SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

MARCEL CHADEYRAS

Essai d'une théorie noethérienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 4, p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 4, 31 p.

8 décembre 1969 et 12 janvier 1970

ESSAI D'UNE THÉORIE NOETHÉRIENNE HOMOGÈNE POUR LES ANNEAUX COMMUTATIFS DONT LA GRADUATION EST AUSSI GÉNÉRALE QUE POSSIBLE

par Marcel CHADEYRAS

1. Introduction.

Cet exposé concerne l'étude de la partie homogène (dont la structure est appelée annéïde) des anneaux gradués commutatifs, à graduation aussi générale que possible, et dont les idéaux homogènes vérifient la condition noethérienne.

(a) Origines. - Dans son séminaire sur les corps valués ([3], exposé 4), M. KRASNER montre que le squelette d'un corps valué possède une structure intéressante, celle de corpoïde. Du point de vue naïf, un corpoïde est un "corps à addition partielle". Plus précisément, un corpoïde est la partie homogène q d'un anneau gradué $\overline{q}$, les éléments non nuls de q (c'est-à-dire homogènes non nuls de $\overline{q}$) formant un groupe multiplicatif. M. KRASNER a étudié ([3], exposé 5), pour les corpoïdes dont la graduation est un groupe sans torsion, une théorie des extensions d'algébricité, de séparabilité, de transcendance ; cette théorie, analogue à celle des corps, est plus riche. A propos des ensembles de polynômes sur un corpoïde, là est apparue pour la première fois la notion d'annéïde, généralisant celle de corpoïde (comme "anneau" généralise "corps").

De là est venue l'idée, d'une part d'étudier une théorie intrinsèque des annéïdes, c'est-à-dire des parties homogènes des anneaux gradués ; d'autre part d'étudier l'analogue homogène de l'algèbre locale ; et enfin, d'essayer de voir s'il n'y a pas quelque simplification, en remplaçant la considération des gradués des anneaux locaux, par celle de leurs parties homogènes (afin de se débarrasser des éléments non homogènes lorsqu'ils sont parasites).

Mentionnons que SAGASTUME BERRA [5] a envisagé une classe assez particulière d'annéïdes (la graduation est un semi-groupe), à partir des anneaux gradués.

(b) Définitions. - Une des définitions les plus générales que l'on trouve actuellement est celle de N. BOURBAKI [1] : D'abord, un groupe commutatif R est gradué de type Δ (où Δ est un ensemble quelconque), si R est somme directe

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$$

de sous-groupes. Ensuite, une graduation d'un anneau R est une graduation de son groupe additif, où Δ est un demi-groupe ou monoïde commutatif donné, avec élément neutre (nous noterons toujours multiplicativement la loi sur Δ), et où, pour tous α , $\beta \in \Delta$, on ait $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha\beta}$.

Nous partirons inversement d'une définition axiomatique des annéïdes, c'est-à-dire des parties homogènes des anneaux gradués. Notre définition équivaut à la donnée de la réunion

$$A = \bigcup_{d \in D} A_d$$

d'une famille de groupes additifs abéliens différents de $\{0\}$, sauf l'un d'eux $A_0 = \{0\}$, groupes ayant deux à deux le seul zéro en commun, où A est un demi-groupe multiplicatif avec 0 pour annulateur, et où, pour tous d , $e \in D$, il existe au moins un $f \in D$ tel que $A_d A_e \subset A_f$. A une graduation Δ de A , on imposera, en gros, les conditions suivantes : $\Delta \supset D$; $\forall \alpha \in \Delta \setminus D$, on prend $A_\alpha = \{0\}$ (on note $\Delta \setminus D$ la différence ensembliste $\{x \in \Delta ; \ x \notin D\}$) ; la loi sur Δ est partout définie, et $0 \in D$ est absorbant dans Δ ; pour tous $\alpha , \beta \in \Delta$, la relation $A_\alpha A_\beta \neq \{0\}$ implique $\alpha\beta = \gamma$, où γ est l'unique élément de Δ tel que $A_\alpha A_\beta \subset A_\gamma$.

L'anneau $\overline{A} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ (étendre les opérations par linéarité), associé à A , est dit anneau gradué (au sens généralisé) de type Δ .

Un quasi-morphisme d'annéïdes u de $A = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ dans $A' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma$ sera une représentation (au sens de Bourbaki) vérifiant la condition : pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $u(A_\alpha) \subset A'_\gamma$. Alors, u se prolonge aux anneaux associés en un homomorphisme, homogène en un sens plus large que l'habituel.

On a, pour les moduloïdes (parties homogènes de modules gradués), des notions analogues de graduation et de quasi-morphisme.

(c) Deux ennuis techniques. - Malgré l'associativité du produit dans un annéïde A , celui-ci n'a pas forcément une graduation par un demi-groupe Δ , même dans des cas simples. Lorsque Δ est un demi-groupe, on dira que (la graduation) " Δ est associative".

Un élément $\alpha = \sum_i a_i \in \overline{A} \setminus A$, élément non homogène de $\overline{A}$, peut parfois donner un résultat homogène, soit en le multipliant par un élément x de A , soit en lui appliquant un quasi-morphisme u . On dit que x (ou u) agglutine α . Si Δ est associative, et si x agglutine deux éléments non homogènes α et β , il agglutine $\alpha\beta$.

Dans les démonstrations, interviennent de manière fondamentale des ensembles d'agglutinés (par exemple par un x, ou par un u), intermédiaires entre A et $\bar{A}$. Certains ont une structure favorable, dite anel (resp. monel), très voisine de celle d'annéïde (resp. moduloïde), et que l'on est contraint d'envisager. L'anneau associé à un anel sera dit "quasi-gradué".

(d) Résultats. - On peut, en se bornant aux parties homogènes et aux idéaux et sous-modules homogènes, construire une théorie analogue à celle des anneaux et modules (homomorphismes et isomorphismes, idéaux, polynômes, fractions, ...). Cette dernière est alors un cas particulier. Les résultats sont pour la plupart identiques ; quelques-uns nécessitent des hypothèses supplémentaires peu restrictives. Mais certaines notions sont un peu modifiées, ou au moins se dédoublent (notion d'idéal premier, par exemple).

De même, les généralités noethériennes classiques s'étendent avec peu de changements aux anneaux et modules quasi-gradués, noethériens dans l'homogène (c'est-à-dire aux anels et monels noethériens). Pour la transmission de la propriété noethérienne dans l'homogène, d'un anneau quasi-gradué à celui de ses polynômes à une variable de grade ξ, le théorème de Hilbert ne reste valable que sous certaines conditions sur ξ.

Cependant, l'anneau $\bar{A}$ associé à un anel noethérien A peut n'être pas noethérien, de même que certains anels de polynômes sur A, ou que certains A-monels de type fini.

Si on suppose qu'un annéïde noethérien A est en outre fort (définition au § 3), alors tout idéal de A (c'est-à-dire tout idéal homogène de l'anneau $\bar{A}$) irréductible est primaire, et la décomposition primaire subsiste dans A. La classe des annéïdes noethériens et forts semble donc être le domaine naturel de la théorie noethérienne homogène.

En ce qui concerne le théorème de Krull et ses conséquences, les conditions se généralisent aux annéïdes avec de légères modifications. Elles ne sont guère plus restrictives que dans la théorie habituelle des anneaux, sauf si les anneaux gradués (forts, et noethériens dans l'homogène) possèdent trop d'éléments homogènes diviseurs de 0 (alors, une étude est cependant possible).

Nous avons aussi considéré la localisation des anneaux gradués, à l'aide de systèmes multiplicativement stables de leurs éléments homogènes, c'est-à-dire les annéïdes de fractions, notamment ceux relatifs à un idéal premier.

Noethériannité et force sont des propriétés étrangères ; la recherche de cela nous a conduits à étudier les graduations associatives (lorsqu'elles existent) des annéïdes noethériens, donc en particulier les demi-groupes noethériens. On a obtenu pour ces derniers une caractérisation explicite.

Nécessairement, cette rédaction est souvent incomplète, pour les énoncés et pour les démonstrations. Le lecteur pourra éventuellement se reporter à [2].

2. Notions d'annéïde et de moduloïde.

On appelle annéïde, tout ensemble non vide A muni de deux lois internes : une addition, définie seulement pour certains couples dits addibles (notation : $\#$), et une multiplication, vérifiant les axiomes :

(A) Multiplication :

(A.0) $\forall\ a, b \in A$, $ab \in A$;

(A.1) $\forall\ a, b, c \in A$, $(ab)c = a(bc)$;

(A.2) Il existe un élément 0 de A tel que $0a = a0 = 0$, $\forall\ a \in A$.

(B) Addibilité :

(B.1) $\forall\ a \in A$, $a \# a$;

(B.2) $\forall\ a, b \in A$, la relation $a \# b$ implique $b \# a$;

(B.3) $\forall\ a \in A$, $a \# 0$;

(B.4) $\forall\ a, b, c \in A$, les relations $a \# b$, $b \# c$, $b \neq 0$, impliquent $a \# c$.

Pour $a \in A$, $a \neq 0$, notons $A(a) = \{x \in A ;\ x \# a\}$, appelé domaine d'addibilité de a. Les axiomes (B.3) et (B.4) montrent que $a \# b$ si, et seulement s'ils appartiennent à un même domaine d'addibilité ; donc, deux tels domaines, ou sont confondus, ou ont en commun le seul élément 0. On pose

$$D^* = \{A(a) ;\ a \in A,\ a \neq 0\} \qquad \text{et} \qquad D = D^* \cup \{\{0\}\} .$$

(C) Addition. - Chaque domaine d'addibilité est un groupe additif abélien (dit groupe d'addibilité).

(D) Distributivité. - $\forall\ a, b, c \in A$, la relation $a \# b$ implique :

(D.1) $ca \# cb$;

(D.2) $c(a + b) = ca + cb$;

(D.3) $ac \# bc$;

(D.4) $(a + b)c = ac + bc$.

Pour tout groupe additif $A(d)$, l'élément neutre est égal à 0.

L'annéïde est dit commutatif, s'il vérifie :

(A.3) $\forall\ a, b \in A$, $ab = ba$.

L'annéïde est dit unitaire, s'il vérifie :

(A.4) Il existe un élément $1 \in A$, $1 \neq 0$, tel que $1a = a1 = a$, $\forall a \in A$.

L'annéïde est dit corpoïde, si A^* (A privé du 0) est un groupe multiplicatif.

Soit A un annéïde. On appellera moduloïde à gauche sur A, ou A-moduloïde à gauche, tout ensemble M non vide, muni d'une loi interne additive, définie seulement pour certains couples dits addibles (notation : $\#$), et d'une loi externe partout définie, ayant A pour domaine d'opérateurs, notée multiplicativement, vérifiant les axiomes :

(A) Multiplication :

(A.0) $\forall a \in A$, $\forall x \in M$, $ax \in M$;

(A.1) $\forall a, b \in A$, $\forall x \in M$, $(ab)x = a(bx)$;

(A.2) Il existe un élément $0'$ de M tel que, $\forall a \in A$, $\forall x \in M$, on ait $a0' = 0x = 0'$ (on le notera désormais 0).

(B) Addibilité :

(B.1) $\forall x \in M$, $x \# x$;

(B.2) $\forall x, y \in M$, la relation $x \# y$ implique $y \# x$;

(B.3) $\forall x \in M$, $x \# 0$;

(B.4) $\forall x, y, z \in M$, les relations $x \# y$, $y \# z$, $y \neq 0$, impliquent $x \# z$.

