Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Klaus Keimel

Un théorème sur les demi-groupes compacts commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 2 (1969-1970), exp. nº DG 4, p. DG1-DG4
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70
Demi-groupes, n°4, 4 p.

UN THÉORÈME SUR LES DEMI-GROUPES COMPACTS COMMUTATIFS

par Klaus KEIMEL

1. Le but.

Dans la théorie des demi-groupes topologiques, on considère que la structure d'un demi-groupe est connue si l'on peut décrire le demi-groupe par exemple en termes de groupes topologiques et cônes convexes. Dans une certaine mesure, cela est possible pour un demi-groupe vérifiant les hypothèses ci-dessous.

Nos résultats constituent une généralisation et une synthèse de résultats de D. R. BROWN et M. FRIEDBERG [1], J. M. DAY [2], J. A. HILDEBRANT [3] et de l'auteur [4]. Ici, nous énoncerons nos résultats. On trouvera les démonstrations complètes dans [5].

2. Les hypothèses.

Dans cette communication, soit S toujours un demi-groupe compact commutatif ayant un élément unité 1 et un élément zéro 0, mais pas d'autre élément idempotent.

Le groupe H des unités de S opère de manière naturelle sur S. L'ensemble des orbites xH, $x \in S$, est un demi-groupe compact pour la topologie quotient et la multiplication quotient ; nous le désignerons par S/H. Soit $\eta : S \longrightarrow S/H$ l'homomorphisme canonique $x \longmapsto xH$. Notons que $S/H = S/\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est la relation de Green habituelle.

Nous supposerons toujours que le demi-groupe compact S/H est de dimension finie et divisible ; la divisibilité signifie que, pour tout $a \in S/H$, et tout entier positif n, il existe $b \in S/H$ tel que $b^n = a$.

Remarque. - Au lieu de supposer que S/H est de dimension finie et divisible, on pourrait supposer que S vérifie ces hypothèses sans que les résultats soient modifiés.

3. Une convention.

Nous appellerons cône, tout cône convexe fermé C dans un espace vectoriel réel V de dimension finie tel que $C \cap (-C) = \{0\}$. Un cône local sera l'intersection d'un cône C avec un voisinage de 0 dans V, par exemple avec la boule unité.

Tout cône C est un demi-groupe topologique. L'addition sur C peut être prolongée de manière unique au compactifié C^* de C par un point ∞ ; et C^* est un demi-groupe compact.

4. Les résultats.

Un demi-groupe compact S vérifiant les hypothèses ci-dessus possède les propriétés suivantes :

1° Il existe un demi-groupe compact commutatif u-divisible S^*, et un homomorphisme continu $f : S^* \longrightarrow S$ qui possède la propriété universelle suivante : Pour tout demi-groupe compact commutatif u-divisible D et tout homomorphisme continu $h : D \longrightarrow S$, il existe un homomorphisme continu $g : D \longrightarrow S^*$ tel que $h = f \circ g$:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ S^* \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Remarque. - On dit que S^* est u-divisible si, pour tout $a \in S^*$ et tout entier positif n, il existe un unique élément $b \in S^*$ tel que $b^n = a$.

2° Soit H^* le groupe des unités de S^*, alors :

(a) Il existe un cône C tel que S^*/H^* soit isomorphe à C^*,

(b) S^* est isomorphe au quotient de Rees $(H^* \times C^*)/(H^* \times \{\infty\})$,

(c) L'application canonique $\eta^* : S^* \longrightarrow S^*/H^*$ correspond à la projection $pr_2 : H^* \times C^* \longrightarrow C^*$.

3° L'homomorphisme continu $f : S^* \longrightarrow S$ induit un homomorphisme continu $\bar{f} : S^*/H^* \longrightarrow S/H$ défini par $\bar{f}(xH^*) = f(x)H$. On a :

(a) $\bar{f}$ est un isomorphisme local dans le sens que les éléments unités de S^*/H^* et S/H ont des voisinages U et V respectivement tels que $\bar{f}|U : U \longrightarrow V$ soit un homéomorphisme. Dans un voisinage de 1, S/H est donc un cône local (algébriquement et topologiquement).

(b) S contient un demi-groupe local compact W tel que $\eta|W : W \longrightarrow V$ soit un isomorphisme local. Donc localement dans un voisinage de 1, l'opération naturelle de H sur S admet une section (continue et homomorphe).

(c) Si S/H est u-divisible, alors $\bar{f} : S^*/H^* \longrightarrow S/H$ est un isomorphisme, et $\eta : S \longrightarrow S/H$ admet une section globale (continue et homomorphe).

