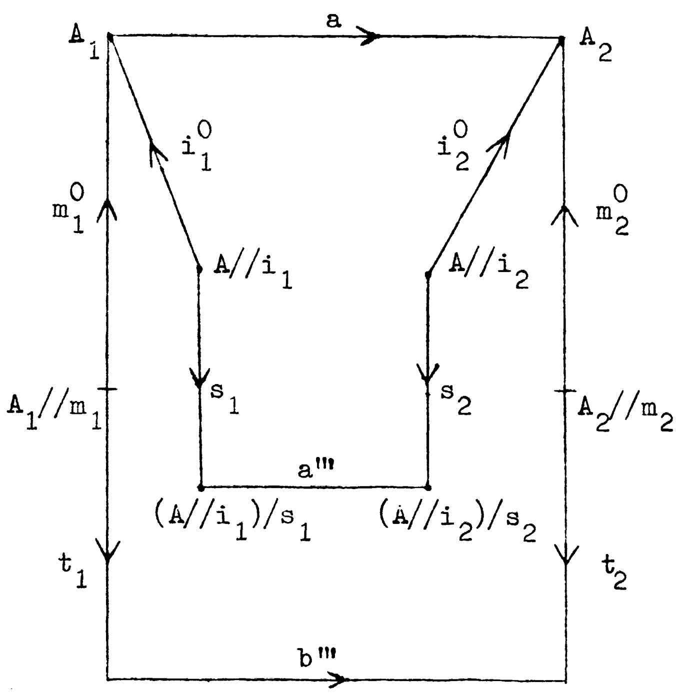
$$(v \leqslant rur) \Longrightarrow (m^0 m \leqslant rur) \Longrightarrow (m = mm^0 m \leqslant mrur)$$
$$\Longrightarrow (mrm^0 \leqslant mrur^2 m^0 = mrurm^0) \quad .$$

PROPOSITION 3.2 (Autre énoncé du deuxième théorème d'isomorphisme ; [4], 3.8.8). - <u>Soient</u> E <u>une catégorie modulaire</u>, (u_2 , u_1) , (v_2 , v_1) <u>deux couples stables</u>

pour l'application $a = A_2 \, a A_1$. *Pour* $k = 1 , 2$, *on suppose* $u_k = i_k^0 \, i_k$, $v_k = m_k^0 \, m_k$, $u_k \leqslant v_k$, *où* i_k^0 *et* m_k^0 *sont des injections. Soit, d'autre part,* (r_1 , r_2) *une congruence pour* a , *et l'on pose* $i_k \, r_k \, i_k^0 = s_k^0 \, s_k$, $m_k \, r_k \, m_k^0 = t_k^0 \, t_k$, *où* s_k *et* t_k *sont des surjections. De plus, on suppose que* $v_k \leqslant I(r_k \, u_k)$, *pour* $k = 1 , 2$. *Dans ces conditions, les morphismes* a''' *et* b''' *sont isomorphes* :

$$a''' = ((A_2//i_2)/s_2) \quad s_2 \, i_2 \, a i_1^0 \, s_1^0 \quad ((A_1//i_1)/s_1) \quad ,$$

$$b''' = ((A_2//m_2)/t_2) \quad t_2 \, m_2 \, a m_1^0 \, t_1^0 \quad ((A_1//m_1)/t_1) \quad .$$



Démonstration. - D'après ([4], 3.4.5 (b)), le couple $(i_1 \, r_1 \, i_1^0 \, , \, i_2 \, r_2 \, i_2^0)$ est une congruence pour le morphisme induit $i_2 \, a i_1^0$, ce qui entraîne l'existence de l'application a''' , si a est une application. De même, $(m_1 \, r_1 \, m_1^0 \, , \, m_2 \, r_2 \, m_2^0)$ est une congruence pour $m_2 \, a m_1^0$, ce qui entraîne l'existence de b''' . Mais a''' et b''' sont isomorphes, car, d'après (3.1), leurs sources et leurs buts sont en bijection.