De même que plus haut, on notera pour $x \in M$, $x \neq 0$, $M(x)$ le domaine d'addibilité de x. On pose de même

$$C^* = \{M(x) \ ; \ x \in M , \ x \neq 0\} \quad \text{et} \quad C = C^* \cup \{\{0\}\} .$$

(C) Addition. - Chaque domaine d'addibilité est un groupe additif abélien (dit groupe d'addibilité).

(D) Distributivité. - $\forall a, b \in A$, $\forall x, y \in M$:

(D.1) $x \# y$ implique $ax \# ay$;

(D.2) $x \# y$ implique $a(x + y) = ax + ay$;

(D.3) $a \# b$ implique $ax \# bx$;

(D.4) $a \# b$ implique $(a + b)x = ax + bx$.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. - Les axiomes (D.1) à (D.3) sont équivalents à la condition :

$\forall x, y \in M$ (resp. A), $\forall a, b \in A$, les relations $a \# b$, $x \# y$ impliquent $ax \# by$.

Par suite, si $a \in A$ et $x \in M$ (resp. A) sont tels que $A(a)\, M(x) \neq \{0\}$, il existe un, et un seul, $M(y) \in C^*$ tel que $A(a)\, M(x) \subset M(y)$.

Dans la suite, nous considérerons seulement des annéïdes commutatifs.

En prolongeant les opérations par linéarité, on obtient :

- $\bar{A} = \bigoplus_{A(a) \in D^*} A(a)$, dit anneau associé à A , et
- $\bar{M} = \bigoplus_{M(x) \in C^*} M(x)$, dit $\bar{A}$-module associé à M .

Le groupe additif de $\bar{A}$ est gradué par l'ensemble D . Les éléments de D seront notés $A(a)$ ou $\{0\}$ comme parties de A , et $\omega(a)$ ou $0 = \omega(0)$ comme éléments de D ou grades. D est canoniquement muni de la loi partielle :

1° Pour tout $\omega(a) \in D$, on pose $0.\omega(a) = 0$;
2° Pour tous $\omega(a)$ et $\omega(b) \in D^*$ tels que $A(a)\, A(b) \neq \{0\}$, si $A(c)$ est l'unique élément de D^* tel que $A(a)\, A(b) \subset A(c)$, on pose $\omega(a)\, \omega(b) = \omega(c)$.

On appelle graduation propre Δ_0 de A , l'ensemble D , muni de la loi précédente complétée trivialement par $\omega(a)\, \omega(b) = 0$ lorsque le premier membre n'est pas déjà défini.

On appelle une graduation Δ de l'annéïde A (ou de l'anneau $\bar{A}$), tout couple $(\Delta\, ,\, \theta)$, où Δ est un ensemble muni d'une loi interne partout définie avec annulateur 0 , où $\theta : \Delta \to \Delta_0$ est une surjection, injective sur $\theta^{-1}(\Delta_0^*)$, vérifiant $\theta(0) = 0$, et où, pour tous $\alpha\, ,\, \beta \in \Delta$, la relation $\theta(\alpha)\, \theta(\beta) \neq 0$ implique $\theta(\alpha)\, \theta(\beta) = \theta(\alpha\beta)$. Alors, D s'identifiant à une partie de Δ , on notera encore $\omega(a)$ le grade de a dans Δ . Pour $\alpha \in \Delta$, A_α désigne le groupe d'addibilité associé à $\theta(\alpha)$.

Par définition, une graduation Δ' de A prolonge Δ , si Δ' est à Δ ce que Δ est à Δ_0 . Le prolongement est dit strict, si la loi sur Δ' induit celle sur Δ .

Si M est un moduloïde sur un annéïde A de graduation Δ , on définit de manière similaire les Δ-graduations Γ de M (ou du module $\bar{M}$).

Il semblerait souhaitable de restreindre le choix de Δ aux cas où sa loi est associative (nous dirons : aux graduations associatives). Mais un anneau gradué au sens précédent peut très bien n'avoir aucune graduation associative. On le voit dans certains cas très simples, lorsque la loi partielle de D n'est déjà pas associative. Ce phénomène ne peut se produire que pour des triples de grades $\alpha\, ,\, \beta\, ,\, \gamma \in D$ tels que $A_\alpha A_\beta A_\gamma = \{0\}$; si les produits $A_\alpha A_\beta$ et $A_\beta A_\gamma$ sont différents de $\{0\}$, et s'il en est de même de $A_{\alpha\beta} A_\gamma$ et de $A_\alpha A_{\beta\gamma}$, les produits $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$ sont définis dans D ; mais rien ne les oblige à être égaux. Par exemple, soient k le corps à deux éléments, et $\bar{A}$ l'anneau

$$k[a , b , x] / (abx , a^3 - a^2 , b^3 - b^2 , x^2 - x) .$$

Nous graduons $\bar{A}$ en considérant l'annéïde A dont les groupes d'addibilité sont $\{0 , ax , bx , ax + bx\}$ et les $\{0 , m\}$ pour $m \neq ax , bx , 0$. Quelle que soit la graduation Δ choisie, elle n'est pas associative, car

$$\omega(a)[\omega(x)\ \omega(b)] = \omega(a)\ \omega(xb) = \omega(a)\ \omega(ax) = \omega(a^2 x)$$

et

$$[\omega(a)\ \omega(x)]\ \omega(b) = \omega(ax)\ \omega(b) = \omega(bx)\ \omega(b) = \omega(b^2 x) \neq \omega(a^2 x) .$$

Dans [2], chapitre I, on trouve même un exemple (tératologique !) d'anneau gradué où D^* est un ensemble fini muni d'une loi partout définie, mais, à part cela, quelconque ; il s'étend au cas où D^* est dénombrable.

En fait, une grande partie des résultats est indépendante d'une hypothèse d'associativité de la graduation. Mais cette hypothèse semble indispensable dans certains résultats importants.

Soient A et A_1 deux annéïdes. Une application $u : A \to A_1$ est dite un homomorphisme d'annéïdes, si, pour tous $a , b \in A$, on a :

(1) $a \# b$ implique $u(a) \# u(b)$;

(1') $u(a) \# u(b)$, $u(a) \neq 0$, $u(b) \neq 0$, impliquent $a \# b$;

(2) $a \# b$ implique $u(a + b) = u(a) + u(b)$;

(3) $u(ab) = u(a)\ u(b)$.

Si l'axiome (1') n'est pas vérifié, l'application u sera dite un quasi-morphisme d'annéïdes. Les définitions d'homomorphisme et de quasi-morphisme de A-moduloïdes sont similaires.

Dans un annéïde dont la graduation n'est pas un semi-groupe, la multiplication par un élément peut donner des résultats addibles à partir d'éléments qui ne le sont pas (a et b donnent $ax \# bx$, dans l'exemple précédent ; on dit que x agglutine a et b). De là viennent des difficultés ; par exemple, soit M un A-moduloïde unitaire monogène engendré par x . Alors $u : A \to M$ définie par $u(a) = ax$ est, lorsque x agglutine, un quasi-morphisme non surjectif ; et M ne sera pas isomorphe à un quotient du moduloïde A .

Plus généralement, des agglutinations d'apparences très variées interviennent dans presque toutes les questions. Cette difficulté oblige pratiquement, pour une étude convenable des anneaux gradués, à envisager une structure très voisine de la leur, avec une partie homogène plus grande, et une graduation moins fine que celle de départ. Par exemple, dans un anneau gradué $\bar{A}$, soit $x \in A$ un élément homogène fixé. Un élément γ de l'anneau sera homogène dans la "quasi"-graduation, si γx l'est dans la graduation initiale ; alors, le "quasi"-grade de γ sera par définition le grade de γx (il sera 0 , si $\gamma x = 0$) ; dans l'anneau, les éléments de "quasi"-grade nul forment un idéal ; pour un grade fixé λ , l'ensemble des éléments de "quasi"-grade 0 ou λ est un groupe additif abélien. L'anneau est la somme de ces groupes distincts, directe à l'idéal ci-dessus près (somme "quasi-directe").

On a ainsi obtenu la structure d'anneau quasi-gradué, à partir de celle d'anneau gradué, en dilatant, en quelque sorte, son zéro en un idéal. Les parties homogènes de tels anneaux, qui admettent aussi une caractérisation axiomatique, seront appelées anels. On considérera les modules quasi-gradués (sens analogue) sur de tels anneaux, et leurs parties homogènes seront appelées monels. Ces considérations conduisent aussi à une exploration, sur un anneau gradué donné, de ses graduations et quasi-graduations moins fines.

3. Anels et monels.

On appellera anel, tout ensemble non vide A , muni de deux lois internes : une addition partielle et une multiplication, vérifiant les axiomes :

(A) Multiplication :

(A.0) $\forall$ a et b $\in A$, $ab \in A$;

(A.1) $\forall$ a , b et c $\in A$, $(ab)c = a(bc)$;

(A.2) Il existe un élément 0 tel que $0a = a0 = 0$, $\forall a \in A$.

(B) Addibilité :

(B.1) $\forall a \in A$, $a \# a$;

(B.2) $\forall$ a et b $\in A$, la relation $a \# b$ implique $b \# a$;

(B.3) Il existe une partie Ω de A , contenant 0 , et telle que, $\forall a \in A$, $\forall e \in \Omega$, $a \# e$;

(B.4) $\forall$ a , b et c $\in A$, les relations $a \# b$, $b \# c$, $b \notin \Omega$, impliquent $a \# c$.

Pour $a \notin \Omega$, soit $A(a) = \{x \in A \ ; \ x \# a\}$ le domaine d'addibilité de a ; il est clair que $a \# b$ si, et seulement s'ils appartiennent à un même domaine. Donc deux tels domaines, ou sont confondus, ou ont Ω pour intersection. On pose

$$D^* = \{A(a) \ ; \ a \in A \ , \ a \notin \Omega\} \qquad \text{et} \qquad D = D^* \cup \{\Omega\} \ .$$

(C) Addition. - Chaque élément de D est un groupe additif abélien. En particulier, $\forall$ a et b $\in A$, $a \# b$ implique $a \# a + b$. On voit aisément que 0 est élément neutre de chacun de ces groupes.

(D) Relations entre addition et multiplication. – La double distributivité du produit par rapport à l'addibilité, et par rapport à l'addition, est vérifiée, et, de plus :

(D.5) $\forall\, a \in A\,,\ \forall\, e \in \Omega\,,\ ae \in \Omega$ et $ea \in \Omega$.

La partie Ω est appelée le milieu de A. De plus, l'anel est dit commutatif, s'il vérifie :

(A.3) $\forall\, a$ et $b \in A\,,\ ab = ba$;

l'anel est dit unitaire, s'il vérifie :

(A.4) Il existe un élément $1 \in A$ tel que $1a = a1 = a\,,\ \forall\, a \in A$.

Soit A un anel. On appellera A-monel à gauche, ou monel à gauche sur A, tout ensemble M non vide muni d'une addition partielle, et d'une loi externe partout définie, ayant A pour domaine d'opérateurs, notée multiplicativement, vérifiant les axiomes :

(A) Multiplication :

(A.0) $\forall\, a \in A\,,\ \forall\, x \in M\,,\ ax \in M$;
(A.1) $\forall\, a$ et $b \in A\,,\ \forall\, x \in M\,,\ (ab)x = a(bx)$;
(A.2) Il existe un élément $0'$ de M tel que, $\forall\, a \in A\,,\ \forall\, x \in M$, $a0' = 0x = 0'$ (on le notera désormais 0).

