

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

CHRISTIAN PITTI

Éléments de norme 1 des corps cubiques non galoisiens. Généralisation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 1 (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A2_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS DE NORME 1 DES CORPS CUBIQUES NON GALOISIENS. GÉNÉRALISATION,

par Christian PITTI

1. Introduction.

Considérons le problème de la résolution de l'équation $N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1$, $k(\theta)$ étant une extension cubique non galoisienne d'un corps de nombres k .

On sait que, si K désigne la clôture galoisienne de $k(\theta)$, on a $[K:k] = 6$.

De plus, si $\theta, \theta', \theta''$ sont les conjugués de θ , et si σ, τ sont les automorphismes de K , définis par

$$\sigma : \theta \rightarrow \theta' \rightarrow \theta'' \rightarrow \theta ,$$

$$\tau : \theta \rightarrow \theta , \quad \theta' \leftrightarrow \theta'' ,$$

le groupe de Galois $G_{K/k}$ est engendré par σ et τ .

On vérifie que $\sigma^3 = \tau^2 = 1$, $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$. G est donc le groupe diédral d'ordre 2×3 .

2. Généralisation de cette situation.

Soient k un corps de nombres, et K une extension galoisienne de k dont le groupe de Galois $G_{K/k}$ est diédral d'ordre $2p$.

$G_{K/k}$ est donc engendré par σ et τ vérifiant

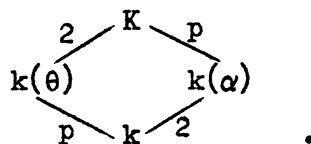
$$\begin{cases} \sigma^p = \tau^2 = 1 , \\ (\forall i) \quad \tau\sigma^i = \sigma^{-i}\tau . \end{cases}$$

Soient

$$\begin{cases} k(\theta) & \text{le corps fixe par } \tau , \\ k(\alpha) & \text{le corps fixe par } \sigma . \end{cases}$$

Le but de cet exposé est la recherche des solutions de l'équation

$$(E) \quad N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 .$$



Nous allons tout d'abord donner une interprétation géométrique de cette équation.

$\beta \in k(\theta)$ s'écrit, de façon unique, $\beta = x_1 + \theta x_2 + \dots + \theta^{p-1} x_p$, avec $x_i \in k$ pour tout i . Donc

$$N_{k(\theta)/k}(\beta) = f(x_1, \dots, x_p) \in k[x_1, x_2, \dots, x_p] .$$

Soient alors S l'hypersurface de K^p , d'équation $f(x_1, \dots, x_p) = 1$, et F l'ensemble des points de S à coordonnées dans k (nous dirons par la suite, pour abréger, que les points de F sont les points rationnels de S).

$$N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 \iff (x_1, \dots, x_p) \in F .$$

Posons

$$\theta_i = \sigma^i(\theta) , \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1 ,$$

E_r = espace projectif sur K de dimension r , pour $r \in \mathbb{N}$.

L'hypersurface projective d'équation $f(x_1, \dots, x_p) = t^p$ admet sur E_{p-1} la représentation birationnelle définie par

$$x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} , \quad \text{pour } i = 1, \dots, p ,$$

$$t = \prod_{i=1}^p \lambda_i ,$$

avec, à partir de maintenant, la convention que $\lambda_{p+r} = \lambda_r$ pour $r = 1, \dots, (p-1)$.

