Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alain Bouvier

Demi-groupes présimplifiables

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 6, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 6, 17 p.

11 janvier 1971

DEMI-GROUPES PRÉSIMPLIFIABLES

par Alain BOUVIER

Pour étudier la factorisation dans les demi-groupes (commutatifs et non commutatifs), nous avons cherché à généraliser la notion de demi-groupe simplifiable.

Nous l'avons fait en deux temps : en introduisant, d'abord les demi-groupes de type (R) ([1] et [2]), puis les demi-groupes présimplifiables que nous présentons ici.

En fait, si la notion de demi-groupe présimplifiable généralise la notion de demi-groupe simplifiable, nous verrons que la présimplifiabilité à gauche généralise la D^1-simplifiabilité à gauche.

Nous nous bornerons ici, à introduire les demi-groupes présimplifiables, et à préciser leurs liens avec d'autres types de demi-groupes. Nous donnerons quelques applications immédiates à la divisibilité, mais les problèmes de factorisation dans les demi-groupes ne seront pas abordés.

1. Demi-groupes présimplifiables à gauche.

Notations. - Soit D un demi-groupe. On désigne par :

$Z_g(D)$ ou Z_g l'ensemble éventuellement vide des zéros à gauche de D ; s'il n'est pas vide, c'est un idéal bilatère.

$N_d(D)$ ou N_d l'ensemble éventuellement vide des éléments neutres à droite dans D ; s'il n'est pas vide, c'est un sous-demi-groupe de D .

Si D n'est pas unitaire, on pose $U_d = \emptyset$. Si D est unitaire, U_d est l'ensemble des éléments de D inversibles à droite. C'est un sous-demi-groupe de D .

On pose $I_d = \{x \in D \ ; \ \exists\, y \in D \ , \ xy \in N_d\}$. C'est l'ensemble des éléments de D qui sont inversibles à droite par rapport à un élément neutre à droite. Il est clair que $I_d \supseteq N_d$, et que $I_d = \emptyset \iff N_d = \emptyset$.

Si D est unitaire, $I_d = U_d$.

I_d est stable et consistant à gauche :

- Si $x , y \in I_d$, il existe $x' , y' \in D$ et $\sigma , \tau \in N_d$ tels que $xx' = \sigma$ et $yy' = \tau$. Alors, $xyy'x' = x\tau x' = xx' = \sigma \in N_d$.
- Si $xy \in I_d$, il existe $z \in D$ tel que $(xy)z \in N_d$. Donc $x(yz) \in N_d$, $x \in I_d$.

<u>Définition</u>. - On dit qu'un demi-groupe D est <u>présimplifiable à gauche</u>, si,

$$(\forall d \in D) \quad (\forall d' \in D) \qquad (dd' = d \implies d \in Z_g \text{ ou } d' \in I_d) \ .$$

<u>Exemples</u>.

1° Un zéro-demi-groupe à gauche D [4] ($D = Z_g$) est présimplifiable à gauche.

2° Un groupe est présimplifiable à droite et à gauche.

3° Le demi-groupe multiplicatif des anneaux commutatifs suivants sont présimplifiables : $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ avec p premier et $n \geq 1$; $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ (muni du produit direct) où $n \geq 2$ et $m \geq 2$.

4° $\mathbb{Z}$, muni de la loi $x \star y = x|y|$, est présimplifiable à gauche.

5° $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, muni de la loi $(a , b) \star (c , d) = (ac , ad)$, est présimplifiable à gauche.

6° Si D est simplifiable, si G est un groupe, si l'on définit sur $D \cup G$ une loi $\star$ de la façon suivante : elle prolonge celles de D et G , et, si $x \in D$ et $g \in G$, $x \star g = g \star x = x$. Alors, D est présimplifiable à droite et à gauche.

Nous verrons d'autres exemples par la suite.

<u>Propriétés immédiates</u>.

(a) En général, un sous-demi-groupe d'un demi-groupe présimplifiable à gauche n'est pas nécessairement présimplifiable à gauche.

(b) Le produit direct [4] de deux demi-groupes présimplifiables à gauche n'est pas nécessairement présimplifiable à gauche.

(c) Si I est un idéal bilatère d'un demi-groupe D présimplifiable à gauche, le demi-groupe quotient de Rees D/I [4] est présimplifiable à gauche. En effet, d'une part, $x \in I_d(D) \implies \overline{x} \in I_d(D/I)$. D'autre part, $\overline{xy} = \overline{x}$ entraîne $x \in I$, donc $\overline{x} = 0$ ou $xy = x$. Dans ce cas, $x \in Z_g \subseteq I$ (absurde) ou $y \in I_d(D)$, donc $\overline{y} \in I_d(D/I)$.

(d) Les idempotents éventuels d'un demi-groupe présimplifiable à gauche sont des éléments de $Z_g \cup I_d$.