(B) Addibilité :

(B.1) $\forall\, x \in M\,,\ x \# x$;
(B.2) $\forall\, x$ et $y \in M$, la relation $x \# y$ implique $y \# x$;
(B.3) Il existe une partie Θ de M, contenant 0, et telle que, $\forall\, x \in M$, $\forall\, e \in \Theta\,,\ x \# e$;
(B.4) $\forall\, x\,,\ y$ et $z \in M$, les relations $x \# y\,,\ y \# z\,,\ y \notin \Theta$, impliquent $x \# z$.

Pour $x \notin \Theta$, soit $M(x) = \{y \in A\ ;\ y \# x\}$ le domaine d'addibilité de x. De même, deux tels domaines, ou sont confondus, ou ont Θ pour intersection. On pose

$$C^* = \{M(x)\ ;\ x \in M\,,\ x \notin \Theta\} \qquad \text{et} \qquad C = C^* \cup \{\Theta\}\ .$$

(C) Addition. – Chaque élément de C est un groupe additif abélien. En particulier, $\forall\, x$ et $y \in M$, $x \# y$ implique $x \# x + y$. Enfin, 0 est élément neutre de chacun de ces groupes.

(D) Relations entre addition et multiplication. – La double distributivité du produit pour l'addibilité et l'addition dans A et M est vérifiée, et de plus :

(D.5) $\forall\, a \in A$, $\forall\, x \in \Theta$, $ax \in \Theta$; $\forall\, a \in \Omega$, $\forall\, x \in M$, $ax \in \Theta$.

La partie Θ est appelée <u>le milieu de</u> M.

Les notions de monel à droite sur A, et de monel unitaire, sont les analogues du cas des modules. Noter que Ω est un anneau, et Θ un Ω-module.

LEMME. - <u>$\forall\, e \in \Theta$ (resp. Ω), $\forall\, x$ et $y \in M$ (resp. A), la relation $x \# y$ équivaut à $x \# e + y$.</u>

C'est évident, si x (ou y) est dans Θ. Si $x \notin \Theta$ et $y \notin \Theta$, $x \# y$ implique $y \in M(x)$ qui contient Θ. Donc $e + y \in M(x)$.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. - <u>$\forall\, x$ et $y \in M$ (resp. A), et $\forall\, a$ et $b \in A$, les relations $a \# b$ et $x \# y$ impliquent $ax \# by$.</u>

En effet, la transitivité le montre si $ay \notin \Theta$, ou si $bx \notin \Theta$. D'autre part, si ay et $bx \in \Theta$, de $(a + b)x \# (a + b)y$ on déduit $ax + bx \# ay + by$, d'où $ax \# by$, grâce au lemme.

<u>Dans la suite, nous supposerons toujours les anels commutatifs</u>. Noter qu'un annéïde est un anel dont le milieu est $\{0\}$.

Une partie P d'un A-monel M est dite un <u>sous-monel</u> de M, si l'addibilité et les lois de M induisent sur P une structure de A-monel, c'est-à-dire si :

1° L'addibilité dans P est la restriction de celle de M ;

2° Pour tout x non nul de M, $N \cap M(x)$ est sous-groupe additif de $M(x)$;

3° $AP \subset P$.

On a de manière analogue les notions d'<u>idéal</u> et de <u>sous-anel</u> d'un anel.

Deux éléments x et y de M sont dits congrus modulo le sous-monel P, s'il existe $z \in M$ tel que $x - z \in P$ et $y - z \in P$. Ceci est une relation d'équivalence sur M, dont le quotient M/P est un A-monel. De même, pour un idéal α d'un anel A, le quotient A/α est un anel.

Une graduation Δ d'un anel A se définit exactement comme pour un annéïde, à partir de l'ensemble D : simplement, $\{0\}$ y est remplacé par le milieu Ω, et on pose $\omega(e) = 0$ pour tout $e \in \Omega$. Alors, la loi partielle sur D^* est définie, lorsque $A(a)\, A(b) \not\subset \Omega$, par $\omega(a)\, \omega(b) = \omega(c)$, où $A(c)$ est l'unique (propriété fondamentale) groupe d'addibilité tel que $A(a)\, A(b) \subset A(c)$. En fait, les graduations de l'anel A sont celles de l'annéïde quotient A/Ω. D'autre part, si i est idéal de A gradué par Δ, le quotient A/i est canoniquement gradué par Δ. On définit de même que pour un moduloïde, une Δ-graduation d'un A-monel M à partir de l'ensemble C. Dans la suite, on choisit toujours commutative une graduation d'un anel commutatif.

L'anneau $\overline{A} = \sum_{A(a)\in D^*} A(a)$ (prolonger les opérations par linéarité) associé à l'anel A de graduation Δ, est dit <u>anneau quasi-gradué</u> par Δ. De même, on a le $\overline{A}$-module $\overline{M}$ associé à M, qui est dit module quasi-gradué.

Un élément x non nul d'un anel A sera dit <u>régulier</u>, si, pour tous a et $b \in A$, les relations $ax \# bx$, $ax \notin \Omega$ et $bx \notin \Omega$, impliquent $a \# b$. Il est dit quasi-régulier <u>fort</u>, s'il existe un entier $i = i(x) \geqslant 0$ tel que, pour tous a, $b \in A$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, les relations $ax^n \# bx^n$, $ax^n \notin \Omega$ et $bx^n \notin \Omega$, impliquent $ax^i \# bx^i$. L'anel A est dit <u>régulier</u> (resp. <u>fort</u>), si tout élément non nul de A est régulier (resp. quasi-régulier fort).

Soient M et M_1 deux A-monels, et Θ et Θ_1 leurs milieux respectifs. Une application $f : M \to M_1$ est dite <u>homomorphisme de A-monels</u>, si, $\forall\, x$ et $y \in M$, $\forall\, a \in A$:

(1) La relation $x \# y$ implique $f(x) \# f(y)$, et on a $f(\Theta) \subset \Theta_1$;
(1') Les relations $f(x) \# f(y)$, $f(x) \notin \Theta_1$, $f(y) \notin \Theta_1$, impliquent $x \# y$;
(2) La relation $x \# y$ implique $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
(3) $f(ax) = af(x)$.

Si f vérifie (1), (2), (3), mais non (1'), il est dit <u>quasi-morphisme</u>. Remarquer que, lorsque l'image $f(M)$ n'est pas contenue dans un seul groupe d'addibilité de M_1, la première partie de la condition (1) implique $f(\Theta) \subset \Theta_1$.

Soient A et A_1 deux anels de milieux respectifs Θ et Θ_1. Les notions analogues d'homomorphisme et quasi-morphisme d'anels se définissent de même, en remplaçant (3) par :

(3') $\forall\, a$ et $b \in A$, $f(ab) = f(a)\, f(b)$.

Un homomorphisme (resp. quasi-morphisme) d'anels est dit unitaire, si A et A_1 sont unitaires, et si $f(1) = 1$.

Un homomorphisme f (d'anels ou de monels) sera dit <u>un isomorphisme</u>, s'il est bijectif, et si $f(\Theta) = \Theta_1$.

4. Ensembles d'agglutinés.

Soient $f : M \to M_1$ un quasi-morphisme de A-monels, et $\xi = x_1 + \dots + x_n \in \overline{M}$ (avec les x_i deux à deux non addibles). En général, la somme formelle

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

n'est pas un élément de M_1 , sauf dans les cas suivants :

(1) Les $f(x_i)$ sont addibles deux à deux ; on dit que ξ est agglutiné par f ;

(2) La somme formelle $\sum_i f(x_i)$, après une éventuelle réduction des termes addibles, est élément de M_1 ; on dit alors que ξ est agglutiné large par f .

On montre que l'ensemble $\overline{M}^f$ des agglutinés (resp. Λ^f des agglutinés larges) par f est un A-monel. En quelque sorte, la quasi-graduation de $\overline{M}$ déterminée par le monel Λ^f , est "l'image réciproque" de la quasi-graduation par M_1 de $\overline{M}_1$, par le prolongement $\bar{f}$ de f à $\overline{M} \to \overline{M}_1$ (le milieu de Λ^f étant le noyau de $\bar{f}$).

De même, pour un quasi-morphisme f d'anels de source A , l'ensemble $\overline{A}^f$ des agglutinés (resp. Λ^f des agglutinés larges) par f est un anel.

Un cas particulier fondamental est le suivant : Soient A un anel, $x \in A$, et h l'homothétie de A définie par $h(a) = ax$. Alors, h est un quasi-morphisme. L'agglutiné $\overline{A}^h$, noté $\overline{A}^x$ (resp. Λ^h , noté Λ^x), est un A-monel, mais pas forcément un anel.

LEMME. - Soient a , b , c , d , x des éléments d'un anel A , non situés dans le milieu, et tels que $ax \# bx$ et $cx \# dx$. Si le produit des grades de b , c et x (ou bien de a , d et x) est associatif, acx et bdx sont addibles.

Si acx et bdx ne sont pas dans le milieu, ax et bx non plus, par l'axiome (D.5). On en déduit

$$\omega(axc) = \omega(ax)\ \omega(c) = \omega(bx)\ \omega(c) = [\omega(b)\ \omega(x)]\ \omega(c) \quad ,$$

et on a de même

$$\omega(bxd) = \omega(b)[\omega(x)\ \omega(c)] \quad .$$

L'associativité donne le résultat. Par contre, dans l'exemple de graduation non associative du § 2, x agglutine a et b , mais n'agglutine pas a^2 et b^2 .

En conséquence, si une graduation de A est associative, pour tout $x \in A$, si x agglutine deux sommes formelles, il agglutine leur produit ; et les agglutinés $\overline{A}^x$ et Λ^x sont des anels.

Dans les démonstrations cherchées, bien d'autres ensembles d'agglutinés interviennent naturellement, mais souvent avec une structure tératologique. Citons deux exemples favorables. Soient A un anel, et S une partie multiplicative non vide de A . On appelle agglutiné de A par S , l'ensemble $\overline{A}^S = \bigcup_{s \in S} \overline{A}^s$, où deux éléments sont addibles s'ils le sont dans au moins un $\overline{A}^s$, et où le milieu est la réunion des milieux des $\overline{A}^s$. On définit de même l'agglutiné large Λ^S de A par

S . Ces ensembles ont une structure d'anel, même si la graduation n'est pas associative.

Soient A un anel de graduation Δ et de milieu Ω , ξ un élément de Δ , et e un entier $\geqslant 1$. On va définir un agglutiné de A noté $\bar{A}^{\xi,e}$.

(1) Soit $a \in A$. Si $a \notin \Omega$, et si, pour toute factorisation $a = f_1 \dots f_q$ (les $f_j \in A$), le produit $\omega(f_1) \dots \omega(f_q)\, \xi \dots \xi$ (e facteurs ξ) est associatif et non nul, sa valeur $\omega(a)\, \xi^e$ est par définition le grade $\omega'(a)$ dans l'agglutiné qui suit. Dans tous les autres cas, on pose $\omega'(a) = 0$.