La restriction de cette représentation à S définit une bijection de S sur l'ensemble des points de E_{p-1} tels que $\prod_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$ (que nous noterons T).

$$T : m(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1} \rightarrow P(x_1, \dots, x_p) \in S$$

est donc définie par

$$x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} , \quad \text{pour } i = 1, \dots, p .$$

On a

$$P \in F \iff \begin{cases} P \in S , \\ \sigma(P) = P , \\ \tau(P) = P . \end{cases}$$

Or

$$P = T(m) \implies \begin{cases} \sigma(P) = \sigma(T)(\sigma(m)) , \\ \tau(P) = \tau(T)(\tau(m)) . \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma(P) = P &\iff \sigma(T)(\sigma(m)) = T(m) \iff (\sigma(T^{-1}) \circ T)(m) = \sigma(m) , \\ \tau(P) = P &\iff \tau(T)(\tau(m)) = T(m) \iff (\tau(T^{-1}) \circ T)(m) = \tau(m) . \end{aligned}$$

Soient $\alpha_\sigma, \alpha_\tau$ les transformations birationnelles de E_{p-1} en lui-même, définies par

$$\begin{cases} \alpha_\sigma = \sigma(T^{-1}) \circ T , \\ \alpha_\tau = \tau(T^{-1}) \circ T , \end{cases}$$

$$(1) \quad P \in F \iff \begin{cases} P \in S , \\ \alpha_\sigma(m) = \sigma(m) , \\ \alpha_\tau(m) = \tau(m) , \end{cases}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1} \xrightarrow{T} (x_1, \dots, x_p) \in S \xrightarrow{\sigma(T^{-1})} (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in E_{p-1} ,$$

$$x_1, \dots, x_p \text{ étant définis par } x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} , \text{ pour tout } i ,$$

$$\lambda'_1, \dots, \lambda'_p \text{ étant définis par } x_1 + \theta_i x_2 + \dots + \theta_i^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}} , \text{ pour tout } i ,$$

d'où on déduit

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+2}} = \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}} , \quad \text{pour tout } i ,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_3} = \dots = \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}} = \dots = \frac{\lambda'_p}{\lambda'_1} .$$

α_σ est donc une homographie de E_{p-1} .

Pour former α_τ , remarquons d'abord que

$$\tau(\theta_i) = \tau\sigma^i(\theta) = \sigma^{-i} \tau(\theta) = \sigma^{-i}(\theta) = \theta_{p-i} ,$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1} \xrightarrow{T} (x_1, \dots, x_p) \in S \xrightarrow{\tau(T^{-1})} (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in E_{p-1} ,$$

avec

$$x_1 + \theta_{i-1} x_2 + \dots + \theta_{i-1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}, \quad \text{pour tout } i,$$

$$x_1 + \theta_{p-i+1} x_2 + \dots + \theta_{p-i+1}^{(p-1)} x_p = \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}}, \quad \text{pour tout } i,$$

d'où on déduit

$$\frac{\lambda'_i}{\lambda'_{i+1}} = \frac{\lambda_{p-i+2}}{\lambda_{p-i+3}}, \quad \text{pour tout } i,$$

que l'on peut écrire

$$\lambda'_1 \lambda_2 = \dots = \lambda'_i \lambda_{p+3-i} = \dots = \lambda'_p \lambda_3.$$

Définissons l'application

$$\varphi : M(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \in E_{2p-1} \rightarrow m(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1}$$

par

$$(2) \quad \lambda_i = \frac{v_i}{u_{p+3-i}}, \quad \text{pour tout } i.$$

Supposons trouvé un couple $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ de transformations birationnelles de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\sigma, \\ \alpha_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\tau. \end{cases}$$

On constate alors que, si M est solution de

$$(4) \quad \begin{cases} \beta_\sigma(M) = \sigma(M), \\ \beta_\tau(M) = \tau(M), \end{cases}$$

$m = \varphi(M)$ est solution de (1).

En effet, les formules (4) montrent que

$$\begin{cases} \sigma(m) = \varphi(\sigma(M)), \\ \tau(m) = \varphi(\tau(M)). \end{cases}$$

Donc

$$\alpha_\sigma(m) \stackrel{(3)}{=} \varphi(\beta_\sigma(M)) \stackrel{(4)}{=} \varphi(\sigma(M)) = \sigma(m),$$

$$\alpha_\tau(m) = \varphi(\beta_\tau(M)) = \varphi(\tau(M)) = \tau(m).$$

Toute solution M de (4) fournit ainsi un point $(T \circ \varphi)(M)$ rationnel sur S .