Nous préciserons, au paragraphe 2, les liens entre simplifiabilité et présimplifiabilité. Toutefois, on peut déjà remarquer qu'<u>un demi-groupe simple à droite, et simplifiable à gauche, est un groupe à droite</u> [4], mais n'est pas nécessairement un groupe (c'est le produit direct d'un groupe et d'un zéro-demi-groupe à droite). Par contre, on a le résultat suivant :

1.1. THÉORÈME. - Tout demi-groupe simple à droite, et présimplifiable à gauche, est un groupe.

Démonstration. - Le résultat est évident, si $\text{Card } D = 1$. On suppose maintenant que $\text{Card } D > 1$. Soient x et y deux éléments de D. Puisque D est simple à droite, $xD = yD = D$. Donc il existe x' et y' dans D tels que $x = yy'$ et $y = xx'$. Alors

$$x = xx'y' \quad .$$

Comme D est présimplifiable à gauche, cela entraîne

$$x \in Z_g \qquad \text{ou} \qquad x'y' \in I_d \quad .$$

Le premier cas ne peut pas se produire ; sinon, $D = xD = \{x\}$. On a donc nécessairement $x'y' \in I_d$. Cela prouve que N_d n'est pas vide. Comme D est simple à droite, si $e \in N_d$, pour tout $x \in D$, $e \in xD$, donc tout élément de D est inversible à droite par rapport à l'élément neutre à droite e.

Dans un demi-groupe unitaire, un élément inversible à droite n'est pas nécessairement inversible à gauche. En particulier, si $U = U_d \cap U_g$, on ne peut pas affirmer que U est consistant (c'est-à-dire que $xy \in U \implies x \in U$ et $y \in U$). Dans les demi-groupes présimplifiables à gauche, la situation est plus favorable.

1.2. THÉORÈME. - Dans un demi-groupe présimplifiable à gauche, $U_d = U_g$, et U est consistant dans D.

Démonstration.

1° Si D n'est pas unitaire, on a $U_g = U_d = \emptyset$, et $U = \emptyset$ est consistant dans D.

2° Supposons D unitaire. Si $\text{Card } D = 1$, le résultat est évident. On suppose donc que $\text{Card } D > 1$. Montrons que $U_g \subseteq U_d$.

Soit $u \in U_g$; par définition, il existe $v \in D$ tel que $vu = 1$. Alors, $(uv)^2 = uvuv = uv$. Comme D est présimplifiable à gauche, deux cas sont possibles : $uv \in Z_g$ ou $uv \in I_d$. Le premier cas ne peut pas se réaliser ; sinon, comme Z_g est un idéal bilatère, $uv \in Z_g \implies 1 = v(uv)u \in Z_g$, donc $D = \{1\}$ (absurde).

On a donc $uv \in I_d$, c'est-à-dire, puisque D est unitaire,

$$uv \in U_d \implies u \in U_d \quad .$$

3° Il est bien connu que $U_g \subseteq U_d \implies U_g = U_d$.

4° Puisque U_d et U_g sont respectivement consistants à gauche et à droite, U

est consistant.

On note $\mathcal{R}$ l'équivalence de Green [4], définie par

$$a \mathcal{R} b \iff aD^1 = bD^1 \quad ,$$

et par Rx la classe de x modulo $\mathcal{R}$. Dans un demi-groupe présimplifiable à gauche, les classes de Green modulo $\mathcal{R}$ sont entièrement connues.

1.3. THÉORÈME. - Si x est un élément d'un demi-groupe présimplifiable à gauche, on a :

$Rx = \{x\}$, si $I_d = \emptyset$;
$Rx = xI_d$, si $I_d \neq \emptyset$.

Démonstration.

1° On a évidemment $\{x\} \subseteq Rx$. Si $I_d \neq \emptyset$, si $u \in I_d$, et si $y = xu$, comme il existe $v \in D$ et $e \in N_d$ tels que $uv = e$, $yv = xuv = xe = x$. Donc $y \in Rx$, $xI_d \subseteq Rx$.

2° Réciproquement, si $y \in Rx$, il existe a , $b \in D^1$ tels que $x = ya$ et $y = xb$. Alors $x = xba$. Deux cas sont à considérer :

(a) Si a ou b est égal à 1 (élément neutre formel ou non), $y = x$.
(b) Si a et b sont des éléments de D , comme D est présimplifiable à gauche, $x = xba \implies x \in Z_g$ ou $ba \in I_d$.
Si $x \in Z_g$, alors $Rx = \{x\}$, et si I_d n'est pas vide, on a bien $Rx = \{x\} = xI_d$.
Si $x \notin Z_g$, alors $ba \in I_d$, donc $b \in I_d$, et $y = xb \in xI_d$.

Définition. - On dit que D est un demi-groupe de type (R) à gauche, si,

$$(\forall\ d \in D) \quad (\forall\ d' \in D) \qquad (dd' = d \implies d \in Z_g \text{ ou } d' \in N_d) \quad .$$

Par exemple, $\underset{\sim}{Q}$, muni de la loi $(a/b) \star (c/d) = ac/b$, est de type (R) à gauche.

Un demi-groupe de type (R) à gauche est présimplifiable à gauche. L'exemple ci-contre prouve que la réciproque est inexacte. Même dans le cas commutatif, elle n'est pas vraie : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est présimplifiable. Il n'est pas de type (R) , puisque $2.5 = 2$ avec $2 \neq 0$ et $5 \neq 1$ (mais $5 \in U$).

	1	u	a	b	c	d
1	1	u	a	b	c	d
u	u	1	a	b	c	d
a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	a	b	d	d
d	d	d	a	b	d	d

Propriétés immédiates. - Soit D un demi-groupe de type (R) à gauche.