(2) Soit $\bar{A}^{\xi,e}$ la partie de $\bar{A}$ formée des $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i$ tels que les $\omega'(a_i)$ non nuls aient la même valeur, qui sera le grade $\omega'(\alpha)$; on pose $\omega'(\alpha) = 0$, si tous les $\omega'(a_i)$ sont nuls. $\bar{A}^{\xi,e}$ <u>est un</u> A-<u>monel, appelé l'agglutiné de</u> A <u>par</u> ξ , e , et Δ en est une Δ-graduation ; $\omega'(a)$ est donc le Δ-grade de a .

On peut montrer que, <u>si un produit donné</u> $p = \omega(f_1) \dots \omega(f_q)\, \xi \dots \xi$ <u>n'est pas associatif, il existe un triple</u> $\alpha\beta\gamma$, <u>produit extrait du précédent</u> (c'est-à-dire dont les termes α , β , γ sont des produits de certains facteurs de p), <u>non associatif, et dont l'un des facteurs est</u> ξ . Inversement, si dans Δ , tout produit de trois termes dont un, extérieur, est ξ , est associatif (on dira que ξ <u>associe dans</u> Δ), tout produit de trois termes, dont un est ξ^e , est associatif. Alors, $\bar{A}^{\xi,e} = \bar{A}^{\xi^e}$ est un anel de milieu $\bigoplus_{d \in \Delta'} A_d$, où Δ' est la partie de Δ annulée par ξ^e .

<u>Diviseurs d'un élément</u>. - Soit A un anel unitaire, et soient x , $b \in A$, $x \neq 0$. Nous dirons que x est diviseur (resp. pseudo-diviseur, resp. diviseur large) de b , s'il existe un élément $\gamma \in A$ (resp. $\gamma \in \bar{A}^x$, resp. $\gamma \in \Lambda^x$) tel que $b = \gamma x$. Il sera dit pseudo-diviseur (resp. diviseur large) propre, si de plus $\gamma \notin A$ (resp. $\gamma \notin \bar{A}^x$). De là les notions de diviseur de 0 , de pseudo-diviseur de 0 , de diviseur large de 0 . De là aussi les notions d'élément inversible, pseudo-inversible, inversible large.

L'anel unitaire A est dit <u>intègre</u>, si, pour tout élément c non nul de A , l'homothétie de rapport c est injective. L'anel unitaire A est dit un <u>quasi-domaine</u>, s'il n'a pas de diviseur de 0 . Il est appelé <u>domaine</u>, s'il n'a de diviseur de 0 d'aucune sorte.

5. Définition des polynômes.

On va définir les analogues des anneaux de polynômes. Là, les indéterminées elles-mêmes sont munies de grades, suivant le procédé utilisé par M. KRASNER [3] pour les polynômes sur un corpoïde.

On donne un anel A de graduation Δ. On considère une somme formelle

$$f(X) = f(X_1 , \dots , X_p) = \sum_{0 \leq i \leq n} (a_{(i),1} + \dots + a_{(i),r_i}) X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p} ,$$

en notant $X = (X_1 , \dots , X_p)$, puis $i = i_1 + \dots + i_p$ et $(i) = (i_1 , \dots , i_p)$.

Définition 1. – On donne l'anel A de graduation Δ, et $\xi = (\xi_1 , \dots , \xi_p) \in \Delta^p$. On dira que f est un ξ-polynôme (ou polynôme de pente ξ), si, quel que soit le sur-anel B de A, de graduation Δ, quel que soit le p-uple

$$x = (x_1 , \dots , x_p) \in B^p \quad \text{tel que} \quad \omega(x_i) = \xi_i \quad \text{pour tout } i ,$$

$f(x_1 , \dots , x_p)$ a tous ses termes addibles.

Deux questions se posent :

(1) A et f étant donnés, f sera-t-il un ξ-polynôme pour au moins une graduation Δ' de A ? Il a été traité par M. KRASNER dans le cas des corpoïdes dont la graduation est un groupe sans torsion. Il reste ouvert dans le cas général ; on peut imposer à Δ' d'être seulement un prolongement Δ' d'une graduation Δ donnée.

(2) Lorsque A, Δ et $\xi \in \Delta^p$ sont donnés, étude de l'ensemble des ξ-polynômes, que nous allons considérer.

Définition 2. – A, Δ et $\xi \in \Delta^p$ étant donnés, soit un monôme $aX_1^{i_1} \dots X_p^{i_p}$. Si, pour toute factorisation $a = b_1 \dots b_q$, le produit

$$\omega(b_1) \dots \omega(b_q)\, \xi_1 \dots \xi_1\, \xi_2 \dots \xi_p \qquad (\text{avec } i_1 \text{ facteurs } \xi_1 \text{, etc.})$$

est associatif et non nul, sa valeur $\omega(a)\, \xi^{(i)}$ est le ξ-grade du monôme. Sinon, le ξ-grade est 0.

En cas de non associativité pour une factorisation, les valeurs prises par le monôme sont nécessairement dans le milieu. Si le ξ-grade est noté par ω', on montre, pour tous monômes u, v tels que $\omega'(uv) \neq 0$, que l'on a

$$\omega'(uv) = \omega'(u)\, \omega'(v) ,$$

et on en déduit :

THÉORÈME. – Soient A, Δ et $\xi^p \in \Delta^p$ donnés. Pour qu'une somme formelle $f(X)$ soit un ξ-polynôme, il faut et il suffit que ses monômes de ξ-grade non nul aient même grade. Et l'ensemble $A_\xi[X]$ de ces ξ-polynômes est un anel (un sur-anel de A, de graduation Δ).

Donc, la définition 1 est indépendante des sur-anels B de A considérés, et dépend seulement de la graduation Δ. De plus, on a la formule habituelle :

$$(A_{\xi}[X])_{\eta}[Y] = A_{(\xi,\eta)}[X, Y] .$$

Enfin, il faut noter que l'ensemble des ξ-polynômes sur un annéïde A n'est pas forcément un annéïde, car des monômes non nuls peuvent avoir un grade nul (si ξ divise 0, ou s'il n'associe pas dans Δ).

6. Propriétés des homomorphismes, idéaux et sous-monels.

Les propriétés élémentaires traditionnelles des homomorphismes (théorèmes d'isomorphisme, par exemple) dans les anneaux et modules subsistent presque sans changement pour les annéïdes et moduloïdes. Pour les monels (resp. anels), il en est presque de même avec parfois, soit une condition de stabilité additive de l'image d'un sous-monel (resp. idéal) L, soit une condition de comparabilité de L au milieu ; ces conditions sont peu restrictives.

Par exemple, soient M et M_1 deux A-monels de milieux $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_1$, et $u : M \rightarrow M_1$ un homomorphisme. Si le sous-monel L de M vérifie

$$u(L) \cap \mathcal{O}_1 \subset u(L \cap \mathcal{O}) ,$$

alors $u(L)$ est sous-monel de M_1. Si la condition est vérifiée pour M, alors $u(M)$ et $M/\mathrm{Ker}\, u$ sont isomorphes.

Pour deux sous-monels K et L de M, dont un est comparable à $\mathcal{O}$, $(K + L)/K$ et $L/(K \cap L)$ sont isomorphes, et aussi (lorsque $K \supset L$) la loi modulaire subsiste.

Les formules habituelles des opérations sur les idéaux (on définit $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ et $\sqrt{\mathfrak{a}}$ comme dans le cas des anneaux) sont conservées presque toutes, ainsi que celles relatives aux extension et contraction par un quasi-morphisme d'anels. Celles concernant les images d'idéaux par un quasi-morphisme nécessitent parfois une faible condition supplémentaire.

La notion d'idéal premier (resp. primaire) se détriple dans les anels, à cause de l'agglutination :

Définition 1. - Un idéal $\mathfrak{p}$ d'un anel A sera dit :

1° Premier, si, et seulement si, pour tous a, $b \in A$, les relations $ab \in \mathfrak{p}$, $a \notin \mathfrak{p}$, impliquent $b \in \mathfrak{p}$;

2° Strictement premier, si, et seulement si, pour tout $b \in A$ et pour tout $\alpha = \sum_i a_i \in \overline{A}^b$, les relations $\alpha b \in \mathfrak{p}$ et $a_i \notin \mathfrak{p}$ pour tout i, impliquent $b \in \mathfrak{p}$;

3° <u>Largement premier</u>, si, et seulement si, pour tout $b \in A$ et pour tout $\alpha = \sum_i a_i \in \Lambda^b$, les relations $\alpha b \in p$ et $a_i \notin p$ pour tout i, impliquent $b \in p$.

<u>Définition</u> 2. – Un idéal q d'un anel A sera dit :

1° <u>Primaire</u>, si, et seulement si, pour tous a, $b \in A$, les relations $ab \in q$, $a \notin q$, impliquent l'existence de $n \geqslant 1$ tel que $b^n \in q$;

2° <u>Strictement primaire</u>, si, et seulement si, pour tout $b \in A$ et pour tout $\alpha = \sum_i a_i \in \bar{A}^b$, les relations $\alpha b \in q$ et $a_i \notin q$ pour tout i, impliquent l'existence de $n \geqslant 1$ tel que $b^n \in q$;

3° <u>Largement primaire</u>, si, et seulement si, pour tout $b \in A$ et pour tout $\alpha = \sum_i a_i \in \Lambda^b$, les relations $\alpha b \in q$ et $a_i \notin q$ pour tout i, impliquent l'existence de $n \geqslant 1$ tel que $b^n \in q$.

Lorsque seuls interviennent les éléments de l'anel (les cas 1°), on conserve la nomenclature classique, et les propriétés habituelles se conservent.

PROPOSITION. – <u>Soient</u> A <u>un anel de graduation associative, et</u> m <u>un idéal tel que</u> $A^2 \not\subset m$. <u>Pour que</u> m <u>soit maximal, il faut et il suffit que</u> A/m, <u>ou soit un corpoïde, ou soit égal à son milieu et ait une structure sous-jacente de corps.</u>

Montrons la proposition. m étant maximal, m contient l'idéal

$$Ax + m = \Lambda^x x + m \quad ,$$

si, et seulement si, $Ax \subset m$; on a, dans le cas contraire, $Ax + m = A$. L'idéal

$$m{:}A = \{x \in A \ ; \quad Ax \subset m\}$$

contient m et est différent de A, sinon on aurait $A^2 \subset m$. Donc on a $m{:}A = m$, et $Ax + m = A$ pour tout $x \in A \setminus m$. Mais alors $m{:}(x) = \{y \in A \ ; \ yx \in m\}$ est $\neq A$ et $\supset m$, donc $m{:}(x) = m$ et $x^2 \in A \setminus m$, ce qui implique $A = Ax^2 + m$. Prenons $a \in A \setminus m$; puisque $A = Aa^2 + m$, il existe $\beta \in \Lambda^{a^2}$ tel que $a \equiv a^2 \beta \ (m)$, donc aussi $a \equiv [a(a^2 \beta)] \beta \ \ (m)$. Comme Δ est associative, a^2 agglutine β^2 (§ 4, lemme), et on obtient $a \equiv ae \ \ (m)$ en posant $e = a^2 \beta^2 \in A$. Ensuite, de $Aa + m = A$, pour tout y de A, on déduit l'existence de $\gamma \in \Lambda^a$ tel que $y \equiv a\gamma \ \ (m)$, donc que $ey \equiv ea\gamma = a\gamma = y$, et e est unité modulo m. Enfin, pour tout $x \notin m$, $A = Ax + m$ montre l'existence de $\delta \in \Lambda^x$ tel que $e \equiv x\delta \ \ (m)$, donc tel que $e = e^2 \equiv (x\delta)^2$. Puisque Δ est associative, x agglutine δ^2. En posant $x' = x\delta^2 \in A$, on obtient $e \equiv xx' \ \ (m)$, et x est inversible modulo m. Donc, $R = A/m$ est un anel dont tout élément non nul est inversible. Si son milieu Ω n'est pas $\{0\}$, soit ξ un élément non nul de Ω. Puisque ξ est inversible : $1 = \xi\xi'$, l'axiome (D.5) des anels montre que $1 \in \Omega$ et que $R \subset \Omega$; alors R est un corps. La preuve réciproque est triviale.