Remarquons encore que l'on a

$$(5) \quad (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \alpha_{\sigma_1 \sigma_2} = \sigma_1 \sigma_2 (T^{-1}) \circ T \\ = \sigma_1 [\sigma_2 (T^{-1}) \circ T] \circ \sigma_1 (T^{-1}) \circ T = \sigma_1 (\alpha_{\sigma_2}) \circ \alpha_{\sigma_1}.$$

Considérons les conditions

$$(6) \quad (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \beta_{\sigma_1 \sigma_2} = \sigma_1 (\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1},$$

$$(6) \implies (\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \alpha_{\sigma_1 \sigma_2} \circ \varphi = \varphi \circ \beta_{\sigma_1 \sigma_2} = \varphi \circ \sigma_1 (\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1} \\ = \sigma_1 [\varphi \circ \beta_{\sigma_2}] \circ \beta_{\sigma_1} = \sigma_1 (\alpha_{\sigma_2} \circ \varphi) \circ \beta_{\sigma_1} \\ = \sigma_1 (\alpha_{\sigma_2}) \circ \varphi \circ \beta_{\sigma_1} = \sigma_1 (\alpha_{\sigma_2}) \circ \alpha_{\sigma_1} \circ \varphi,$$

puisque $\sigma_1(\varphi) = \varphi$. φ étant surjective, cela équivaut à $(\forall \sigma_1 \in G) \quad (\forall \sigma_2 \in G) \quad \alpha_{\sigma_1 \sigma_2} = \sigma_1 (\alpha_{\sigma_2}) \circ \alpha_{\sigma_1}$, qui sont les conditions (5).

Cela nous conduit à étudier les couples $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ de transformations birationnelles de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant (3) et (6). Nous nous limiterons à la recherche de celles de ces transformations qui sont des homographies. Nous déterminerons ensuite la famille $\mathfrak{F}$ de ces couples d'homographies pour lesquels (4) admet des solutions.

Nous montrerons alors que, pour tout $P \in F$, il existe $(\beta_\sigma, \beta_\tau) \in \mathfrak{F}$, et $M \in E_{2p-1}$ vérifiant (4), tels que $P = (T \circ \varphi)(M)$.

En dernier lieu, on étudiera à quelles conditions un seul couple de $\mathfrak{F}$ suffit à obtenir tous les points de F (dans ce cas, en effet, une seule formule fournira toutes les solutions de (E)).

3. Transformations homographiques β_σ de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant $\alpha_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\sigma$.

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \in E_{2p-1}$$

$$\xrightarrow{\beta_\sigma} (u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_p) \in E_{2p-1} \xrightarrow{\varphi} (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in E_{p-1},$$

avec, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} u_i' = \sum_{j=1}^n (a_i^j u_j + b_i^j v_j) , \\ v_i' = \sum_{j=1}^n (\alpha_i^j u_j + \beta_i^j v_j) , \\ \lambda_i' = \frac{v_i'}{u_{p+3-i}'} = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_i^j u_j + \beta_i^j v_j) \right) / \left(\sum_{j=1}^n (a_{p+3-i}^j u_j + b_{p+3-i}^j v_j) \right) ; \end{cases}$$

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \in E_{2p-1}$$

$$\xrightarrow{\varphi} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E_{p-1} \xrightarrow{\alpha_\sigma} (\lambda_1'', \dots, \lambda_n'') \in E_{p-1} ,$$

avec, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{v_i}{u_{p+3-i}} , \\ \lambda_i'' = \lambda_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{u_{p+2-i}} ; \end{cases}$$

$$\alpha_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\sigma \iff (\exists c \in K) \quad (\forall i)$$

$$c \frac{v_{i+1}}{u_{p+2-i}} = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_i^j u_j + \beta_i^j v_j) \right) / \left(\sum_{j=1}^n (a_{p+3-i}^j u_j + b_{p+3-i}^j v_j) \right)$$

$$\iff (\exists c \in K) \quad (\forall i)$$

$$\begin{cases} \alpha_i^j = 0 \text{ pour tout } j , \quad b_i^j = 0 \text{ pour tout } j , \\ \beta_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i+1 , \quad a_i^j = 0 \text{ pour } j \neq i-1 , \\ c = \frac{\beta_i^{i+1}}{a_{p+3-i}^{i+1}} . \end{cases}$$