L'ensemble des idempotents éventuels de D est $Z_g \cup N_d$.

Si I est un idéal bilatère de D, D/I est un demi-groupe de type (R) à gauche.

Si S est un sous-demi-groupe de D, S est de type (R) à gauche.

D'après le théorème 1.1, tout demi-groupe simple à droite et de type (R) à gauche est un groupe ([1], théorème 2).

D'après le théorème 1.2, dans un demi-groupe de type (R) à gauche, on a $U_d = U_g$, et U est consistant dans D [1].

1.4. THÉORÈME. - Tout demi-groupe simple à gauche est de type (R) à gauche.

Démonstration. - Soit D un demi-groupe simple à gauche. Si $dd' = d$, comme $Dd = D$, si $x \in D$, il existe $d'' \in D$ tel que $x = d''d$. Alors

$$xd' = (d''d)d' = d''(dd') = d''d = x , \qquad d' \in N_d .$$

On pose $Z = Z(D) = Z_g \cap Z_d$ et $N = N(D) = N_g \cap N_d$.

Définition. - On dit que D est présimplifiable (resp. de type (R)), s'il est présimplifiable à droite et à gauche (resp. de type (R) à droite et à gauche).

Tout demi-groupe de type (R) est présimplifiable.

D est présimplifiable, si, et seulement si,

$$(\forall\ d \in D)\quad (\forall\ d' \in D)\qquad (dd' = d \implies d \in Z \text{ ou } d' \in U) ,$$

$$(\forall\ d \in D)\quad (\forall\ d' \in D)\qquad (dd' = d' \implies d' \in Z \text{ ou } d \in U) .$$

D est de type (R), si, et seulement si,

$$(\forall\ d \in D)\quad (\forall\ d' \in D)\qquad (dd' = d \implies d \in Z \text{ ou } d' \in N) ,$$

$$(\forall\ d \in D)\quad (\forall\ d' \in D)\qquad (dd' = d' \implies d' \in Z \text{ ou } d \in N) .$$

Les idempotents éventuels d'un demi-groupe présimplifiable sont 0 et 1.

Si I est un idéal d'un demi-groupe D présimplifiable (resp. de type (R)), alors D/I est présimplifiable (resp. de type (R)).

1.5. THÉORÈME.

(a) Le demi-groupe multiplicatif de tout anneau intègre est de type (R).

(b) Tout anneau de type (R) unitaire est intègre.

Démonstration.

(a) Si A est un anneau intègre, si $aa' = a$, et si $a' \neq 1$, alors $a = 0$.

Supposons le contraire ; alors

$$(aa' = a) \implies (aa'^2 = aa') \implies (a(a'^2 - a') = 0) \implies (a'^2 = a') .$$

Puisque $a \neq 0$, on a $a' \neq 0$. Si $x \in A$,

$$(a'^2 = a'x) \implies (a'(a'x - x) = 0) \implies (a'x = x) .$$

a' est neutre à gauche ; on verrait de même que a' est neutre à droite, d'où une contradiction.

(b) Si A est un anneau unitaire de type (R) , si $ab = 0$, on peut écrire $b = 1 - b'$. Alors, $a = ab'$, donc $a = 0$ ou $b' = 1$, soit $b = 0$.

Le résultat (b) du théorème précédent est une remarque que P. SAMUEL nous a aimablement communiquée.

THIERRIN [7] a démontré que tout demi-groupe simplifiable, et régulier au sens de von NEUMANN [4], est un groupe. Pour les demi-groupes présimplifiables, on peut énoncer le théorème suivant :

1.6. THÉORÈME. - Soit D un demi-groupe non réduit à un élément.

(a) Si D est sans zéro, régulier et présimplifiable, alors D est un groupe.

(b) Si D possède un zéro, est régulier et présimplifiable, alors D est un groupe avec zéro.

Démonstration.

(a) Soit D un demi-groupe régulier, présimplifiable sans zéro, et non réduit à un élément. Comme D est régulier, si $d \in D$, il existe $x \in D$ tel que $d = dxd$. Comme D est présimplifiable sans zéro, $d = dxd \implies xd \in U \implies d \in U$.

(b) Soit D un demi-groupe régulier, présimplifiable avec zéro, et non réduit à un élément. On a donc $D - Z \neq \emptyset$. Si $d \in D - Z$, de la même façon que plus haut, il existe $x \in D$ tel que $d = dxd$ et $d \in U$.

Remarque. - Si D est un demi-groupe présimplifiable non réduit à un élément, les assertions suivantes sont équivalentes :

D est un groupe ;

D est régulier sans zéro ;

D est simple à gauche ;

D est simple à droite.

1.7. THÉORÈME. - Si D est un demi-groupe périodique présimplifiable, trois cas sont possibles :

(a) D <u>est un groupe</u> ;

(b) D <u>est un demi-groupe nilpotent</u> ;

(c) D <u>est la réunion disjointe d'un groupe consistant dans</u> D <u>et d'un demi-groupe nilpotent</u>.

<u>Démonstration</u>.

Si $\text{Card } D = 1$, D est un groupe. Supposons que $\text{Card } D > 1$.