7. Propriétés noethériennes élémentaires.

Un A-monel M est dit noethérien, si ses sous-monels vérifient les trois conditions équivalentes habituelles. Un anel unitaire A est dit noethérien, s'il l'est comme monel sur lui-même. Cela équivaut à ce que les idéaux homogènes de l'anneau quasi-gradué associé $\bar{A}$ vérifient la condition noethérienne. Noter qu'alors $\bar{A}$ n'est pas forcément un anneau noethérien : Le corpoïde Q des fractions monomiales sur le corps $\underset{\sim}{C}$ des complexes, en $\{y_i\}_{i\in \underset{\sim}{N}}$ est noethérien. L'anneau associé $\bar{Q}$ ne l'est pas, car les idéaux $\mathfrak{a}_0 = (0)$ et $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_n + \bar{Q}(y_{2n} + y_{2n+1})$ forment une suite strictement croissante.

Les propriétés habituelles sont conservées pour les annéïdes et moduloïdes, et, avec parfois une condition peu restrictive (comme au début du § 6), pour les anels et monels. Signalons deux résultats triviaux, mais importants :

De deux A-monels (resp. anels) agglutinés comparables d'un même A-monel (resp. anel), si le plus agglutiné (le plus grand) est noethérien, le moins agglutiné l'est aussi.

Pour que tout monel sur un anel unitaire A soit noethérien, il faut et il suffit que $\bar{A}$ soit un anneau noethérien.

8. Le théorème de Hilbert.

On voit aisément que tout anel de polynômes à une variable sur un anel A est noethérien, si, et seulement si, l'anneau $\bar{A}$ est noethérien. On a le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 1 (de HILBERT). - Soient A un anel de graduation Δ , et $\xi \in \Delta$. S'il existe un entier $r \geqslant 1$, tel que, pour tout $i \geqslant r$, on ait $\bar{A}^{\xi,i} = \bar{A}^{\xi,r}$, et si le A-monel $\bar{A}^{\xi,r}$ est noethérien, alors l'anel $A_\xi[X]$ est noethérien.

Ici, on ne peut parvenir au résultat avec les seules conditions sur A , à cause de l'agglutination par le grade ξ de la variable X . A part cela, la démonstration est semblable à celle, classique, pour les anneaux, mais à deux étages, à cause du milieu de $A_\xi[X]$.

On étudie ensuite si les conditions suffisantes peuvent être aménagées dans des circonstances particulières. D'abord, ξ quasi-régulier (ou fort) pour $r \geqslant 0$ signifie que toute puissance de ξ est un produit associatif, et que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, pour tous α et $\beta \in \Delta$, $\alpha\xi^n = \beta\xi^n$ implique $\alpha\xi^r = \beta\xi^r$. On en déduit :

COROLLAIRE 1. - Soient A un anel de graduation Δ, et $\xi \in \Delta$. Si ξ associe dans Δ, s'il est quasi-régulier pour r, et si $\bar{A}^{\xi,r} = \bar{A}^{\xi^r}$ est noethérien, alors $A_\xi[X]$ est noethérien.

LEMME 1. - Soient A un anel gradué par Δ, $\xi \in \Delta$ et $b \in A$. Si ξ divise $\omega(b)$, et si ξ et $\omega(b)$ associent dans Δ, chacun des anels

$$\bar{A}^{\xi,e} \subset \bar{A}^{\omega(b),e} \subset \bar{A}^{b^e} \subset \Lambda^{b^e}$$

est agglutiné du précédent.

Puisque ξ et $\omega(b)$ associent dans Δ, il en résulte que $\omega(b)^e$ est multiple de ξ^e, et aussi, pour tout $a \in A$, que $\omega(a)\,\omega(b)^e$ est multiple de $\omega(a)\,\xi^e$. Cela entraîne la première relation. Les autres se montrent aisément. Il suffit donc, dans le théorème, de prouver que Λ^{b^r} est noethérien, ce que nous allons étudier.

LEMME 2. - Soient A un anel de milieu Ω, $b \in A$, et i un entier $\geqslant 1$. Notons k_i le noyau de l'homomorphisme $u_i : \Lambda^{b^i} \to A$ de A-monels défini par $\alpha \mapsto \alpha b^i$. Si k_1 est un A-monel (ou un $\bar{A}$-module) noethérien, il en est de même de k_i pour tout i.

Pour chaque i, par définition de Λ^{b^i}, u_i est un homomorphisme de A-monels, et k_i est contenu dans le milieu Θ_i de Λ^{b^i}. Donc k_i est son propre agglutiné dans l'anneau $\bar{A}$, et le A-monel k_i peut être considéré comme un $\bar{A}$-module (donc comme un idéal de $\bar{A}$) ; pour k_i, les notions de sous-A-monel et de sous-$\bar{A}$-module sont confondues. Montrons le lemme par récurrence sur i. Notons φ l'homothétie de $\bar{A}$, de rapport b^i, qui est un homomorphisme de $\bar{A}$-modules. Pour $\alpha \in \bar{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes : $\alpha \in k_{i+1}$, $\alpha b^{i+1} = 0$, $\alpha b^i \in k_1$. Donc φ se restreint en un homomorphisme $\psi : k_{i+1} \to k_1$ de $\bar{A}$-modules. Son noyau est $\ker \psi = \{\alpha \in k_{i+1} \,;\, \alpha b^i = 0\} = \{\alpha \in k_{i+1} \,;\, \alpha \in k_i\} = k_i$. Si k_1 et k_i sont des $\bar{A}$-modules noethériens, il en est donc de même du noyau et de l'image de ψ, et l'on sait alors que k_{i+1} est un $\bar{A}$-module noethérien.

D'autre part, l'hypothèse que k_1 soit un anneau noethérien est suffisante pour le lemme.

COROLLAIRE 2. - Soient A un anel de graduation Δ, $\xi \in \Delta$ et $b \in A$. Soit k_1 le noyau de l'homomorphisme $u_1 : \Lambda^b \to A$ défini par $u_1(\alpha) = \alpha b$. On suppose que ξ et $\omega(b)$ associent dans Δ, que ξ divise $\omega(b)$, et que ξ est quasi-régulier pour l'indice r. Si les A-monels A et k_1 sont noethériens, l'anel de polynômes $A_\xi[X]$ est noethérien.

En effet, dans $u_r : \Lambda^{b^r} \to A$, le noyau et l'image sont des A-monels et sont noethériens. Il en résulte que Λ^{b^r} est noethérien, donc aussi $\bar{A}^{\xi,r}$.

THÉORÈME 2. - Soient A un annéïde noethérien de graduation Δ , $\gamma \in \Delta$, et $c_1 , \dots , c_s$ des éléments non nuls de grade γ . Pour chaque $i = 1 , \dots , s$, soit $\varphi_i : \bar{A}^\gamma \to A$ l'homomorphisme de A-monels défini par $\varphi_i(\alpha) = \alpha c_i$. Si $\bigcap_{i=1}^{s} \ker \varphi_i$ est un A-monel noethérien, alors $\bar{A}^\gamma$ est un A-monel noethérien.

D'abord, il est clair que Λ^{c_i} est un agglutiné de $\bar{A}^\gamma$. Soit $u_i : \Lambda^{c_i} \to A$ l'homomorphisme de A-monels défini par $u_i(\alpha) = \alpha c_i$. φ_i est la restriction de u_i à $\bar{A}^\gamma$, donc est un homomorphisme. Puisque A est un annéïde, l'image de φ_i est un idéal de A , donc un A-moduloïde noethérien.

Notons R la partie du produit cartésien A^s formée des s-uples $(a_1 , \dots , a_s)$ où les a_i sont deux à deux addibles. Deux éléments $(a_1 , \dots , a_s)$ et $(b_1 , \dots , b_s)$ de R seront addibles, si, et seulement si, les a_i et b_j sont deux à deux addibles ; alors, leur somme se fait par composantes. De même, le produit par $\lambda \in A$ d'un élément de R se fait par composantes. Ainsi, R est un A-moduloïde, comme on peut le voir aisément.

Pour tout $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \in \bar{A}^\gamma$, les $a_j c_i \neq 0$ sont tous addibles entre eux, par définition de $\bar{A}^\gamma$. Considérons donc l'application $\varphi : \bar{A}^\gamma \to R$ définie par $\varphi(\alpha) = (\alpha c_1 , \dots , \alpha c_s)$. φ est un homomorphisme de A-monels, dont l'image est un sous-monel de R . Par conséquent, comme R est noethérien, pour que $\bar{A}^\gamma$ soit noethérien, il suffit que le noyau de φ le soit. Or, ce noyau est

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{\alpha \in \bar{A}^\gamma \ ; \ \forall\, i \ , \ \alpha c_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^{s} \ker \varphi_i \ .$$

Application. - Soient A un annéïde noethérien de graduation Δ , et $\xi , \beta \in \Delta$. Supposons que ξ divise β , que ξ et β associent dans Δ , et que ξ soit quasi-régulier pour r .

1° L'idéal engendré par le groupe d'addibilité A_γ (avec $\gamma = \beta^r$) possède un système fini $\{c_1 , \dots , c_s\}$ de générateurs pris dans A_γ . Si, de plus (avec les notations du théorème 5), le A-monel $\bigcap_i \ker \varphi_i$ est noethérien, l'anel $A_\xi[X]$ est noethérien.

2° L'idéal (β) de A engendré par le groupe d'addibilité A_β possède un système fini $\{b_1, \ldots, b_t\}$ de générateurs pris dans A_β. Les produits c_i non nuls de r facteurs b_j sont en nombre fini, et sont éléments de A_γ (avec $\gamma = \beta^r$). Si, de plus (avec les notations du théorème 5), $\bigcap_i \ker \varphi_i$ est un A-monel noethérien, l'anel $A_\xi[X]$ est noethérien.

9. Dans un annéïde noethérien fort, la décomposition primaire existe.

Dans un annéïde (ou un anel), un idéal est dit irréductible, s'il n'est pas intersection finie d'idéaux qui le contiennent strictement. Dans un annéïde (ou un anel) vérifiant la condition de chaîne croissante, tout idéal est intersection finie d'idéaux irréductibles (même démonstration que pour les anneaux).

LEMME. - Dans un annéïde fort vérifiant la condition de chaîne croissante, tout idéal irréductible est primaire.