Les équations de β_σ sont donc de la forme

$$\begin{cases} u_i' = c_i u_{i-1} , \\ v_i' = c c_{3-i} v_{i+1} , \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n ,$$

avec $c, c_1, \dots, c_n \in K$.

4. Transformations homographiques β_τ de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant $\alpha_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\tau$.

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \in E_{2p-1}$$

$$\xrightarrow{\beta_\tau} (u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_p) \in E_{2p-1} \xrightarrow{\varphi} (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in E_{p-1},$$

avec, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} u'_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij}^j u_j + b_{ij}^j v_j), \\ v'_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^j u_j + \beta_{ij}^j v_j), \\ \lambda'_i = \frac{v'_i}{u'_{p+3-i}} = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^j u_j + \beta_{ij}^j v_j) \right) / \left(\sum_{j=1}^n (a_{p+3-i}^j u_j + b_{p+3-i}^j v_j) \right); \end{cases}$$

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \in E_{2p-1}$$

$$\xrightarrow{\varphi} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E_{p-1} \xrightarrow{\alpha_\tau} (\lambda''_1, \dots, \lambda''_n) \in E_{2p-1},$$

avec, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{v_i}{u_{p+3-i}}, \\ \lambda''_i = \frac{1}{\lambda_{p+3-i}} = \frac{u_i}{v_{p+3-i}}; \end{cases}$$

$$\alpha_\tau \circ \varphi = \varphi \circ \beta_\tau \iff (\exists d \in K) (\forall i)$$

$$d \frac{u_i}{v_{p+3-i}} = \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^j u_j + \beta_{ij}^j v_j) \right) / \left(\sum_{j=1}^n (a_{p+3-i}^j u_j + b_{p+3-i}^j v_j) \right)$$

$$\iff (\exists d \in K) (\forall i)$$

$$\begin{cases} \beta_{ij}^j = 0 \text{ pour tout } j, & a_{ij}^j = 0 \text{ pour tout } j, \\ b_{ij}^j = 0 \text{ pour } j \neq i, & \alpha_{ij}^j = 0 \text{ pour } j \neq i, \\ d = \frac{\alpha_{ii}^i}{b_{p+3-i}^{p+3-i}}. \end{cases}$$

Les équations de β_τ sont donc de la forme

$$\begin{cases} u_i' = d_i v_i , \\ v_i' = dd_{\beta_i} u_i , \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n .$$

5. Système de conditions équivalentes aux conditions (6).

Rappelons que (6) est l'ensemble de conditions $(\forall \sigma_1 \in G) (\forall \sigma_2 \in G)$
 $\beta_{\sigma_1 \sigma_2} = \sigma_1(\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1}$. Cela est vérifié si σ_1 (ou σ_2) est l'identité I .

Supposons cette relation vérifiée par deux automorphismes σ_1 et σ_1' , quel que soit σ_2 ; autrement dit,

$$(\forall \sigma_2 \in G) \quad \beta_{\sigma_1 \sigma_2} = \sigma_1(\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1} ,$$

$$(\forall \sigma_2 \in G) \quad \beta_{\sigma_1' \sigma_2} = \sigma_1'(\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1'} .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (\forall \sigma_2 \in G) \quad \sigma_1 \sigma_1'(\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1 \sigma_1'} &= \sigma_1 \sigma_1'(\beta_{\sigma_2}) \circ \sigma_1(\beta_{\sigma_1'}) \circ \beta_{\sigma_1} \\ &= \sigma_1[\sigma_1'(\beta_{\sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1'}] \circ \beta_{\sigma_1} = \sigma_1(\beta_{\sigma_1' \sigma_2}) \circ \beta_{\sigma_1} \\ &= \beta_{(\sigma_1 \sigma_1') \sigma_2} , \end{aligned}$$

qui montre que la relation est vérifiée par $\sigma_1 \sigma_1'$, quel que soit σ_2 .