Si $d \in D$, comme D est périodique, $\langle d \rangle$ est fini. Donc il existe deux entiers r et s tels que

$$1 \leqslant r < s \qquad \text{et} \qquad d^r = d^s \quad .$$

Si D est non unitaire, comme D est présimplifiable, l'égalité précédente entraîne que D possède nécessairement un zéro et que $d^r = 0$. D est un demi-groupe nilpotent.

Si D est unitaire et n'est pas un groupe, le raisonnement que nous avons tenu s'applique à tous les éléments de $D - U$. Le demi-groupe $D - U$ est nilpotent.

SCHWARTZ [6] a montré qu'<u>un demi-groupe périodique est un groupe si, et seulement si, il est simplifiable à gauche avec un seul idempotent</u>. Pour les demi-groupes présimplifiables, le théorème 1.7 permet d'énoncer le corollaire suivant :

1.8. COROLLAIRE. - <u>Un demi-groupe périodique, non réduit à un élément, est un groupe, si, et seulement si, il est présimplifiable sans zéro</u>.

Le théorème 1.7 et le corollaire 1.8 s'appliquent en particulier aux demi-groupes finis, notamment dans le résultat ci-après.

1.9. THÉORÈME. - <u>Pour un demi-groupe fini non réduit à un élément, les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) D <u>est un groupe</u> ;

(b) D <u>est simplifiable</u> ;

(c) D <u>est de type</u> (R) <u>sans zéro</u> ;

(d) D <u>est présimplifiable sans zéro</u>.

2. Demi-groupes D^1-présimplifiables à gauche.

2.1. LEMME. - <u>Pour un demi-groupe</u> D , <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) D^1 <u>est simplifiable à gauche</u> ;

(b) D <u>est simplifiable à gauche, sans élément neutre à gauche autre que</u> 1 <u>éventuellement</u> ;

(c) D <u>est simplifiable à gauche et de type</u> (R) <u>à gauche</u> ;

(d) D <u>est simplifiable à gauche et présimplifiable à gauche</u>.

<u>Démonstration</u>.

Il est bien connu [4] que (a) $\Longleftrightarrow$ (b) .

Il est clair que (c) $\Longrightarrow$ (d) . Montrons que (b) $\Longrightarrow$ (c) . Si d , $d' \in D$, et si $dd' = d$, pour tout $x \in D$, on a

$$(dd'x = dx) \Longrightarrow (d'x = x) \Longrightarrow (x \in N_g) \Longrightarrow (x = 1) \quad .$$

Montrons enfin que (d) $\Longrightarrow$ (b) . Si $x \in N_g(D)$,

$$(x^2 = x) \Longrightarrow (x \in Z_g \quad \text{ou} \quad x \in I_d) \quad .$$

Si $x \in Z_g$, comme $x \in N_g$, on a $D = \{x\}$.

Si $x \in I_d$, on a $N_d \neq \emptyset$, donc, puisque $N_g \neq \emptyset$, $N_d = N_g = \{1\}$ et $x = 1$.

2.2. LEMME. - <u>Si</u> $D \neq Z_g(D)$, <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) D^1 <u>est présimplifiable à gauche</u> ;

(b) D <u>est présimplifiable à gauche, et</u> $N_d = \emptyset$ <u>ou</u> $N_d = N_g = \{1\}$ (<u>condition</u> $[N_d]$) ;

(c) $(\forall\, d \in D)$ $(\forall\, d' \in D)$ $(dd' = d \Longrightarrow d \in Z_g$ <u>ou</u> $d' \in U)$.

<u>Démonstration</u>.

(a) $\Longrightarrow$ (c) . Si d , $d' \in D$ et si $dd' = d$, comme D^1 est présimplifiable à gauche unitaire, on a

$$d \in Z_g(D^1) \qquad \text{ou} \qquad d' \in U(D^1) \quad .$$

Or $Z_g(D^1) = Z_g(D)$, et, si $d' \in U(D^1)$, comme $d' \in D$ et que $U(D^1) = U(D)$ ou que $U(D^1) = \{1\}$, nous voyons que

$$(dd' = d) \Longrightarrow (d \in Z_g(D) \quad \text{ou} \quad d' \in U(D)) \quad .$$

(c) $\Longrightarrow$ (b) . Si $e \in N_d(D)$, puisque $D \neq Z_g(D)$, on a $e \notin Z_g(D)$, donc $e \in U$, soit $e = 1$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Si d , $d' \in D^1$ et si $dd' = d$ avec $d' \neq 1$, on a $d \neq 1$, donc d , $d' \in D$. Alors

$$(dd' = d) \Longrightarrow (d \in Z_g(D) \quad \text{ou} \quad d' \in I_d(D)) = (U_d(D) = U(D)) \quad .$$

Comme $d' \neq 1$, on a nécessairement $d \in Z_g(D) = Z_g(D^1)$ ou $d' \in U(D)$ avec $U(D) = U(D^1)$.

<u>Définition</u>. - Si $D \neq Z_g(D)$ vérifie les assertions équivalentes du lemme 2.2, on dit que D est D^1-<u>présimplifiable à gauche</u>.