Si un idéal q n'est pas primaire, il existe $b, c \in A \setminus q$ tels que $bc \in q$ et que $b^i \notin q$ pour tout i. La suite $q:\{b^i\} = \{z \in A ; zb^i \in q\}$ d'idéaux de A est croissante, donc stationnaire à partir de l'indice s. Comme A est fort, b est quasi-régulier pour l'indice r. Posons $n = r + s$. Les idéaux $\mathfrak{a} = q + (c)$, $\mathfrak{b} = q + Ab^n = q + \bar{A}^{b^n} b^n$, contiennent q strictement (respectivement $c \notin q$ et $b^{n+1} \notin q$).

Tout $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $x \neq 0$, s'écrit $x = u + \xi b^n = v + \eta c + mc$, avec u et $v \in q$, $m \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \bar{A}^{b^n}$ et $\eta \in \bar{A}^c$. Puisque $x \neq 0$, les termes sont tous addibles à x, donc entre eux. On a

$$bx = bv + \eta bc + mbc$$

qui est dans q, d'où

$$\xi b^{n+1} = (\xi b^n)b = (x - u)b \in q \quad .$$

Puisque b est quasi-régulier pour r, et que $r \leq n$, b^r agglutine ξ, et on pose $d = \xi b^r$. On a donc $db^{s+1} = \xi b^{n+1} \in q$, et par suite $d \in q:\{b^{s+1}\} = q:\{b^s\}$, et enfin $\xi b^n = db^s \in q$. Donc $x = u + \xi b^n$ est élément de q. On a $q = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, et q est réductible.

Par contre, les conditions du lemme ne semblent pas suffisantes dans les anels.

Dans un annéïde noethérien fort, toutes les conséquences habituelles du lemme ont lieu : tout idéal possède une décomposition primaire réduite ; on a de même des composantes primaires immergées ou isolées, ces dernières étant uniques.

Pour un annéïde A, les hypothèses " A fort" et " A noethérien" sont étrangères. Un anneau non noethérien est un annéïde fort. On verra, ce qui est moins évident, qu'un annéïde peut être noethérien, sans être fort.

10. Demi-groupes (ou monoïdes) noethériens.

(a) Notion de demi-groupe noethérien.

Soit D un demi-groupe, ou monoïde. Une partie H de D est dite un idéal de D, si $DH \subset H$. Une partie S de D est dite un système de D-générateurs de H, si H est le plus petit idéal contenant S. On note (a) l'idéal engendré par un seul élément a. Un idéal étant un sous-demi-groupe, on distinguera système de D-générateurs (comme idéal) et système de générateurs (comme demi-groupe).

D est dit noethérien, si ses idéaux vérifient les trois conditions équivalentes traditionnelles. Par exemple, si la graduation propre d'un anel noethérien est un demi-groupe, ce dernier est noethérien.

Deux éléments a et b d'un monoïde D seront dits associés au sens large, si, et seulement si, les D-idéaux (a) et (b) sont égaux. Cela signifie que chacun des éléments a et b divise l'autre, ou lui est égal. L'association large est, évidemment, une relation d'équivalence sur D compatible avec le produit dans D. Le monoïde quotient sera appelé la charpente de D. On appellera charpente ou holoïde, tout monoïde où deux éléments associés au sens large sont égaux. Il est évident qu'un monoïde est noethérien si, et seulement si, sa charpente l'est. Pour un D-idéal H, appelons système minimal T de D-générateurs de H, tout système (s'il en existe) de D-générateurs tels qu'aucun d'eux n'en divise un autre.

LEMME 1. - *Soit H un idéal d'une charpente D. Si H possède un système minimal T de D-générateurs, tout autre système de D-générateurs de H contient T. En particulier, si H est de type fini, il possède un plus petit système de D-générateurs.*

Soit S un autre système de D-générateurs de H. Quel que soit $x \in T$, il existe $s_x \in S$ tel que $(s_x) \supset (x)$, et il existe $y \in T$ tel que $(y) \supset (s_x)$. D étant une charpente, et T étant minimal, on a $y = x = s_x$, d'où $T \subset S$. Enfin, si H admet un système fini de D-générateurs, on en extrait aisément un système minimal.

La relation d'association large est distincte de l'association au sens strict habituel (où a est produit de b par un élément inversible). On le voit en considérant le monoïde des monômes en x, y, z dans l'exemple suivant.

Soient k un corps, et A l'anneau noethérien des polynômes sur k, à trois variables x, y, z liées par la relation $x - xyz = 0$. Les idéaux (x) et (xz)

de l'anneau A sont égaux. Mais nous verrons que x et xz sont diviseurs propres l'un de l'autre, et que x n'est pas un produit d'irréductibles. Supposons que x et xz soient associés stricts dans A , c'est-à-dire qu'il existe $f(x , y , z)$, éléments inversibles de A , tel que $x = xzf$. Soit $g(x , y , z)$ un inverse de f . On a donc $xz = xg$, d'où l'on déduit

$$g = z + (1 - yz)\, q_0(x , y , z) \quad ,$$

soit encore

$$g = z + (1 - yz)\, q(y , z) \quad ,$$

car, multipliés par $(1 - yz)$, les termes en x de q_0 disparaissent. De $x = xzf = xzy$, on déduit

$$zf = zy + (1 - yz)\, p_0(x , y , z) \quad .$$

Donc z est en facteur dans p_0 , et l'on a

$$f = y + (1 - yz)\, p_1(x , y , z) \quad ,$$

donc, de même que plus haut,

$$f = y + (1 - yz)\, p(y , z) \quad .$$

Donc f et g appartiendraient au sous-anneau $k[y , z]$, dont les seuls inversibles sont les scalaires. On a une contradiction. Donc x et xz ne sont pas associés stricts. D'autre part, tout élément $p(x , y , z)$ de A s'écrit

$$p = q(y , z) + xr(x , y , z) \quad ,$$

avec unicité pour le polynôme q , puisque x est en facteur dans $x = xyz$. Si x était un produit d'irréductibles, soit

$$x = \prod_{i=1}^{n} p_i \; , \qquad \text{avec} \quad n \geqslant 1 \quad ,$$

et, pour tout i , p_i irréductible et égal à $q_i(y , z) + xr_i(x , y , z)$. On en déduit

$$x = \prod_{i=1}^{n} q_i(y , z) + xR(x , y , z) \quad .$$

L'unicité précédente montre que $\prod_{i=1}^{n} q_i = 0$, d'où, puisque $k[y , z]$ est intègre, l'existence de i_0 tel que $q_{i_0} = 0$. Donc, l'irréductible p_{i_0} serait divisible par x . Mais x n'est pas irréductible, car on sait que x et xz sont diviseurs propres l'un de l'autre. D'autre part, x n'est pas inversible, comme diviseur de zéro. Alors, que x soit associé à p_{i_0} ou en soit un diviseur propre,

p_{i_0} ne peut pas être irréductible, ce qui est une contradiction. Dans l'anneau noethérien A, x n'est pas produit d'irréductibles.

(b) Le graphe d'une charpente noethérienne.

Pour un élément x d'une charpente D, les puissances $\{x^n\}_{n \geqslant 1}$ sont, ou toutes égales à partir d'un exposant e, appelé indice stationnaire de x, ou toutes différentes (on pose alors $e = \infty$). En effet, si par exemple $x^i = x^j$ avec $1 \leqslant i < j$, on en déduit (D étant une charpente) $x^i = x^{i+1}$, et enfin $x^i = x^n$ pour tout $n \geqslant i$.

LEMME 2 (des unités). - Soient D une charpente noethérienne, et x et a_0 deux éléments de D. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) x est unité de a_0 ;

(β) Il existe une suite $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ d'éléments de D tels que, quel que soit n, $a_n = xa_{n+1}$.

Au contraire, si x n'est pas unité de a_0, il existe $j \geqslant 0$ et $b \in D$ tels que $a_0 = x^j b$ et que x ne divise pas b.

Si (α) est vérifiée, on pose $a_n = a_0$, pour tout n. Inversement, comme D est noethérienne, la suite croissante d'idéaux (a_n) est stationnaire à partir d'un entier s. Quel que soit $n \geqslant s$, $a_n = a_s$. On a alors

$$a_0 = x^{s+1} a_{s+1} = xx^s a_s = xa_0 \quad .$$

La deuxième assertion est évidente. Si x et a_0 vérifient les propriétés équivalentes du lemme, on dira que x divise a_0 indéfiniment. Cela implique la propriété :

(γ) Toute puissance de x divise a_0.

Si l'indice stationnaire de x est fini, (α) et (γ) sont équivalentes. Il n'en est pas forcément ainsi lorsqu'il est infini.

Dans l'étude qui va suivre, on suppose dans la charpente noethérienne D l'existence d'un élément unité, ce qui ne modifie en rien les résultats et leur généralité, mais allège parfois la rédaction. Dans le cas contraire, l'essentiel est de se souvenir que l'expression a divise b signifie $(a) \supset (b)$ (donc, soit $b = ca$, $c \in D$; soit $a = b$).

On va définir, pour tout élément α de l'ensemble Ω des ordinaux inférieurs strictement à un certain ordinal λ, un ensemble R_α de facteurs résiduels ou résidus d'indice α. On notera D_α le D-idéal engendré par R_α, et, D étant noethérien, $X_\alpha \subset R_\alpha$ le plus petit système, fini, de D-générateurs de D_α. On notera M_α le sous-monoïde de D engendré par $U_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$, c'est-à-dire l'ensemble des produits finis de puissances non toutes nulles d'éléments de U_α. $X = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ sera un système de générateurs du monoïde D. On pose d'abord $R_1 = D_1 = D$, donc $X_1 = \{1\}$, puis $R_2 = D_2 = D \smallsetminus \{1\}$.

Définition des suites de factorisation et des résidus. – Pour un ordinal $\sigma \in \Omega$, supposons connus :

1° Pour tout $d \in D$, au moins une σ-suite de factorisation de d, c'est-à-dire que, pour chaque $\alpha < \sigma$ (et $\alpha \geqslant 2$), est connu un couple $C_\alpha = \{m_\alpha , E_\alpha\}$ dans lequel $m_\alpha \in D$, et E_α, ou est vide, ou contient un seul élément $d_\alpha \in D_\alpha$; d_α est appelé un résidu d'indice α de d. On prend $C_\alpha(1) = (1 , \emptyset)$ et, si $d \neq 1$, $C_2(d) = (1 , d)$.

2° Pour tout $\alpha < \sigma$, l'ensemble R_α des résidus, et aussi l'idéal D_α, le système X_α, et le monoïde M_α.

Nous supposons de plus que ces éléments connus vérifient les conditions suivantes :

(a) Quel que soit $\alpha < \sigma$, R_α est l'ensemble des résidus d_α, pour tous les $d \in D$, et pour toutes les σ-suites de factorisation de d.

Quel que soit $d \in D$, quelle que soit la σ-suite de factorisation de d, et quel que soit l'ordinal $\alpha < \sigma$;

(b) $m_\alpha \in M_\alpha$; si $E_\alpha = \emptyset$, $d = m_\alpha$; sinon, $d_\alpha \notin M_\alpha$, et on a $d = m_\alpha d_\alpha$ (donc on a $D = M_\alpha \cup D_\alpha \cup M_\alpha D_\alpha$) ;

(c) Si α est de première espèce, et si $E_{\alpha-1}$ n'est pas vide :

Ou bien $d_{\alpha-1} \in M_\alpha$, et on a $C_\alpha = \{m_{\alpha-1} d_{\alpha-1} , \emptyset\}$;

(d) Ou bien, dans les mêmes conditions, $d_{\alpha-1} \notin M_\alpha$, et on a $d_{\alpha-1} = p_{\alpha-1} d_\alpha$, $m_\alpha = m_{\alpha-1} p_{\alpha-1}$; $p_{\alpha-1}$ égale 1 ou appartient au monoïde engendré par $X_{\alpha-1}$; d_α est étranger à certains éléments de $X_{\alpha-1}$ (notamment ceux qui figurent dans $p_{\alpha-1}$) et admet les autres (un au moins) pour unités ;

(e) Si α est de seconde espèce, il existe $\beta < \alpha$ tel que $C_\beta = C_\alpha$;

(f) S'il existe $\beta < \alpha$ tel que $E_\beta = \emptyset$, on a $C_\beta = C_\alpha$.