Il résulte de là qu'il suffit de se limiter à un système de générateurs de G . Dans le cas présent, on prendra $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_1' = \tau$.

On peut encore limiter le nombre de cas à étudier en utilisant les égalités $(\forall i) \quad \sigma^i \tau = \tau \sigma^{-i}$.

Supposons, en effet, vérifiées les relations

$$(R) \quad \begin{cases} \beta_{\sigma \sigma'} = \sigma(\beta_{\sigma'}) \circ \beta_{\sigma} , & \text{pour tout } \sigma' \in G , \\ \beta_{\tau \sigma^i} = \tau(\beta_{\sigma^i}) \circ \beta_{\tau} , & \text{pour tout } i , \\ \tau(\beta_{\tau}) \circ \beta_{\tau} = I . \end{cases}$$

On en déduit, pour tout i ,

$$\begin{aligned}
\tau(\beta_{\sigma^{-1}\tau}^i) \circ \beta_\tau &= \tau(\beta_{\tau\sigma^{-1}}^i) \circ \beta_\tau = \tau[\tau(\beta_{\sigma^{-1}}^i) \circ \beta_\tau] \circ \beta_\tau \\
&= \beta_{\sigma^{-1}}^i \circ \tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau = \beta_{\sigma^{-1}}^i = \beta_{\tau(\tau\sigma^{-1})}^i = \beta_{\tau(\sigma^{-1}\tau)}^i .
\end{aligned}$$

Les conditions (6) équivalent donc aux conditions (R). Explicitons-les :

$$\begin{aligned}
(\alpha_1) \quad \sigma(\beta_\sigma) \circ \beta_\sigma &= \beta_{\sigma^2} & (\beta_1) \quad \sigma(\beta_\tau) \circ \beta_\sigma &= \beta_{\sigma\tau} \\
\dots & & \dots & \\
(\alpha_i) \quad \sigma(\beta_{\sigma^i}) \circ \beta_\sigma &= \beta_{\sigma^{i+1}} & (\beta_i) \quad \sigma(\beta_{\sigma^{-i}\tau}) \circ \beta_\sigma &= \beta_{\sigma^{i+1}\tau} \\
\dots & & \dots & \\
(\alpha_{p-1}) \quad \sigma(\beta_{\sigma^{p-1}}) \circ \beta_\sigma &= I & (\beta_{p-1}) \quad \sigma(\beta_{\sigma^{p-1}\tau}) \circ \beta_\sigma &= \beta_\tau \\
\\
(\gamma_1) \quad \tau(\beta_\sigma) \circ \beta_\tau &= \beta_{\tau\sigma} = \beta_{\sigma^{p-1}\tau} \\
\dots & & & \\
(\gamma_i) \quad \tau(\beta_{\sigma^i}) \circ \beta_\tau &= \beta_{\tau\sigma^i} = \beta_{\sigma^{-i}\tau} \\
\dots & & & \\
(\gamma_{p-1}) \quad \tau(\beta_{\sigma^{p-1}}) \circ \beta_\tau &= \beta_{\tau\sigma^{p-1}} = \beta_{\sigma\tau} \\
\\
& \tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau = I
\end{aligned}$$

Le premier ensemble de formules équivaut de façon évidente à

$$\begin{aligned}
\beta_{\sigma^{i+1}} &= \sigma^i(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p-2, \\
(\delta_1) \quad & \sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma = I .
\end{aligned}$$