Remarque. - Prouvons que (3.2) est équivalent au deuxième théorème d'isomorphisme ([4], 3.8.8). Si on choisit dans (3.2), $v_k = I(r_k \, u_k)$, on retrouve que les quotients d'un couple stable et de sa saturation par une congruence sont isomorphes. Inversement,

$$(u_k \leqslant v_k \leqslant I(r_k \, u_k)) \implies (I(r_k \, u_k) \leqslant I(r_k \, v_k) \leqslant I(r_k . I(r_k \, u_k)) = I(r_k \, u_k)) \quad ,$$

et $I(r_k\ v_k) = I(r_k\ u_k)$. Les couples $(u_1\ ,\ u_2)$, $(v_1\ ,\ v_2)$ ont même saturation par la congruence $(r_1\ ,\ r_2)$, et a''' et b''' sont isomorphes comme tous deux isomorphes au même morphisme a^{iv} , quotient de la saturation, d'après le deuxième théorème d'isomorphisme.

Exemple. - Soient A un sous-groupe normal d'un groupe A , U et V deux sous-groupes de A , tels que $U \subseteq V \subseteq RU$. Alors les groupes quotients $U/(R \cap U)$ et $V/(R \cap V)$ existent et sont isomorphes (ils sont tous deux isomorphes à $RU/R = RV/R$).

4. Lemme de Zassenhauss dans les catégories modulaires.

Une congruence dans une sous-algèbre S' , d'une algèbre universelle S , est un endomorphisme de S symétrique et transitif. On a les résultats suivants sur les morphismes symétriques et transitifs dans une catégorie modulaire E .

PROPOSITION 4.1. - Soient une catégorie modulaire E , $g = AgA$ un endomorphisme de A , symétrique et transitif, et $u = AuA$ un entier tel que $u \leqslant I(g)$.

(a) Le morphisme g est idempotent, et, si $u = i^0\ i$ (i^0 injection), alors igi^0 est une équivalence.

(b) On a $u \leqslant ugu$, et $u \leqslant I(gu)$.

(c) Si $u = I(g)$, on a $ugu = g$.

(d) On suppose que $h = AhA$ est symétrique et transitif, que $u = i^0\ i = I(g) \wedge I(h)$. On pose $I(gi^0) = m^0\ m = v$, et on suppose que $igi^0 \leqslant ihi^0$. Dans ces conditions :

(α) Le morphisme ghg est symétrique et transitif ;

(β) Les morphismes mgm^0 et $mghgm^0$ sont des équivalences dans $A//m$;

(γ) On a $u \leqslant m^0\ m = v$, et l'équivalence induite de $mghgm^0$ dans $A//i$ est ihi^0 ;

(δ) Si s et t sont deux surjections telles que $s^0\ s = ihi^0$, $t^0\ t = mghgm^0$, alors le morphisme x est une bijection : $x = tmi^0\ s^0$.

Démonstration.

(a) On a $g \leqslant gg^0\ g = g^3 = g.g^2 \leqslant g.g \leqslant g$. D'où $g^2 = g$. Le morphisme igi^0 est évidemment symétrique et transitif ([4], 3.4.4 (a) et (c)). De plus,

$$(i^0\ i \leqslant I(g)) \implies (i^0\ i \leqslant gg^0 = g^2 \leqslant g) \implies (ii^0 = i.i^0\ i.i^0 \leqslant igi^0)\ .$$

(b) $(u \leqslant I(g)) \iff (I(u) \leqslant I(g)) \iff (u \leqslant gg^0\ u = gu) \implies (u^2 = u \leqslant ugu)$. Mais

$$(u \leqslant gu) \implies (u = u^0 \leqslant (gu)^0 = ug)\ ,$$

et

$$(u \leqslant gu \ , \ u \leqslant ug) \implies (u^2 \leqslant gu^2 g = gug \ \text{ et } \ u \leqslant gug \wedge A = I(gu)) \ .$$

(c) $(u = I(g)) \implies (ugu = I(g)g.I(g) = g)$ ([4], 3.8.1 (d)).

(d) (α) La symétrie de ghg est triviale. On a

$$(ghg)^2 = ghg^2 hg = ghghg = g.I(g).I(h)h.I(h).I(g)g.I(g).I(h)h.I(h).I(g)g = guhuguhug \ .$$

Mais

$$(igi^0 \leqslant ihi^0) \implies (ugu \leqslant uhu) \quad \text{et donc} \quad (ghg)^2 \leqslant g.(uhu)^3 g = guhug = ghg \ ,$$

car uhu est idempotent (d'après (a)).

