Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Richard Block

Sur les anneaux différentiablement simples

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 5, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 5, 4 p.

14 décembre 1970

SUR LES ANNEAUX DIFFÉRENTIABLEMENT SIMPLES

par Richard BLOCK

Si B est un anneau (ou algèbre sur K), on dit que B est différentiablement simple s'il ne contient aucun idéal bilatère propre I, pour lequel $dI \subseteq I$ pour chaque dérivation d de B, et si $B^2 \neq 0$. Le résultat suivant était le théorème principal de l'auteur dans [1].

THÉORÈME. - Soit B un anneau différentiablement simple, contenant un idéal bilatère minimal ; alors B est ou simple ou un anneau de groupe $S[G]$, où S est simple et de caractéristique p premier, et G est le produit direct de n groupes cycliques d'ordre p (réciproquement, tel B est toujours différentiablement simple).

Ce théorème reste valable sans aucune condition d'associativité pour B (et a des conséquences importantes pour les algèbres de Lie et pour les algèbres flexibles). En principe, les résultats qui sont valables pour toutes les algèbres non associatives admettent une généralisation aux Ω-algèbres (ou anneaux à multi-opérateurs) [2], c'est-à-dire des groupes additifs abéliens sur lesquels une famille Ω opère de façon multilinéaire.

Le but de ce travail est de montrer qu'on peut étendre le résultat ci-dessus aux Ω-algèbres. Soit B une Ω-algèbre. Une dérivation d de B est une application additive de A dans A telle que

$$d\omega b_1 \dots b_n = \sum_i \omega b_1 \dots (db_i) \dots b_n , \quad 1 \leqslant i \leqslant n , \quad \forall\, \omega \in \Omega , \ b_j \in B ; \ n = n(\omega) .$$

On dit que B est différentiablement simple s'il ne contient aucun idéal bilatère propre I pour lequel $(\operatorname{der} B)I \subseteq I$, et si la condition suivante de non-nullité est satisfaite :

$$(\Omega') \quad {}^{t}B \neq 0 , \quad \forall\, t > 0 ,$$

où $\Omega' C$ (pour $C \subseteq B$) $= \{\omega(c_1 , \dots , c_n) \mid c_i \in C , \ \omega$ tel que $n(\omega) \geqslant 2\}$ (s'il n'y a aucun ω pour lequel $n(\omega) = 1$, on peut remplacer cette condition par $\Omega B \neq 0$).

THÉORÈME. - Le théorème ci-dessus reste valable pour les Ω-algèbres.

Pour démontrer ce théorème, nous donnons d'abord quelques résultats sur les aneaux associatifs. Soit A un anneau, et soit $M = {}_A M$ un A-module à gauche contenant

un sous-module minimal M_1 et ayant le commutant Γ qui est commutatif. On dit qu'un élément d dans $\mathrm{Hom}_Z(M , M)$ est une transformation différentielle de M s'il existe δ dans $\mathrm{Hom}_Z(A , A)$ tel que $dam = adm + (\delta a)m$, $\forall\, a \in A$, $m \in M$. Soit D une famille de transformations différentielles de M tel que M est D-simple, c'est-à-dire M ne contient aucun sous-module propre N pour lequel $dN \subseteq N$ $(\forall\, d \in D)$.

LEMME 1. - Soit $m \in M$. Alors il existe un sous-module N de M contenant m , et ayant une suite de Jordan-Hölder $0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = N$, pour lequel les quotients sont tous isomorphes, $N_1 = M_1$, et $N \subseteq M_1 + DM_1 + \ldots + D^{n-1} M_1$. Si M est de longueur finie, M lui-même a une telle suite de Jordan-Hölder. Si M n'est pas de longueur finie, il existe un tel N pour lequel $m \in N_{n-1}$.

LEMME 2. - Si M est de longueur finie, alors Γ_Γ a la même longueur finie, et Γ est $[D , -]$-simple (c'est-à-dire simple par rapport aux dérivations

$$[d , -] : \gamma \longmapsto [d , \gamma] \quad (d \in D)).$$

LEMME 3. - Si A est commutatif, alors :
ou A est un corps,
ou $A \cong E[X_1 , \ldots , X_n]/(X_1^p , \ldots , X_n^p)$ pour quelque corps E de caractéristique p premier et quelque $n > 0$ (et alors $A \cong E[G]$ pour G comme ci-dessus).

On remarque que l'ensemble des transformations différentielles de M est un Γ-sous-module à gauche et une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Hom}_Z(M , M)$; écrivons $\overline{D}$ pour la sous-structure de ce Γ-module et algèbre de Lie engendré par D .

LEMME 4. - Si M est de longueur finie et a un unique sous-module maximal N , alors il existe d dans $\overline{D}$ tel que M est $\{d\}$-simple, $S = \{m \in M \mid dm \in M_1\}$ est supplémentaire de N , $E = \{\gamma \in \Gamma \mid [d , \gamma]M \subseteq M_1\}$ est un sous-corps de Γ et supplémentaire du radical de Γ , et l'application E-linéaire $\sigma : M/(N \otimes_E \Gamma) \to M$ définie par $\sigma(m + N \otimes \gamma) = \gamma m_S$ $(m \in M , \gamma \in \Gamma)$ (où m_S est le composant de m dans S), est un isomorphisme de Γ-modules.