Le deuxième ensemble de formules équivaut de façon évidente à

$$\begin{aligned}
\beta_{\sigma^{i+1}\tau} &= \sigma^{i+1}(\beta_\tau) \circ \sigma^i(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p-2, \\
(\delta_1) \quad & \sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma = I .
\end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs obtenues,

$$\begin{aligned}
(\delta_2) \quad & \iff \tau(\beta_\sigma) \circ \beta_\tau = \sigma^{p-1}(\beta_\tau) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-3}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma \\
\dots & \\
(\delta_{i+1}) \quad & \iff \sigma^{p-1+i} \tau(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \tau(\beta_\sigma) \beta_\tau \\
& = \sigma^{p-1}(\beta_\tau) \circ \sigma^{p-i-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma \quad (\gamma_i) .
\end{aligned}$$

Posons

$$(\delta_{p+1}) \quad \tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau = I \quad .$$

Supposons maintenant vérifiées les relations (δ_1) et (δ_{p+1}) . Par application de σ^i , on obtient

$$\begin{aligned} (\delta_{i+1}) &\iff \sigma\tau(\beta_\sigma) \circ \sigma^2 \tau(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \sigma^i \tau(\beta_\sigma) \circ \sigma^i(\beta_\tau) \\ &= \beta_\tau \circ \sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \sigma^i(\beta_\sigma) \quad . \end{aligned}$$

Par multiplication à gauche par $\tau(\beta_\tau)$, à droite par $\sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma$,

$$\begin{aligned} (\delta_{i+1}) &\iff \tau(\beta_\tau) \circ \sigma\tau(\beta_\sigma) \circ \sigma^2 \tau(\beta_\sigma) \\ &\quad \circ \dots \circ \sigma^i \tau(\beta_\sigma) \circ \sigma^i(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma \\ &= \tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau \circ \sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma \quad , \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de (δ_1) et (δ_{p+1}) ,

$$\begin{aligned} (\delta_{i+1}) &\iff \sigma^i \tau[\sigma^i(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma] \\ &\quad \circ \sigma^i(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma = I \\ &\iff \tau(\beta_\tau) \circ \sigma\tau(\beta_\sigma) \circ \{\sigma^{i-1} \tau[\sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma] \\ &\quad \circ \sigma^{i-1}(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma\} \circ \beta_\sigma = I \quad . \end{aligned}$$

Remarquons que $(\forall i) \quad \sigma^i \tau \sigma^{i-1} = \sigma^i \sigma^{1-i} \tau = \sigma\tau$, d'où

$$(\delta_{p+1}) \implies \sigma\tau[\tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau] = I \implies \sigma(\beta_\tau) \circ \sigma^i \tau \sigma^{i-1}(\beta_\tau) = I \quad .$$

Plaçons cette expression après les deux premiers termes de celle obtenue pour (δ_{i+1}) ,

$$\begin{aligned} (\delta_{i+1}) &\iff \sigma\tau[\sigma(\beta_\tau) \circ \beta_\sigma] \sigma(\beta_\tau) \circ \{\sigma^{i-1} \tau[\sigma^{i-1}(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \\ &\quad \circ \dots \circ \beta_\sigma] \sigma^{i-1}(\beta_\tau) \circ \sigma^{i-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma\} \circ \beta_\sigma = I \quad . \end{aligned}$$

On constate que, si (δ_i) est vérifiée, $(\delta_{i+1}) \iff (\delta_2)$.

Il en résulte que les conditions (R) équivalent à (δ_1) , (δ_2) et (δ_{p+1}) . Récrivons-les :

- (I) $\sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma = I$,
 (II) $\tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau = I$,
 (III) $\sigma\tau[\sigma(\beta_\tau) \circ \beta_\sigma] \circ [\sigma(\beta_\tau) \circ \beta_\sigma] = I$.

6. Couples $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ de transformations homographiques de E_{2p-1} , à coefficients dans K , vérifiant (3) et (6).