(β) On a

$$v = m^0 m = I(gu) \leqslant I(g) \ ,$$

et mgm^0 est une équivalence, d'après (a). De même,

$$v = I(gu) = I(g.I(g).I(h)) = I(gh) = gh^2 g \wedge A \leqslant ghg \wedge A \leqslant ghg \ .$$

Donc $(v \leqslant ghg) \implies (mm^0 \leqslant mghgm^0)$, et $mghgm^0$ est réflexif.

(γ) D'après (b), on a $u \leqslant I(gu)$, ou $i^0 i \leqslant m^0 m$. D'après ([4], 3.3.3***), on a $i^0 = m^0 mi^0$, et mi^0 est une injection. On a

$$im^0.mghgm^0.mi = ighgi^0 = igi^0.ihi^0.igi^0$$

(car $ghg = guhug$), produit de trois équivalences dans $A//i$, telles que $igi^0 \leqslant ihi^0$. Par suite, ce produit vaut ihi^0 ([4], 3.5.7 (c)).

(δ) Posons $r' = mghgm^0$, équivalence, d'après (β). Si $i'^0 = mi^0$, $m'^0 = mm^0$ (neutre), alors i'^0 et m'^0 sont des injections, et, d'après (3.1 (b)), $x = tmi^0 s^0 = tm'i'^0 s^0$ est une bijection si, et seulement si, $mm^0 \leqslant I(r'i'^0)$ (c'est-à-dire si $r'u' \in SD$). Or

$$\begin{aligned} I(r'u') &= I(mghgm^0 mi^0) = I(mghgi^0) = I(mguhugi^0) = I(mgi^0.ihi^0.igi^0) \\ &\geqslant I(mgi^0.igi^0) = I(mgu.I(gi^0)) = I(mguv) = I(mgu) \\ &= I(m.I(gu)) = I(mm^0 m) = mm^0 \ . \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.2. - <u>Dans une catégorie modulaire, soient</u> (q_1 , q_2) <u>une congruence pour</u> $a = A_2 aA_1$, (u_2 , u_1) <u>un couple stable pour</u> a, <u>avec</u> $u_k = i_k^0 i_k$ $(k = 1 , 2)$, h_k <u>des endomorphismes symétriques et transitifs de</u> A_k, <u>tels que</u> $I(h_k) = u_k$, <u>et que</u> $(i_1 h_1 i_1^0 , i_2 h_2 i_2^0)$ <u>soit une congruence pour le morphisme induit</u> $a' = i_2 ai_1^0$. <u>On suppose, de plus, que</u> $i_k q_k i_k^0 \leqslant i_k h_k i_k^0$, <u>et on désigne par</u> $v_k = m_k^0 m_k = I(q_k u_k)$ <u>la saturation de</u> u_k <u>par</u> q_k.

(a) $(m_1 q_1 h_1 q_1 m_1^0 , m_2 q_2 h_2 q_2 m_2^0)$ <u>est une congruence pour le morphisme</u> $a'' = m_2 am_1^0$, <u>induit de</u> a <u>dans la saturation du couple stable</u> (u_2 , u_1) <u>par</u> (q_1 , q_2) .

(b) <u>Si</u> s_k <u>et</u> t_k <u>sont des surjections, telles que</u> $s_k^0 s_k = i_k h_k i_k^0$, $t_k^0 t_k = m_k q_k h_k q_k m_k^0$, <u>les morphismes</u> a''' <u>et</u> b''' <u>sont isomorphes</u> :

$$a''' = ((A_2//i_2)/s_2) \quad s_2 i_2 ai_1^0 s_1^0 \quad ((A_1//i_1)/s_1) \quad ,$$

$$b''' = ((A_2//m_2)/t_2) \quad t_2 m_2 am_1^0 t_1^0 \quad ((A_1//m_1)/t_1) \quad .$$

(c) <u>Dans le cas des algèbres universelles, soient</u> A_k <u>une algèbre universelle,</u> q_k <u>une congruence dans</u> A_k , U_k <u>une sous-algèbre de</u> A_k , h_k <u>une congruence de</u> U_k <u>telle que</u> $q_k \cap (U_k \times U_k) \subseteq h_k$. <u>Si</u> V_k <u>est la saturation de</u> U_k <u>par</u> q_k , <u>alors</u> $q_k h_k q_k \cap (V_k \times V_k)$ <u>est une congruence pour</u> V_k , <u>et on a l'isomorphisme</u>

$$V_k/(q_k h_k q_k \cap (V_k \times V_k)) \simeq U_k/(h_k \cap (U_k \times U_k)) \quad .$$