On peut démontrer les lemmes ci-dessus par des modifications de [1] (p. 437-446). L'auteur va les considérer dans un autre article dans un cadre plus général, en particulier pour le cas où Γ n'est pas nécessairement commutatif.

Donnons maintenant la démonstration du théorème sur les Ω-algèbres comme conséquence facile des lemmes ci-dessus. Soit B une Ω-algèbre différentiablement simple et contenant un idéal bilatère minimal M_1 . Soit A l'anneau de multiplication de B , c'est-à-dire le sous-anneau (associatif unitaire) de $\mathrm{Hom}_Z(B , B)$ engendré par $\{\omega_{(i)}(c_1 , \ldots , c_{n-1}) \mid \omega \in \Omega , c_j \in B\}$ où

$$\omega_{(i)}(c_1 , \dots , c_{n-1})b = \omega c_1 \dots c_{i-1}\, bc_i \dots c_{n-1} \quad (n = n(\omega)) ;$$

et soit A' le même pour le sous-ensemble $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid n(\omega) > 1\}$ de Ω. Donc les sous-modules de ${}_AB$ sont les idéaux bilatères de B, et les dérivations de B sont des transformations différentielles de ${}_AB$.

LEMME 5. - ${}_AB$ est de longueur finie, et B a un unique idéal bilatère maximal.

Démonstration. - Supposons d'abord que ${}_AB$ n'est pas de longueur finie. Soit $b \in B$. On applique le lemme 1 pour obtenir N tel que $b \in N_{n-1}$. Puisque N_{n-1} est un idéal, $0 = (\omega_{(i)}(c_1 , \dots , c_{n-1})N)/N_{n-1} = \omega_{(i)}(c_1 , \dots , c_{n-1})M_1)$ chaque fois que $c_j = b$ pour quelque j. Donc $M_1 \subseteq H = \{c \in B \mid A'c = 0\}$. Mais $N \subseteq \sum_j D^j M_1 \subseteq H$, puisque $DH \subseteq H$. Donc $b \in H$, et $H = B$, ce qui contredit la simplicité de B. Maintenant, soit $0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = B$ une suite de Jordan-Hölder de ${}_AB$. Comme ci-dessus, $\omega_{(i)}(c_1 , \dots , c_{n-1})M_k \subseteq M_{k-1}$ chaque fois que quelque $c_j \in M_{n-1}$. Considérant M_{n-1} comme une Ω-algèbre C, et écrivant Ω'_C pour l'opérateur correspondant, on a $(\Omega'_C)^{n-1} C = 0$. Soit N un idéal maximal de B. Si $N \neq M_{\ell-1}$, alors $B/N \cong C/N \cap C$, et $(\Omega')^{n-1} B \subseteq N$. Mais en ce cas, $A(\Omega')^{n-1} B$ est un idéal différentiel contenu dans N, donc égale zéro, et $(\Omega')^{n-1} B = 0$, ce qui contredit la simplicité de B. Donc $N = M_{n-1}$.

C. Q. F. D.

Pour finir la démonstration du théorème, il suffit de montrer que l'application σ du lemme 4 (pour $M = B$) est un homomorphisme de Ω-algèbres. Dans notre cas du lemme 4, d est une dérivation, et, par conséquent, S est une sous-algèbre. On a $(\omega b_1 \dots b_n)_S = \omega b_{1S} \dots b_{nS}$ $(n = n(\omega))$ parce que S est une sous-algèbre et N un idéal. Donc

$$\sigma(\omega(b_1 \otimes \gamma_1) \dots (b_n \otimes \gamma_n)) = \gamma_1 \dots \gamma_n(\omega b_{1S} \dots b_{nS})$$
$$= \omega(\gamma_1 b_{1S}) \dots (\gamma_n b_{nS}) = \omega\sigma(b_1 \otimes \gamma_1) \dots \sigma(b_n \otimes \gamma_n) .$$

C. Q. F. D.

Parce que nous permettons des ω pour lesquels $n(\omega) = 1$, des cas spéciaux du théorème sont les K-algèbres et les anneaux à involution. Aussi le théorème est valable pour les systèmes ternaires de Lie, qui ant la conséquence suivante pour les algèbres de Mal'cev (voir [3]).

COROLLAIRE. - Soient L une algèbre de Mal'cev, et T le système ternaire de Lie associé. Si L est simple, alors : ou T est simple, ou T a la forme $S[G]$, où S est un système ternaire de Lie simple, et G est comme ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLOCK (Richard). - Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal, Annals of Math., Series 2, t. 90, 1969, p. 433-459.

[2] KUROŠ (A. G.), POLIN (S. V.), BURGIN (M. S.), ... - A cycle of papers on multi-operator rings and algebras, Russian Math. Surveys, t. 24, 1969, fasc. 1, p. 1-57 ; translated from Uspekhi Mat. Nauk, t. 24, 1969, fasc. 1, p. 3-59.

[3] LOOS (Ottmar). - Über eine Beziehung zwischen Malcev algebren und Lie-Tripelsystemen, Pacific J. Math., t. 18, 1966, p. 553-562.

(Texte reçu le 16 juillet 1971)

Richard BLOCK
University of California
Department of Mathematics
RIVERSIDE, Calif. 92502
(Etats-Unis)