On peut résumer les deux lemmes précédents par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{D-simplifiable} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dl] & & D^1\text{-simplifiable} \arrow[d] & \\
\text{Type (R)} \arrow[d] \arrow[drr] & & & D^1\text{-simplifiable à gauche} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Présimplifiable} \arrow[d] & & D^1 \text{ de type (R) à gauche} \arrow[dll] \arrow[d] & & \text{D-simplifiable à gauche} \\
D^1\text{-présimplifiable à gauche} \arrow[dr] & & \text{Type (R) à gauche} \arrow[dl] & & \\
 & \text{Présimplifiable à gauche} & & &
\end{tikzcd}$$

Ce schéma explique, a posteriori, pourquoi la présimplifiabilité généralise la simplifiabilité, mais que la présimplifiabilité à gauche possède des propriétés plus fortes que la simplifiabilité (théorème 1.1, par exemple). En fait, <u>la présimplifiabilité est une généralisation de la</u> D^1-<u>simplifiabilité</u>.

<u>Remarques</u>.

1° D'après le théorème 1.1, dans la classe des demi-groupes simples à droite, toutes les notions du tableau précédent (hormis la simplifiabilité à gauche) sont équivalentes entre elles ainsi qu'à la notion de groupe et de demi-groupe simple à gauche.

2° Dans [1], la condition $[N_d]$ est appelée condition (U). Si D possède un élément simplifiable à gauche, elle est vérifiée.

3° Dans un demi-groupe D^1-présimplifiable à gauche,

$$I_d(D) = U_d(D) = U(D) \quad .$$

Si D est un demi-groupe D^1-simplifiable à gauche, on sait [4] qu'il est de l'un des trois types suivants :

D est un groupe ;

D est simplifiable à gauche sans idempotents ;

D est réunion disjointe d'un groupe et d'un demi-groupe simplifiable à gauche sans idempotents.

Pour les demi-groupes D^1-présimplifiables à gauche, on peut énoncer le théorème ci-dessous.

2.3. THÉORÈME. - Soit D un demi-groupe D^1-présimplifiable à gauche. Il est de l'un des quatre types suivants :

(a) D est un groupe ;

(b) D est un groupe avec zéro ;

(c) D est présimplifiable à gauche sans neutre ;

(d) D est réunion disjointe de deux demi-groupes de classes a et c .

Démonstration. - Soit D un demi-groupe D^1-présimplifiable à gauche, qui n'est pas un groupe, et possède un élément neutre. Posons $D' = D - U$. Si D' possède un élément neutre e ,

$$(e^2 = e) \implies (e \in Z_g(D) \text{ ou } e \in U) .$$

On n'a pas $e \in U$. Si $e \in Z_g$, alors, $D' = \{e\}$, et D est un groupe avec zéro, car si $u \in U$, comme $eu \notin U$, on a $eu = e$.

2.4. THÉORÈME. - Pour un demi-groupe D , les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) D est simple, simplifiable, et possède un idempotent ;

(b) D est simple, de type (R) , et possède un idempotent ;

(c) D est simple, présimplifiable, et possède un idempotent ;

(d) D est un groupe.

Démonstration. - De façon évidente, (d) $\implies$ (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) .

Montrons que (c) $\implies$ (d) . Si Card D = 1 , le résultat est trivial. Supposons que Card D > 1 . Soit e un idempotent de D . Comme D est présimplifiable, on a $e = 0$ ou $e = 1$. On ne peut pas avoir $e = 0$, car D est simple et non réduit à un élément. On a donc $e = 1$. Comme, pour tout $d \in D$, $e \in D = DdD$, d'après le théorème 1.2, $d \in U$.

Remarque. - L'équivalence entre (a) et (d) figure dans [4] (p. 51) ; l'équivalence entre (b) et (d) est dans [2] (théorème 1).

3. Divisibilité dans un demi-groupe D^1-présimplifiable à gauche.

Dans ce paragraphe, nous étendons aux demi-groupes D^1-présimplifiables à gauche les résultats que nous avions établis pour les demi-groupes de type (R) à gauche vérifiant la condition $[N_d]$ [1].

Notations.

${}_D|$, divisibilité à gauche dans D , préordre compatible à gauche, défini par

$$a \;{}_D|\; b \iff b \in aD^1 \iff bD^1 \subseteq aD^1 \quad .$$

$\mathcal{R}$, équivalence associée, compatible à gauche, définie par

$$(a \,\mathcal{R}\, b) \iff (aD^1 = bD^1) \quad .$$

C'est l'équivalence de Green à droite [4]. On note Rx la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

$D/\mathcal{R}$ est ordonné canoniquement par

$$(Ra \leqslant Rb) \iff (bD^1 \subseteq aD^1) \iff (a \;{}_D|\; b) \quad .$$

${}_D|$ est compatible à droite, si, et seulement si,

$$\forall\, a \in D \;,\quad \forall\, b \in D \;,\qquad aD^1\, b \subseteq abD^1 \quad .$$

C'est le cas, par exemple, si D^1 est subcommutatif à gauche [5].

Si D est unitaire, U_d est une classe modulo $\mathcal{R}$ et le plus petit élément de $D/\mathcal{R}$.