<u>Démonstration.</u>

(a) La saturation (v_2 , v_1) du couple stable (u_2 , u_1) par la congruence (q_1 , q_2) est un couple stable pour a , d'où l'existence de a'' ([4], 3.8.6 (a)). D'après (4.1 (d) (β)), $m_k q_k h_k q_k m_k^0$ est une équivalence. Il faut prouver que $(m_1 q_1 h_1 q_1 m_1^0 , m_2 q_2 h_2 q_2 m_2^0)$ est une congruence pour a'' , c'est-à-dire qu'on a

(6) $$m_2 am_1^0 . m_1 q_1 h_1 q_1 m_1^0 \leqslant m_2 q_2 h_2 q_2 m_2^0 . m_2 am_1^0 \quad .$$

Mais

$$(v_k = I(q_k u_k)) \implies (v_k q_k = (q_k u_k q_k \wedge A) q_k = q_k u_k q_k^2 \wedge q_k = q_k u_k q_k)$$

([4], 3.8.1 (b)), et de même $q_k v_k = q_k u_k q_k$. Donc (6) se réduit à

(6') $$m_2 aq_1 u_1 q_1 h_1 q_1 m_1^0 \leqslant m_2 q_2 h_2 q_2 u_2 q_2 am_1^0 \quad .$$

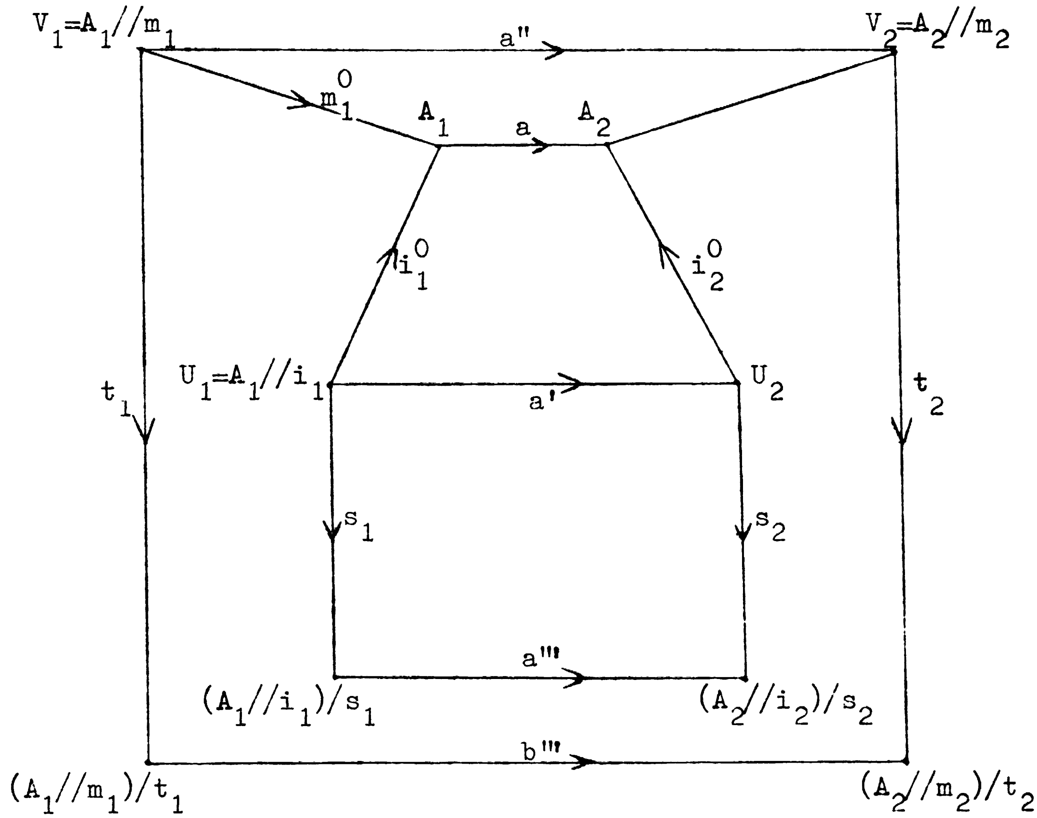
Comme, par hypothèse, $i_k q_k i_k^0 \leqslant i_k h_k i_k^0$, tout revient à prouver ([4], 3.5.7 (b))