On dit que la σ-suite est achevée, s'il existe $\varphi < \sigma$ tel que $E_\varphi = \emptyset$, et qu'elle s'achève en φ, si φ est le plus petit ordinal vérifiant cette condition. Noter que φ est de première espèce.

Alors, montrons, pour tout $d \in D$, qu'une σ-suite de factorisation de d se prolonge en une $(\sigma + 1)$-suite, c'est-à-dire qu'il existe un couple C_σ convenable, et montrons l'existence d'un ensemble R_σ de résidus d'indice σ. S'il existe $\beta < \sigma$ tel que E_β soit vide, on pose $C_\sigma = C_\beta$. Etudions le cas contraire.

Lorsque σ est de première espèce, notons $X_{\sigma-1} = \{x_{\sigma-1,i}\}_{i\in I}$ ou plus simplement $\{x_i\}_{i\in I}$, le plus petit système (fini) de D-générateurs de $D_{\sigma-1}$. Soit $I^0 = \{i \in I \ ; \ x_i \text{ divise } d_{\sigma-1}\}$. Comme $d_{\sigma-1} \in D_{\sigma-1}$, I^0 n'est pas vide. Procédons par disjonction des cas :

(1) Si $d_{\sigma-1} \in M_\sigma$, on prend $C_\sigma = \{m_{\sigma-1}\, d_{\sigma-1}, \emptyset\}$;

(2) Si $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$, et si, quel que soit $i \in I^0$, x_i est unité de $d_{\sigma-1}$, on pose $C_\sigma = C_{\sigma-1}$;

(3) Si $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$, et s'il existe $i_1 \in I^0$ tel que x_{i_1} ne soit pas unité de $d_{\sigma-1}$, le lemme des unités montre l'existence de $j_1 \geqslant 1$ et de $b_1 \in D$ tels que $d_{\sigma-1} = x_{i_1}^{j_1}\, b_1$ et que x_{i_1} ne divise pas b_1. Alors, $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$ implique $b_1 \notin M_\sigma$ (qui contient $M_{\sigma-1}$), donc $b_1 \in D_{\sigma-1}$. Donc

$$I^1 = \{i \in I \ ; \ x_i \text{ divise } b_1\} = \{i \in I^0 \ ; \ x_i \text{ divise } b_1\}$$

est non vide.

On poursuit l'étude avec b_1 et I^1 comme avec $d_{\sigma-1}$ et I^0. Finalement, on obtient une partie non vide (car $d_{\sigma-1} \notin M_\sigma$) I^n de I, un élément $b_n \notin M_\sigma$, et une factorisation $d_{\sigma-1} = p_{\sigma-1}\, b_n$, avec $p_{\sigma-1} = \prod_{k=1}^{n} x_{i_k}^{j_k}$, où les $i_k \notin I^n$, où les x_i pour $i \notin I^n$ ne divisent pas b_n, et où les x_i pour $i \in I^n$ sont unités pour b_n. On pose alors $d_\sigma = b_n$, et $m_\sigma = m_{\sigma-1}\, p_{\sigma-1}$. On a donc $d_\sigma \notin M_\sigma$ et $m_\sigma \in M_\sigma$. Noter que d_σ peut dépendre du choix des indices i_1, ...

Lorsque σ est de seconde espèce, la chaîne d'idéaux $\{(d_\alpha)\}_{\alpha<\sigma}$ est croissante, donc stationnaire, car D est noethérien. Donc il existe un ordinal $\beta < \sigma$ tel que $\beta \leqslant \alpha < \sigma$ implique $d_\beta = d_\alpha$. On pose alors $C_\sigma = C_\beta$. Puisque $M_\sigma = \bigcup_{\alpha<\sigma} M_\alpha$, on a $m_\sigma \in M_\sigma$, et $d_\beta \notin M_\alpha$ pour $\beta \leqslant \alpha < \sigma$ implique $d_\beta \notin M_\sigma$. Il est clair que la $(\sigma + 1)$-suite déterminée pour d vérifie les conditions annoncées.

Par définition, R_σ est l'ensemble des résidus d_σ ainsi définis pour tous les $d \in D$, et pour toutes les $(\sigma + 1)$-suites de factorisation de d. Il est clair que la famille des monoïdes M_α, ordonnée par inclusion, est strictement croissante. Donc, il existe un ordinal λ tel que $M_\lambda = D$. Donc, toute λ-suite d'un $d \in D$ est achevée, et donne une factorisation m_λ de d (pas forcément unique), par les éléments de $X = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. Le fait qu'il puisse exister des λ-suites, ou des factorisations autres que celles envisagées dans l'étude précédente, n'interviendra pas dans les démonstrations ultérieures. Appelons X_α la <u>couche</u> d'indice α.

Propriété d'absorption dans les couches X_α. - Soit $d \in X_\sigma$, et considérons une $(\sigma + 1)$-suite de factorisation de d. Certainement E_σ est non vide, sinon $d \in M_\sigma$ et ne serait pas un résidu d'indice σ. Donc $d = m_\sigma d_\sigma$, où d_σ est un résidu d'indice σ de d. Puisque $d_\sigma \in R_\sigma$, il existe $x \in X_\sigma$ tel que x divise d_σ, qui divise d. X_σ étant le plus petit système de D-générateurs de D_σ, on a $x = d_\sigma = d$, et $d = m_\sigma d$. Si m_σ est différent de 1, soit X_α la première couche dont des éléments figurent dans m_σ, et soit z le premier élément de cette couche mis en facteur dans la $(\sigma + 1)$-suite par le procédé (3) de factorisation. Mais $d = m_\sigma d$ implique $d = zd$; donc (lemme 2) z est unité pour d, ce qui contredit (3). Donc on a $m_\sigma = 1$.

Remarque. - Les éléments d'une couche X_σ quelconque sont des résidus d'indice α, pour tout $\alpha \leq \sigma$.

LEMME 3 (d'absorption). - Quelles que soient les couches X_α et X_β, $\alpha < \beta$, tout élément x_β de X_β absorbe certains éléments, et un au moins, de X_α, et n'est divisé par aucun des autres.

En particulier, entre éléments de X, x divise y signifie que y absorbe x, que x est unité de y.

On constate maintenant que les couches X_α et les idéaux D_α peuvent être déterminés de façon plus simple. On pose $Y_1 = D$. Puis, si $\alpha \geq 2$ est de première espèce, soit Y_α l'ensemble des éléments de $Y_{\alpha-1}$ qui admettent certains éléments (un au moins) de $X_{\alpha-1}$ comme unités, et qui ne sont pas multiples des autres. Si α est de seconde espèce, on pose $Y_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} Y_\beta$. Il est clair que $Y_\alpha \subset R_\alpha$, et le lemme 3 montre que $X_\alpha \subset Y_\alpha$. Donc Y_α engendre le D-idéal D_α, et détermine la couche X_α. La définition des couches est donc indépendante de celle des suites de factorisation. Il en résulte que l'ensemble X de générateurs de la charpente D, la partition de X en un ensemble bien ordonné de couches finies X_α, et les conditions d'absorption (lemme 3), sont uniquement déterminés par D. La donnée de X, de sa partition $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, et des conditions d'absorption, sera appelée le graphe X de la charpente noethérienne D. Et si M est le monoïde commutatif, libre au sens de LJAPIN ([4], chap. IX), engendré par X et les relations d'absorption, D est un monoïde quotient de M.

On appelle partie transverse d'un monoïde D, toute partie non vide T de D dont aucun élément n'est multiple d'un autre (c'est-à-dire, $\forall$ a et $b \in T$, $a \neq b$, les idéaux (a) et (b) ne sont pas comparables). Par exemple, une couche X_α est une partie transverse. Une partie d'une partie transverse est transverse.

LEMME 4. - Le graphe d'une charpente noethérienne ne contient pas de partie transverse infinie.

Si $T = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie transverse infinie d'un monoïde M, la suite de M-idéaux $H_n = \bigcup_{i\leq n} (x_n)$ est strictement croissante, donc M n'est pas noethérien. En particulier, si D est une charpente noethérienne, toute partie transverse de D, donc de son graphe X, est finie.

(c) Le théorème fondamental.

THÉORÈME. - Une charpente (commutative) D est noethérienne, si, et seulement si, elle est image homomorphe d'une charpente M vérifiant les conditions suivantes :

Il existe un système X de générateurs du monoïde commutatif M, et une partition de X en un ensemble bien ordonné de couches finies non vides X_α, ensemble indexé par les ordinaux strictement inférieurs à un certain ordinal λ ;

Toute couche X_α est une partie transverse ;

Quels que soient les ordinaux α et β tels que $\alpha < \beta < \lambda$, quel que soit $y \in X_\beta$, il existe une partie non vide $X_\alpha(y) \subset X_\alpha$ telle que $x \in X_\alpha(y)$ équivaut à $xy = y$.

Ces relations, et celles de commutativité, sont les seules existant entre les éléments de X.

Enfin, toute partie transverse de X est finie.

Un ensemble X vérifiant les conditions du théorème, sauf peut-être la dernière (finitude des parties transverses), sera appelé un graphe de générateurs. On dira que le graphe est noethérien, s'il n'a pas de partie transverse infinie. Le théorème s'énonce alors plus brièvement :

Une charpente D est noethérienne, si, et seulement si, elle est une image homomorphe du monoïde "libre" engendré par un graphe noethérien.

Nous avons vu que la condition est nécessaire. Il reste à montrer qu'elle est suffisante. Soient donc X un graphe de générateurs, et M le monoïde "libre" qu'il engendre. Supposons que M possède une partie transverse infinie P, et montrons qu'il en est de même pour X. D'abord, voyons deux lemmes préliminaires.

Si $m \in M$, il est un produit de puissances d'un nombre fini de générateurs appartenant à X, qui forment une partie transverse. En effet, si l'un de ces générateurs, x, en divise un autre, y, x est unité pour y, et peut être omis dans le produit. Nous dirons qu'une telle décomposition de m est réduite (ou irréductible). Une décomposition réduite est unique. Sinon, deux décompositions réduites distinctes de m donneraient une relation supplémentaire entre éléments de X, autre que celles imposées (voir théorème) à un graphe.

LEMME 5.

(1) Si un générateur $x \in X$ divise un élément m de M, il divise (c'est-à-dire est unité pour, ou est égal à) un facteur de la décomposition réduite de m.

(2) Soient $m \in M$, $\{x_1, \dots, x_s\}$ une partie transverse de X, et $n_1, \dots, n_s$ des entiers $\geqslant 1$. Si, pour tout $i = 1, \dots, s$, $x_i^{n_i}$ divise m, alors $\prod_{i=1}^{s} x_i^{n_i}$ divise m.