$p \in D - U_d$ est <u>irréductible à gauche</u>, si R_p est minimale dans $(D - U_d)/\mathcal{R}$, c'est-à-dire si

$$(a \;{}_D|\; p) \implies (a \in U_d \quad \text{ou} \quad a \,\mathcal{R}\, p) \quad .$$

$p \in D - U_d$ est premier à gauche, si pD^1 est un idéal premier, c'est-à-dire si

$$(p \;{}_D|\; ab) \implies (p \;{}_D|\; a \quad \text{ou} \quad p \;{}_D|\; b) \quad .$$

Si $D/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale, tout élément de $D - U_d$ admet un diviseur à gauche irréductible à gauche (vérification immédiate).

Lorsqu'elle existe, on note $Rx \wedge Ry$ la borne inférieure de Rx et Ry dans $D^1/\mathcal{R}$. Un élément de cette classe est appelé un <u>p. g. c. d. à gauche de</u> x <u>et</u> y .

D'après le théorème 1.3, si D est D^1-présimplifiable à gauche, alors, pour tout $d \in D$,

$$Rd = dU(D^1) \quad .$$

En particulier, <u>si</u> D <u>est sans neutre, chaque</u> $\mathcal{R}$<u>-classe est réduite à un élément.</u>

3.1. THÉORÈME. - <u>Si</u> D <u>est</u> D^1<u>-présimplifiable à gauche, si</u> $_D|$ <u>est compatible à droite, alors</u> :

(a) Rx <u>est neutre à droite dans</u> $D^1/\mathcal{R}$, <u>si, et seulement si,</u> $Rx = U(D^1)$;

(b) $D/\mathcal{R}$ <u>est de type</u> (R) <u>à gauche</u>.

<u>Démonstration</u>.

(a) Si $Rx = U(D^1)$, Rx est neutre à droite dans $D^1/\mathcal{R}$, car, si $d \in D$,

$$Rd\, U(D^1) = dU(D^1)\, U(D^1) = dU(D^1) = Rd \quad .$$

Réciproquement, si Rx est neutre à droite dans $D^1/\mathcal{R}$, pour tout $d \in D$, $Rd\, Rx = Rd$. Comme $D \neq Z_g$, si $d \in D - Z_g$, alors

$$(d \in Rd = Rd\, Rx = Rdx) \implies (\exists\, y \in D^1 \;,\; d = dxy) \quad ,$$

$$xy \in U \implies x \in U \quad .$$

(b) Si $Rd\, Rd' = Rd$, il existe $x \in D^1$ tel que $d = dd'x$. On a donc $d \in Z_g(D)$ ou $d'x \in U(D^1)$, soit

$$Rd \in Z_g(D/\mathcal{R}) \qquad \text{ou} \qquad Rd' = U(D) \quad .$$

<u>Remarques</u>.

1° A priori, on ne peut pas affirmer que $D/\mathcal{R}$ vérifie la condition $[N_d]$.

2° Si D_1 et D_2 sont deux demi-groupes <u>commutatifs</u> présimplifiables, et f un homomorphisme de D_1 dans D_2 , si δ_1 et δ_2 sont les homomorphismes canoniques, le diagramme ci-contre **est fermé commutativement** de façon unique par $\bar{f}$,

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_1"'] & D_2 \arrow[d, "\delta_2"] \\ D_1/\mathcal{R}_1 \arrow[r, "\bar{f}"] & D_2/\mathcal{R}_2 \end{tikzcd}$$

$$\bar{f} : R_x \longmapsto R_{f(x)} \quad .$$

Comme $D_1/\mathcal{R}_1$ et $D_2/\mathcal{R}_2$ sont des demi-groupes commutatifs de type (R) , on peut définir un foncteur Φ de la catégorie des demi-groupes présimplifiables, dans la catégorie des demi-groupes commutatifs, qui à D associe $D/\mathcal{R}$.

Si f est surjective, ou si f est un épimorphisme, il en est de même de $\Phi(f)$.

Puisque $(D/\mathcal{R})/\mathcal{R}$ est isomorphe à $D/\mathcal{R}$, on peut encore dire que $\Phi^2 = \Phi$.

<u>Rappels</u>. - Dans un demi-groupe ordonné D , on pose $b{:}a = \{x \in D \;;\; ax \leqslant b\}$. On dit qu'un demi-groupe ordonné unitaire est <u>intégralement clos</u>, si, e étant l'élément neutre de D , pour tout $d \in D$, $d{:}d = \{e\}$.

3.2. THÉORÈME. - Si D est unitaire, si ${}_D|$ est compatible à droite, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $D/\mathcal{R}$ est intégralement clos ;

(b) $D/\mathcal{R}$ est de type (R) à gauche sans zéro à gauche, ou est réduit à un élément.

Démonstration.

(a) ==> (b) . Supposons que $D/\mathcal{R}$ ne soit pas réduit à un élément, et montrons qu'il est de type (R) à gauche sans zéro à gauche.

Si $Rd\ Rd' = Rd$, alors, $Rd' \in Rd{:}Rd = \{e_{D/\mathcal{R}}\}$. Donc

$$Rd' = e_{D/\mathcal{R}} \ .$$

$D/\mathcal{R}$ est sans zéro à gauche ; sinon, le raisonnement précédent montre qu'il serait aussi neutre, donc $D/\mathcal{R}$ serait réduit à un élément, ce que nous avons exclu.