(6") $$m_2 aq_1 h_1 q_1 m_1^0 \leqslant m_2 q_2 h_2 q_2 am_1^0 \quad .$$

Or, en utilisant le fait que (q_1 , q_2) est une congruence pour a , que (u_2 , u_1) est un couple stable pour a , et que $(i_1 h_1 i_1^0 , i_2 h_2 i_2^0)$ est une congruence pour $i_2 ai_1^0$, il vient

$$\begin{aligned} m_2\, a q_1\, h_1\, q_1\, m_1^0 &\leqslant m_2\, q_2\, a h_1\, q_1\, m_1^0 = m_2\, q_2\, a u_1\, h_1\, q_1\, m_1^0 \\ &\leqslant m_2\, q_2\, u_2\, a h_1\, q_1\, m_1^0 = m_2\, q_2\, i_2^0\, i_2\, a i_1^0\, i_1\, h_1\, i_1^0\, i_1\, q_1\, m_1^0 \\ &\leqslant m_2\, q_2\, u_2\, h_2\, a u_1\, q_1\, m_1^0 = m_2\, q_2\, h_2\, a u_1\, q_1\, m_1^0 \leqslant \cdots \\ &\leqslant m_2\, q_2\, h_2\, u_2\, a q_1\, m_1^0 \leqslant m_2\, q_2\, h_2\, u_2\, q_2\, a m_1^0 \\ &= m_2\, q_2\, h_2\, q_2\, a m_1^0 . \end{aligned}$$

(b) L'existence du morphisme b''' est assurée par (a), et les sources et buts de a''' et b''' sont respectivement en bijection, d'après (4.1 (d) (δ)).



(Proposition 4.2)

PROPOSITION 4.3 (Lemme de Zassenhauss).

(a) Soient, dans une catégorie modulaire, deux couples stables (u_2', u_1') et (u_2'', u_1'') pour $a = A_2\, a A_1$, leur intersection $(u_2, u_1) = (u_2' u_2'', u_1' u_1'')$, avec $u_k = i_k^0\, i_k$. Soient g_k', g_k'' des endomorphismes symétriques et transitifs de A_k, tels que $I(g_k') = u_k'$, $I(g_k'') = u_k''$, de façon que

$(i_1'\, g_1'\, i_1'^0 , i_2'\, g_2'\, i_2'^0)$ soit une congruence pour $i_2'\, a i_1'^0$,

$(i_1''\, g_1''\, i_1''^0 , i_2''\, g_2''\, i_2''^0)$ soit une congruence pour $i_2''\, a i_1''^0$, et soient encore $h_k = A_k h_k A_k$, symétriques et transitifs, tels que $(i_1 h_1 i_1^0 , i_2 h_2 i_2^0)$ soit une congruence pour $i_2 a i_1^0$, et vérifiant

$$i_k g'_k i_k^0 \leqslant i_k h_k i_k^0 \quad \text{et} \quad i_k g''_k i_k^0 \leqslant i_k h_k i_k^0 \;.$$

Dans ces conditions, on pose

$$I(g'_k i_k^0) = v'_k = m'^0_k m'_k \; ; \qquad I(g''_k i_k^0) = v''_k = m''^0_k m''_k \;,$$

$$i_k h_k i_k^0 = s_k^0 s_k \; ; \qquad m'_k g'_k h_k g'_k m'^0_k = t'^0_k t'_k \; ; \qquad m''_k g''_k h_k g''_k m''^0_k = t''^0_k t''_k \;,$$

(avec $k = 1 , 2$; $i'^0_k , i''^0_k , m'^0_k , m''^0_k$ injections ; $i'^0_k i'_k = u'_k$; $i''^0_k i''_k = u''_k$, et s_k , t'_k , t''_k surjections).