D'après les études précédentes, cela revient à chercher les couples $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ de la forme

$$\beta_\sigma \begin{cases} u'_i = c_i u_{i-1} , \\ v'_i = cc_{3-i} v_{i+1} , \end{cases} \quad \beta_\tau \begin{cases} u'_i = d_i v_i , \\ v'_i = dd_{3-i} u_i , \end{cases}$$

$$(c, d, c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_p \in K) ,$$

vérifiant les relations (I), (II), (III).

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$$

$$\xrightarrow{\sigma^{p-1}(\beta_\sigma) \circ \sigma^{p-2}(\beta_\sigma) \circ \dots \circ \beta_\sigma} (u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_p) ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u'_i = \sigma^{p-1}(c_i) \sigma^{p-2}(c_{i-1}) \dots \sigma(c_{i+2}) c_{i+1} u_i , \\ v'_i = \sigma^{p-1}(cc_{3-i}) \sigma^{p-2}(cc_{2-i}) \dots \sigma(cc_{5-i}) cc_{4-i} , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$(I) \iff \begin{cases} c_p \sigma(c_1) \sigma^2(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{p-1}) = \sigma[c_p \sigma(c_1) \sigma^2(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{p-1})] \\ {}_{N_{K/k(\alpha)}}(c) = 1 \end{cases}$$

$$\iff (A) \begin{cases} c_p \sigma(c_1) \sigma^2(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{p-1}) = \gamma , \quad \gamma \in k(\alpha) , \\ {}_{N_{K/k(\alpha)}}(c) = 1 ; \end{cases}$$

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \xrightarrow{\tau(\beta_\tau) \circ \beta_\tau} (u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_p) ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u'_i = \tau(d_i) \, dd_{3-i} \, u_i , \\ v'_i = \tau(dd_{3-i}) \, d_i \, v_i , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$(II) \iff (\forall i) \quad \tau(d_i) \, dd_{3-i} = \tau(dd_{3-i}) \, d_i = \tau(d_1) \, dd_2 = \tau(dd_2) \, d_1$$

$$\iff \begin{cases} d = \tau(d) \\ \frac{d_2}{d_1} = \tau\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \\ (\forall i) \quad \tau(d_i) \, d_{3-i} = d_i \, \tau(d_{3-i}) = \tau(d_1) \, d_2 \end{cases}$$

$$\iff (B) \begin{cases} d \in k(\theta) , \\ d_2 = \delta d_1 , \quad \delta \in k(\theta) , \\ (\forall i) \quad d_i = \frac{\delta d_1 \, \tau(d_1)}{\tau(d_{3-i})} . \end{cases}$$

- Si p est pair, on obtient ainsi :

- d_p , en fonction de δ , d_1 et d_3 ,
- d_{p-1} , en fonction de δ , d_1 et d_4 ,
- ...
- $d_{(p/2)+1}$, en fonction de δ , d_1 et $d_{(p/2)+2}$,

et une relation de compatibilité pour $i = \frac{p}{2} + 2$.

- Si p est impair, on obtient :

- d_p , en fonction de δ , d_1 et d_3 ,
- d_{p-1} , en fonction de δ , d_1 et d_4 ,
- ...
- $d_{(p+5)/2}$, en fonction de δ , d_1 et $d_{(p+1)/2}$,

et une relation de compatibilité pour $i = \frac{p+3}{2}$.

$$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p) \xrightarrow{\sigma(\mathbb{B}_\tau) \circ \mathbb{B}_\sigma} (u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_p) ,$$

avec, pour tout i ,

$$\begin{cases} u'_i = \sigma(d_i) \, cc_{3-i} \, v_{i+1} , \\ v'_i = \sigma(dd_{3-i}) \, c_i \, u_{i-1} , \end{cases}$$

d'où on déduit

$$(III) \iff (\forall i) \quad \tau(d_i) \sigma\tau(cc_{3-i}) \sigma(dd_{2-i}) c_{i+1} = \tau(dd_{3-i}) \sigma\tau(c_i) \sigma(d_{i-1}) cc_{4-i} \\ = \tau(d_1) \sigma\tau(cc_2) \sigma(dd_1) c_2 = \tau(dd_1) \sigma\tau(c_2) \sigma(d_1) cc_2$$

$$\iff (C) \quad \begin{cases} \sigma\tau(d) = \sigma\tau(c) \sigma(d) , \\ (\forall i) \quad \tau(d_{3-i}) \sigma\tau(c_i) \sigma(d_{i-1}) c_{4-i} = c_2 \sigma(d_1) \sigma\tau(c_2) \tau(d_1) . \end{cases}$$