Si $m = x^e p$, avec $e \geqslant 1$, de la décomposition réduite de $p = \prod_{j=1}^{r} z_j^{e_j}$, déduisons comme ci-dessus celle de m ; si donc x n'est pas unité d'un z_j, x figure dans la décomposition réduite de m, avec un exposant $\geqslant e$.

Si x_i est unité pour un facteur de la décomposition réduite de m, il l'est pour m, et l'on a $m = x_i^{n_i} m$. Dans le cas contraire, x_i figure dans la décomposition réduite de m, avec un exposant $\geqslant n_i$, d'où le résultat.

Remarquons que, si $x \in X$ est tel que x^{n+1} ne divise pas m, x n'est pas unité de m ; si donc $m = x^n p$, p est unique.

LEMME 6. - Soit P une partie transverse infinie de M.

(1) Quel que soit p dans P, sa décomposition réduite contient au moins un générateur $y \in X$, avec l'exposant $e \geqslant 1$, tel qu'il existe une partie infinie $U(y^e)$ de P dont y^e ne divise aucun élément. Lorsqu'un générateur $y \in X$ vérifie cette condition pour au moins un élément p de P, il est dit facteur régulier de P.

(2) Si y est un facteur régulier de P, il existe un entier k, $0 \leqslant k \leqslant e - 1$, et une partie V de M dont y ne divise aucun élément, tels que $y^k V$ soit une partie infinie de P (donc V est infinie transverse), et que tout facteur z régulier pour V soit régulier pour P.

(3) P possède une infinité de facteurs réguliers.

Soit $p = \prod_{j=1}^{s} y_j^{e_j}$ la décomposition réduite de p, avec les $y_j \in X$. Pour chaque j, notons F_j l'ensemble des éléments de P que $y_j^{e_j}$ ne divise pas. Si tous les F_j étaient finis, leur réunion F le serait aussi, et $P \setminus F$ serait non vide. Donc, pour un $h \in P \setminus F$, tout $y_j^{e_j}$ diviserait h, et p diviserait h (lemme 5) ; P ne serait pas transverse.

Si y est régulier pour P, d'exposant e, pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant e-1$, notons U_i la partie de $U(y^e)$ formée des éléments divisibles par y^i, mais non par y^{i+1}. Comme $U(y^e)$ est la réunion des U_i, l'un de ces ensembles, soit U_k, est infini. Lorsque $k = 0$, $V = U_0$ convient évidemment. Lorsque $k \geqslant 1$, pour chaque $u \in U_k$, y^{k+1} ne divise pas u, donc y n'est pas unité de u. Par suite, la décomposition réduite de u s'écrit $u = y^k v$, où $v \in M$ est unique et écrit sous forme réduite, où y ne divise pas v, où tout générateur g figurant dans v ne divise pas y (en particulier, $\{y , g\}$ est transverse). On prend pour V l'ensemble de ces éléments v ainsi définis, pour u parcourant U_k. On a $U_k = y^k V$, et V est infini transverse. Toujours pour $k \geqslant 1$, soit z un facteur régulier pour V, avec l'exposant $a \geqslant 1$ dans $v_0 \in V$. $\{y , z\}$ étant transverse, z^n divise un $v \in V$ si, et seulement si, $y^k z^n$ divise $y^k v$. Donc, z est facteur de $u_0 = y^k v_0$ avec l'exposant a ; et si z^a ne divise pas un $v \in V$, il ne divise pas $y^k v \in U_k$. Donc z est facteur régulier pour P.

Notons y_1 un facteur régulier de P, et V_1 la partie infinie transverse associée à y_1 par l'assertion (2) du lemme. Supposons connus n facteurs réguliers distincts $y_1 , \dots , y_n$ de P, et un ensemble infini transverse V_n, dont y_i ne divise aucun élément, quel que soit $i = 1 , \dots , n$, et dont tout facteur régulier soit régulier pour P. Prenons alors un facteur y_{n+1} régulier pour V_n, et soit V_{n+1} l'ensemble infini transverse qui lui est associé par (2) : On sait qu'il existe un entier k tel que $y_{n+1}^k V_{n+1}$ soit une partie infinie de V_n, que pour tout $i \leqslant n$, y_i est distinct de y_{n+1}, que y_{n+1} ne divise aucun élément de V_{n+1}, et que tout facteur régulier pour V_{n+1} l'est pour V_n, donc pour P. On a montré l'existence d'un ensemble infini $Y = \bigcup_{n \geqslant 1} \{y_n\}$ de facteurs réguliers de P.

Achevons la démonstration du théorème. Dans la construction précédente de Y, posons $Y_n = \{y_1 , \dots , y_n\}$, $V_0 = P$, et pour tout $n \geqslant 0$, notons F_n l'ensemble des facteurs réguliers pour V_n. Nous savons que, pour tout $n \geqslant 0$, F_n est infini, et F_n contient F_{n+1}. Les couches X_α sont bien ordonnées, et, pour tout $n \geqslant 0$, il existe un plus petit ordinal α_{n+1} tel que $F_n \cap X_{\alpha_{n+1}}$ soit non vide ; prenons y_{n+1} dans $F_n \cap X_{\alpha_{n+1}}$. Alors, quel que soit $x \in F_{n+1} \subset F_n$, on a $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha(x)$, si $\alpha(x)$ désigne l'ordinal de la couche de x. En particulier, si Y_n est transverse, pour tout $i \leqslant n$, on a $\alpha_i \leqslant \alpha_{n+1}$, donc y_{n+1} ne divise pas y_i (c'est-à-dire n'en est pas unité). D'autre part, pour tout $i \leqslant n$, y_i ne divise aucun élément de V_i (lemme 6), donc de F_i, donc ne divise pas y_{n+1}. Cela entraîne que Y_{n+1} aussi est transverse. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, Y_n est transverse. La réunion $Y = \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n$ est donc une partie infinie transverse du graphe.

On connaît donc la structure de toute charpente noethérienne. Pour passer d'une charpente C à un monoïde noethérien D admettant C pour charpente, il faut opérer une sorte de "dilatation" de la charpente. Pour tout $t \in C$, on se donne un ensemble D_t, ces ensembles étant deux à deux disjoints ; on note D leur réunion. Puis, pour tout couple $(t, t') \in C^2$, on se donne une application

$$\varphi_{t,t'} : D_t \times D_{t'} \to D_{tt'} ,$$

vérifiant d'abord les conditions suivantes (commutativité et associativité) :

Quels que soient t, t' et t'' dans C, quels que soient a dans D_t, a' dans $D_{t'}$, et a'' dans $D_{t''}$, on a

$$\varphi_{t,t'}.(a , a') = \varphi_{t',t}.(a' , a) ,$$

$$\varphi_{tt',t''}.[\varphi_{t,t'}.(a , a') , a''] = \varphi_{t,t't''}.[a , \varphi_{t't''}.(a' , a'')] .$$

Ensuite, pour tout $t \in C$, notons $E_t = \{t' \in C ; tt' = t\}$, et $U_t = \bigcup_{t' \in E_t} D_{t'}$. On a $E_t^2 \subset E_t$, d'où $U_t^2 \subset U_t$, et (par définition de E_t), quel que soit $d \in E_t$, $dU_t \subset D_t$. Soient d et d' dans D_t, vérifiant $d' = du$; si $u \in D_\theta$, on doit avoir $t\theta = t$, donc $u \in U_t$. Donc, pour que les éléments de tout D_t soient associés entre eux au sens large, il faut et il suffit que :

(A.1) Quels que soient $t \in C$ et $d \in D_t$, on ait $dU_t = D_t$.

Cette dernière condition peut s'exprimer autrement. Supposons maintenant que, pour tout $t \in C$, un élément au moins $x = x(t) \in D_t$ vérifie $xU_t = D_t$. La relation $xu = xu'$ définit sur U_t une relation d'équivalence, pour laquelle $\overline{u}$ désignera la classe de u, et $\overline{U}_t$ l'ensemble quotient. La condition (A.1) s'écrit alors : Pour tout $t \in C$, pour tout $u \in U_t$, on a $xuU_t = xU_t$, ce qui équivaut à $\overline{u}\overline{U}_t = \overline{U}_t$, donc au fait que $\overline{U}_t$ soit un groupe. Finalement, la condition (A.1) d'association large peut être formulée ainsi : Quel que soit $t \in C$, il existe $x \in D_t$ vérifiant les conditions $xU_t = D_t$, et $\overline{U}_t$ est un groupe. Bien entendu, des conditions, que l'on peut expliciter, sont imposées aux fonctions $\varphi_{t,t'}$.

(d) Exemple d'annéïde noethérien pas fort.

Dans l'exemple qui suit, nous allons montrer qu'un annéïde noethérien peut n'être pas fort. L'annéïde construit, A, aura ses domaines d'addibilité isomorphes au groupe additif du corps à deux éléments, et sera déterminé par la donnée de sa graduation propre D (commutative). On pourra prendre D pour support de A. On se donne le graphe noethérien suivant : $X = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, avec $X_1 = \{1 = e_1\}$, $X_2 = \{e_2 , x\}$, et pour $2 < \alpha < \lambda$, $X_\alpha = \{e_\alpha\}$, en supposant que x n'est unité pour aucun élément du graphe (donc, pour $\alpha < \beta < \lambda$, on a $e_\alpha e_\beta = e_\beta$, et aussi $1x = x$).

1° On suppose infini le cardinal de λ . On considère le monoïde "libre" du graphe X , et soit D son quotient par les relations suivantes : Tout élément e_α est idempotent. Une suite $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ strictement croissante d'ordinaux $< \lambda$ est donnée, et quel que soit $i \geqslant 1$, quels que soient α et $\beta < \lambda_i$, on a $x^i e_\alpha = x^i e_\beta$. En fait, seules les puissances de x agglutinent. On voit que, lorsque l'exposant i augmente, x^i agglutine à 1 un ensemble de générateurs e_α de plus en plus important. Donc x n'est pas quasi-régulier fort, et l'annéïde noethérien A n'est pas fort.

2° Donnons-nous un monoïde commutatif quelconque D dont tout élément est périodique, c'est-à-dire que, pour tout $d \in D$, il existe des entiers $n(d)$ et $p(d) \geqslant 1$ tels que $d^{n(d)+p(d)} = d^{n(d)}$. Alors, tout annéïde A de graduation D est fort, bien qu'il puisse n'être pas noethérien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 2 : Algèbre linéaire. 3e édition. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[2] CHADEYRAS (Marcel). - Essai d'une théorie noethérienne homogène ..., Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 22, 1970, 143 p. (Thèse Sc. math. Clermont-Ferrand, 1969).

[3] KRASNER (Marc). - Théorie des corps values, Séminaire 1953/54. Vol. 1 et 2 : Exposés 1 à 5. - Paris, Secrétariat mathématique, 1956.

[4] LJAPIN (E. S.). - Polugruppy [Demi-groupes]. - Moskva, 1960.

[5] SAGASTUME BERRA (Alberto E.). - Systemas de homogeneïdad, Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. C. fisico-mat., 2a serie, Rev. 6, n° 3, 1959, p. 5-17.

[6] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. Vol. 1. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958 (University Series in higher Mathematics).

(Texte reçu le 16 juillet 1970)

Marcel CHADEYRAS
Faculté des Sciences
34 avenue Carnot
63 - CLERMONT-FERRAND