4° Supposons que S vérifie aussi la propriété suivante :

(D) Pour tout $0 \neq x \in S$ et tout $h \in H$, $(xh = x)$ entraîne $(h = 1)$.

(a) Alors S est dans un voisinage de 1 localement isomorphe au produit direct $H \times U$ du groupe H des unités avec le cône local U.

(b) Si de plus S/H est u-divisible, alors S est isomorphe à $(H \times C^*)/(H \times \{\infty\})$.

$$\begin{tikzcd}
(H^* \times C^*)/(H^* \times \{\infty\}) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dd, "pr_2"'] & S^* \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "\eta^*"] & S \arrow[dd, "\eta"] \arrow[dr, phantom, "\supseteq"] & \\
 & & & W \arrow[dd, "\cong\ \eta|W"] \\
C^* \arrow[r, phantom, "\cong"] & S^*/H^* \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, phantom, "\supseteq"] & S/H \arrow[dr, phantom, "\supseteq"] & \\
 & U \arrow[rr, "\cong"', "f|U"] & & V
\end{tikzcd}$$

5. Une question.

Si S vérifie les hypothèses ci-dessus, l'application canonique $\eta : S \longrightarrow S/H$ admet-elle toujours une section globale (homomorphe et continue) ?

Dans [5], une question plus particulière a été posée, et J. M. DAY nous a communiqué un contre-exemple. Une modification légère de cet exemple nous permet de répondre négativement à la question posée ci-dessus.

6. Un contre-exemple.

Désignons par $\underset{\sim}{H}$ le demi-groupe additif des nombres réels non négatifs. Soit $G = \{1, -1\}$ le groupe à deux éléments. Soit T le demi-groupe compact produit $G \times (\underset{\sim}{H} \times \underset{\sim}{H})^*$. Soit ρ la plus petite congruence fermée sur T telle que

$$(1, 1, 0) \,\rho\, (-1, 0, 1).$$

Pour tout $a \in T$, soit $\bar{a}$ sa ρ-classe. Désignons par S le demi-groupe quotient T/ρ. Alors S vérifie les hypothèses. T/G peut être identifié à $(\underset{\sim}{H} \times \underset{\sim}{H})^*$ et S/H peut être identifié au quotient $(\underset{\sim}{H} \times \underset{\sim}{H})^*/\bar{\rho}$, où $\bar{\rho}$ est la plus petite congruence fermée sur $(\underset{\sim}{H} \times \underset{\sim}{H})^*$ telle que

$$(1, 0) \,\bar{\rho}\, (0, 1).$$

Remarquons que la restriction de η à $\{1\} \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ est injective, et que toute section pour η coïncide nécessairement avec l'inverse de cette restriction (dans un voisinage de 0). On en déduit qu'une section globale ne peut pas exister car $(1, 0) \,\bar{\rho}\, (0, 1)$, mais $(1, 1, 0) \not\rho\, (1, 0, 1)$.

Dans l'exemple ci-dessus, le groupe des unités de S n'est pas connexe. On peut construire un autre contre-exemple où le groupe des unités est connexe : soient G le groupe des nombres complexes de module 1, et $T = G \times (\underset{\sim}{H} \times \underset{\sim}{H})^{*}$. Soit ρ la plus petite congruence fermée sur T telle que

$$(1\,,\,0\,,\,1)\,\rho\,(-1\,,\,1\,,\,0) \quad \text{et} \quad (1\,,\,0\,,\,e)\,\rho\,(-1\,,\,e\,,\,0)\,,$$

où e est un nombre irrationel. Soit $S = T/\rho$. Alors S vérifie les hypothèses, et $\eta : S \longrightarrow S/H$ n'admet pas de section globale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWN (D. R.) and FRIEDBERG (M.). - Representation theorems for uniquely divisible semigroups, Duke math. J., t. 35, 1968, p. 341-352.

[2] DAY (J. M.). - Compact semigroups with square roots, Pacific J. Math. (à paraître).

[3] HILDEBRANT (J. A.). - On compact divisible abelian semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 19, 1968, p. 405-410.

[4] KEIMEL (K.). - Eine Exponentialfunktion für kompakte Abelsche Halbgruppen, Math. Z., t. 97, 1967, p. 7-25.

[5] KEIMEL (K.). - A cross section theorem for certain compact abelian semigroups, Semigroup Forum, t. 1, 1970 (à paraître)

(Texte reçu le 5 octobre 1970)

Klaus KEIMEL
M. Conf. assoc. C. S. U. Tours
22 rue des Bas-Longchamps
92 - BAGNEUX