(b) ==> (a) . Si $Rx \in Rd{:}Rd$, par définition,

$$(Rdx = Rd\ Rx \leqslant Rd) \implies (\exists\, y \in D\ ,\ \ dxy = d) \ .$$

Alors

$$Rd\ Rxy = Rd \ .$$

Comme $D/\mathcal{R}$ est de type (R) à gauche, sans zéro à gauche, ou est réduit à un élément, puisque D est unitaire, on a

$$(Rxy = U(D)) \implies (Rx = U(D) = e_{D/\mathcal{R}}) \ .$$

3.3. THÉORÈME. - Si D est de type (R) à gauche, si $d \notin Z_g$, alors

$$\text{Card } Rd = \text{Card } U(D^1) \ .$$

Démonstration. - Si D est de type (R) à gauche, si $d \notin Z_g$, la surjection $u \longmapsto du$ de $U(D^1)$ sur Rd (théorème 1.3) est injective, car

$$(du = dv) \implies (duv^{-1} = d) \implies (uv^{-1} = 1) \implies (u = v) \ .$$

Un élément premier à gauche n'est pas nécessairement irréductible à gauche ; un élément irréductible à gauche n'est pas nécessairement premier à gauche. Les deux lemmes suivants donnent des conditions suffisantes pour qu'une notion entraîne l'autre.

Nous dirons que x est non nul, s'il n'est pas égal au zéro bilatère éventuel de D . On appelle élément invariant à gauche [5], tout élément $x \in D$, tel que

$$xD^1 \subseteq D^1 x \ .$$

3.4. LEMME. - Soit p un élément premier à gauche non nul. Pour que p soit irréductible à gauche, il suffit que D soit D^1-présimplifiable à droite, et que p soit invariant à gauche.

Démonstration. - Raisonnons par l'absurde. Supposons que p soit un élément premier à gauche, vérifiant les hypothèses du lemme, et réductible à gauche. Par définition, il existe $a \notin U \cup Rp$ tel que $Ra < Rp$. Donc il existe $d \in D^1$ tel que $p = ad$. Comme p est premier à gauche,

$$(p \,_D| \, ad) \implies (p \,_D| \, a \text{ ou } p \,_D| \, d) \ .$$

Puisque $a \notin Rp$ et que $a \,_D| \, p$, on ne peut pas avoir $p \,_D| \, a$. Donc $p \,_D| \, d$, c'est-à-dire $\exists \, b \in D^1$, $pb = d$. Alors

$$p = ad = apb \ .$$

Comme p est invariant à gauche, il existe $b' \in D^1$ tel que

$$pb = b'p \ .$$

Alors, $p = apb = ab'p$. D est D^1-présimplifiable à droite ; donc $p \in Z_d$ ou $ab' \in U$. On ne peut pas avoir $p \in Z_d$; sinon, $pD^1 \subseteq D^1 p = \{p\}$. p serait un zéro bilatère, ce qui est exclu. Par conséquent, $a \in U$, ce qui est contradictoire.

En particulier :

Dans un demi-groupe D^1-subcommutatif à gauche et D^1-présimplifiable à droite, tout élément premier à gauche non nul est irréductible à gauche.

Dans un demi-groupe commutatif présimplifiable, tout élément premier non nul est irréductible.

3.5. LEMME. - Soit p un élément irréductible à gauche. Pour que p soit premier à gauche, il suffit que :

(a) D soit D^1-présimplifiable à gauche ;

(b) $\forall \, d \in D$, $pd \, \mathcal{R} \, dp$;

(c) Les p. g. c. d. existent dans D^1 ;

(d) $c(Ra \wedge Rb) = Rca \wedge Rcb$.

Démonstration. - Soit p un élément irréductible à gauche. Supposons que $p \,_D| \, ab$.

$Ra \wedge Rp$ existe ; posons $Rd = Ra \wedge Rp$. Comme p est irréductible à gauche,

$$(d \,_D| \, p) \implies (Rd = U(D^1) \text{ ou } Rd = Rp) \ .$$

Si $Rd = Rp$, alors $(Rp = Rp \wedge Ra) \implies (p \,_D| \, a)$. Supposons que $p \,_D\nmid \, a$, donc que

$$Rp \wedge Ra = U(D^1) \quad .$$

De même, si $Rb \wedge Rp = Rd'$ et si $p \,{}_D\!\nmid b$, alors

$$Rp \wedge Rb = U(D^1) \quad .$$

Puisque $p \,{}_D| \, pa$, $Rp \wedge Rpa = Rp$. Donc, compte tenu de (d),

$$Rap \wedge Rab = a(Rp \wedge Rb) = aU(D^1) = Ra \quad .$$

En tenant compte de (b), on en déduit

$$Rp \wedge Rab = (Rp \wedge Rpa) \wedge Rab = Rp \wedge (Rap \wedge Rab) = Rp \wedge Ra = U(D^1) \quad .$$

Par ailleurs, $(p \,{}_D| \, ab) \Longrightarrow (Rp \wedge Rab = Rp)$, alors,

$$Rp = U(D^1) \qquad \text{(absurde)} \quad .$$

Remarques.

1° La condition (b) peut être vérifiée dans des demi-groupes non commutatifs. Par exemple, elle l'est dans tout demi-groupe interversif au sens de THIERRIN [8].

2° La condition (d) est imposée par CLIFFORD, dans [3], pour obtenir un résultat du même genre. Cette formule est toujours vraie lorsque c est simplifiable à gauche. Mais elle peut être vraie dans d'autres cas.