Moyennant ces hypothèses, les trois morphismes (a''') , $(b')'''$, $(b'')'''$ sont isomorphes :

$$(a''') = ((A_2//i_2)/s_2) \quad s_2 i_2 a i_1^0 s_1^0 \quad ((A_1//i_1)/s_1) \;,$$

$$(b')''' = ((A_2//m'_2)/t'_2) \quad t'_2 i'_2 a i'^0_1 t'^0_1 \quad ((A_1//m'_1)/t'_1) \;,$$

$$(b'')''' = ((A_2//m''_2)/t''_2) \quad t''_2 i''_2 a i''^0_1 t''^0_1 \quad ((A_1//m''_1)/t''_1) \;.$$

(b) En termes d'algèbre universelle, la proposition s'énonce ainsi :

Soient deux sous-algèbres U' , U'' d'une algèbre universelle A , g' une congruence dans U' , g'' une congruence dans U'' , et h une congruence dans $U = U' \cap U''$, contenant $g' \cap (U \times U)$ et $g'' \cap (U \times U)$. Si V' et V'' sont respectivement la saturation de U par g' , et par g'' , alors $g'hg' \cap (V' \times V')$ est une congruence dans V' , $g''hg'' \cap (V'' \times V'')$ est une congruence dans V'' , et les algèbres quotients

$$U/h \;, \qquad V'/(g'hg' \cap (V' \times V')) \;, \qquad V''/(g''hg'' \cap (V'' \times V'')) \;,$$

sont isomorphes.

(c) Dans le cas particulier où A est un groupe, le théorème prend la forme suivante :

Soient U' et U'' deux sous-groupes de A , $U = U' \cap U''$, H un sous-groupe normal de U , G' un sous-groupe normal de U' , G'' un sous-groupe normal de U'' , tels que $G' \cap U'' \subseteq H$, $G'' \cap U' \subseteq H$, on pose $V' = G'U$, $V'' = G''U$, et, dans ces conditions, les trois groupes suivants sont isomorphes :

$$(U' \cap U'')/H \;, \qquad (G'(U' \cap U''))/G'H \;, \qquad (G''(U' \cap U''))/G''H \;.$$

Démonstration.

(a) En remplaçant, dans (4.2), A_k et q_k par A_k/i'_k et $i'_k\, g'_k\, i'^0_k$, on voit que (a''') et (b')''' sont isomorphes. On prouve de même que (a''') et (b'')''' sont isomorphes.

5. Premier théorème d'isomorphisme dans les catégories modulaires vérifiant (K-i).

L'usage des catégories à involution permet de généraliser la forme que prend le premier théorème d'isomorphisme dans les catégories où il existe des noyaux (par exemple, les catégories de groupes, commutatifs ou non, avec ou sans opérateurs).

PROPOSITION 5.1. - *Soit* E *une catégorie modulaire vérifiant l'axiome* (K-i).

(a) *Si* $f \in IG$, *on a*

$$K(gf) = I(f^0(I(f) \wedge K(g))) \quad .$$

(b) *Soit une surjection* $s = (G/s)/sG$, *et soit une injection* i^0 *vérifiant* $i^0\, i = K(s)$. *On a*

$$s.K(s)s^0 = w(G/s) \qquad (i^0 = \mathrm{Ker}\ s) \quad .$$

(c) *Soit* s' *une deuxième surjection* : $((G/s)/s') \;\; s' \;\; (G/s)$. *On pose*

$$K(s') = i'^0\, i' \ , \qquad K(s's) = j^0\, j \ ,$$

où $i^0 = Gi^0\, H$, $i'^0 = (G/H)i'^0\, H' = \mathrm{Ker}\ s'$, $j^0 = Gj^0\, H'' = \mathrm{Ker}\ s's$.

(α) *Il existe une surjection* $t = H'tH''$, *telle que*

(7) $$i'^0\, t = sj^0 \ , \qquad \textit{avec} \quad i'^0\, i' = I(sj^0)$$

(*c'est-à-dire* $H' = s(H'')$). *On a*

(8) $$s.K(s's)s^0 = K(s') \quad ,$$

(9) $$t = i'sj^0 \quad ,$$

(10) $$(\mathrm{Ker}\ s')t = s.\mathrm{Ker}(s's) \quad .$$

(β) *Si* $k^0\, k = (\mathrm{Ker}\ t)^0\, \mathrm{Ker}\ t = K(i'sj^0)$, *on a*

(11) $$j^0\, k^0 = i^0 \quad ,$$

ou

(11') $$(\mathrm{Ker}\ s's)\ \mathrm{Ker}\ t = \mathrm{Ker}\ s \quad ,$$

ou encore (notations de [4], 4.5.5)

(11'') $$H' = H''/H \qquad \textit{et} \qquad (G/H)/H' = (G/H)/(H''/H) = G/H''$$

(*premier théorème d'isomorphisme* ; [4], B.13, *et* 4.7.5).