On pose $D^* = D - (Z_g \cup Z_d)$. On appelle élément irréductible, tout élément irréductible à droite et à gauche.

En général, si p est irréductible à gauche, il n'est pas vrai que $(p = ab) \Longrightarrow (a \in U \text{ ou } b \in U)$. Par exemple, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 2 est irréductible. Pourtant, on a $2 = 2.4$ avec $2 \notin U$ et $4 \notin U$.

3.6. THÉORÈME. - *Si D est présimplifiable, si $p \in D - U$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) p *est irréductible à gauche* ;

(b) p *est irréductible à droite* ;

(c) p *est irréductible.*

Démonstration. - Il suffit de prouver que (a) $\Longleftrightarrow$ (b) . Pour cela, nous allons montrer que $p \in D - U$ est irréductible à gauche si, et seulement si,

$$(p = ab) \Longrightarrow (a \in U \text{ ou } b \in U) \quad .$$

Tout élément de $D^* - U$ qui vérifie cette condition est trivialement irréductible à gauche.

Si $p \in D^* - U$, si $p = ab$, alors $a \,{}_D| \, p$, donc $a \in U$ ou $a \mathcal{R} p$. Si $a \notin U$, alors $a = pu$ avec $u \in U(D^1)$, donc $p = pub$. Comme $p \notin Z_g$, et que D est présimplifiable, on a $ub \in U$, donc $b \in U$.

Enfin, 0 est irréductible à gauche si, et seulement si, D est un groupe avec zéro, c'est-à-dire si, et seulement si, 0 est irréductible à droite.

Remarques.

1° Plus généralement, dans un demi-groupe D^1-présimplifiable à gauche, tout élément de $D - (Z_g \cup U)$, irréductible à gauche, est irréductible à droite.

2° On constate que la présimplifiabilité supprime la latéralisation de certaines notions. Par exemple, nous avons vu que, dans un demi-groupe présimplifiable :

$Z_g = Z_d$;
$U_g = U_d$;
"Simple à gauche" équivaut à "simple à droite" ;
"Irréductible à gauche" équivaut à "irréductible à droite".

3.7. THÉORÈME. - Si D est D^1-présimplifiable à droite, si $D/\mathcal{R}$ et $D/\mathcal{L}$ vérifient la condition minimale, alors tout élément de $D^* - U$ possède une factorisation en éléments irréductibles à gauche.

Démonstration. - Soit $d \in D^* - U$. Si d est réductible à gauche, puisque d admet un diviseur à gauche irréductible à gauche ($D/\mathcal{R}$ vérifie la condition minimale), d peut s'écrire $d = p_1 d_1$, avec p_1 irréductible à gauche, et $d_1 \in D^* - U$.

Si d_1 est réductible à gauche, on peut l'écrire $d_1 = p_2 d_2$, avec p_2 irréductible à gauche, et $d_2 \in D^* - U$. Ce procédé est fini. Sinon, on pourrait construire deux suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(d_n)_{n\geqslant 1}$, où p_n est irréductible à gauche, $d_n \in D^* - U$, et telles que $d_n = p_{n+1} d_{n+1}$.

La suite $(L_{d_n})_{n\geqslant 1}$ de $D/\mathcal{L}$ est décroissante, donc stationnaire. Comme $D/\mathcal{L}$ vérifie la condition minimale, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $L_{d_n} = L_{d_{n+1}}$.

Donc il existe un élément $y \in D^1$ tel que $d_{n+1} = yd_n$. Alors,

$$d_n = p_{n+1}\, yd_n \quad .$$

Comme D est D^1-présimplifiable à droite et que $d_n \notin Z_d$, on a

$$p_{n+1}\, y \in U \ , \qquad \text{donc} \quad p_{n+1} \in U \quad (\text{absurde}) \quad .$$

3.8. THÉORÈME. - Soit D un demi-groupe présimplifiable fini. Alors :

(a) Si D est intègre, D est, soit un groupe, soit un groupe avec zéro ;

(b) Si D est non intègre, D - U est un demi-groupe nilpotent, dont tout élément possède une factorisation en éléments irréductibles.

Ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire 1.8, du théorème 1.6 et du théorème 3.7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUVIER (Alain). - Demi-groupes de type (R) , demi-groupes commutatifs à factorisation unique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 372-375.

[2] BOUVIER (Alain). - Demi-groupes de type (R) , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 561-563.

[3] CLIFFORD (A. H.). - Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups, Annals of Math., Series 2, t. 39, 1938, p. 594-610.

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Volumes 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[5] COHN (P. M.). - Factorization in general rings and strictly cyclic modules, J. für reine und angew. Math., t. 239-240, 1969, p. 185-200.

[6] SCHWARZ (S.). - Contribution to the theory of torsion semigroups [en russe, avec sommaire en anglais], Czech. math. J., t. 3 (78), 1953, p. 7-21.

[7] THIERRIN (Gabriel). - Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit un groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 376-378.

[8] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1957, p. 93-112.

(Texte reçu le 22 avril 1971)

Alain BOUVIER
Résidence Haute Roche, Bâtiment A-3
5 rue du Centenaire
69 - PIERRE BÉNITE