Application (immédiate de (b)). - Si A est un sous-groupe normal d'un groupe G, et s l'application canonique de G sur G/A, alors $s(A) = \{e\}$ et $A/A = \{e\}$, si e est l'élément neutre de G.

Démonstration.

(a) On a

$$I(f^0.(I(f) \wedge K(g))) = I(f^0(I(f).K(g))) = I(f^0\ ff^0.K(g)) = I(f^0\ K(g)) = K(gf) \quad ,$$

car $f \in IG$ est régulier.

(b) On a

$$sK(s)s^0 = si^0\ is^0 = s(s^0\ w(G/s)s \wedge G)s^0 = \dots$$
$$= (ss^0\ w(G/s)s \wedge s)s^0 = (w(G/s)s \wedge s)s^0 = w(G/s)ss^0 = w(G/s) \ .$$

(c) (α) On a

$$K(s's) = I(s^0\ K(s')) = I(s^0\ i'^0) = j^0\ j \quad .$$

Par suite,

$$sK(s's)s^0 = s(s^0\ i'^0\ i's \wedge G)s^0 = (i'^0\ i's \wedge s)s^0 = i'^0\ i'ss^0 = i'^0\ i' = K(s') \quad ,$$

ce qui prouve (8). Donc l'application $f = sj^0$ est telle que $ff^0 = i'^0\ i' = K(s')$, et donc $I(f) = K(s')$. Montrons que $i'f = i'sj^0 = t$ est une surjection. On a $t \in SD$, car $i'^0\ i' = I(f)$ ([4], 38.2 (a)), $t \in IG$, car il en est ainsi de i', s, j^0. Enfin, $(t^0\ t = js^0\ i'^0\ i'sj^0 = f^0\ I(f)f = f^0\ f) \implies (t \in SG)$, ce qui prouve (7), (8), (9), (10).

(c) (β) On a

$$j^0\ k^0\ kj = j^0\ K(t)j = j^0\ K(i'sj^0)j = j^0\ K(sj^0)j = j^0\ I(ji^0)j$$
$$= j^0\ ji^0\ ij^0\ j = K(s's) \wedge K(s) = K(s) \ .$$

Donc $j^0\ k'kj = i^0\ i$, et $(\mathrm{Ker}\ s's)\ \mathrm{Ker}\ t = \mathrm{Ker}\ s$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "\mathrm{Ker}\ t"'] \arrow[dr, "\mathrm{Ker}\ s = i^0"] & \\
H'' \arrow[r, "j^0 = \mathrm{Ker}\ s's"'] \arrow[d, "t"'] & G \arrow[d, "s"] \\
H' \arrow[r, "i'^0 = \mathrm{Ker}\ s'"'] & G/H \arrow[d, "s'"] \\
& (G/H)/H'
\end{tikzcd}$$

(Proposition 5.1)

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRINKMANN (H. B.). - Relations for exact categories, J. of Algebra, t. 13, 1969, p. 465-480.

[2] COHN (P. M.). - Universal algebra. - New York and London, Harper and Row, 1965 (A Harper international Student Reprint).

[3] GRÄTZER (G.). - Universal algebra. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1968 (University Series in higher Mathematics).

[4] LÉVY-BRUHL (J.). - Introduction aux structures algébriques. - Paris, Dunod, 1968 (Monographies universitaires de Mathématiques, 32).

[5] MACLANE (S.). - An algebra of additive relations, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 1043-1051.

[6] PUPPE (D.). - Korrespondenzen in Abelschen Kategorien, Math. Annalen, t. 148, 1962, p. 1-30.

[7] PUPPE (D.) und BRINKMANN (H. B.). - Abelsche und exakte Kategorien. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 96).

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Jacques LÉVY-BRUHL
280 boulevard Raspail
75 - PARIS 14