Compte tenu de $d \in k(\theta)$, la première de ces relations s'écrit $\tau(cd) = \sigma\tau(cd)$, soit

$$\begin{cases} cd = r , \\ r = \sigma\tau(r) . \end{cases}$$

Remarquons que l'application de $\sigma\tau$ au deuxième membre de la deuxième relation ci-dessus le laisse invariant, et transforme le premier membre de rang i en celui de rang $4-i$. On pourra donc se limiter à

$$\begin{aligned} i &= 3, \dots, \frac{p}{2} + 2, & \text{si } p \text{ est pair,} \\ i &= 3, \dots, \frac{p+3}{2}, & \text{si } p \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Tenant compte de (B), on obtiendra un système (D) équivalent à (C), en remplaçant d_{3-i} en fonction de d_i .

$$(D) \iff \begin{cases} cd = r, \text{ avec } r = \sigma\tau(r) \\ \frac{\delta d_1 \tau(d_1)}{d_i} \sigma\tau(c_i) \sigma(d_{i-1}) c_{4-i} = c_2 \sigma(d_1) \sigma\tau(c_2) \tau(d_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} cd = r, \text{ avec } r = \sigma\tau(r) , \\ d_i = \frac{\delta d_1 \sigma\tau(c_i) c_{4-i}}{c_2 \sigma(d_1) \sigma\tau(c_2)} \sigma(d_{i-1}) , \end{cases}$$

pour

$$\begin{aligned} i &= 3, \dots, \frac{p}{2} + 2, & \text{si } p \text{ est pair,} \\ i &= 3, \dots, \frac{p+3}{2}, & \text{si } p \text{ est impair.} \end{aligned}$$

La deuxième de ces relations permet le calcul des d_i correspondants, compte tenu de $d_2 = \delta d_1$. On obtient

$$d_i = \frac{\delta\sigma(\delta) \dots \sigma^{i-2}(\delta) \sigma\tau(c_i) \sigma^2 \tau(c_{i-1}) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_3) c_{4-i} \sigma(c_{5-i}) \dots \sigma^{i-3}(c_1)}{c_2 \sigma(c_2) \dots \sigma^{i-3}(c_2) \sigma\tau(c_2) \sigma^2 \tau(c_2) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_2)} d_1 .$$

Ecrivons maintenant, dans chacun des cas, la condition de compatibilité.

- Si p est pair, elle s'écrit :

$$\delta d_1 \tau(d_1) = d_{(p/2)+2} \tau(d_{(p/2)+1}) = \frac{\delta d_1 \sigma\tau(c_{(p/2)+2}) c_{(p/2)+2}}{c_2 \sigma(d_1) \sigma\tau(c_2)} \sigma(d_{(p/2)+1}) \tau(d_{(p/2)+1}) ,$$

soit

$$\frac{c_{(p/2)+2} \tau(d_{(p/2)+1})}{c_2 \tau(d_1)} \sigma\tau\left[\frac{c_{(p/2)+2} \tau(d_{(p/2)+1})}{c_2 \tau(d_1)}\right] = 1 .$$

Or $c_{(p/2)+2}$

$$= \frac{\gamma}{\sigma^{(p/2)-1}(c_1) \sigma^{p/2}(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{(p/2)+1}) \sigma(c_{(p/2)+3}) \dots \sigma^{(p/2)-3}(c_{p-1}) \sigma^{(p/2)-2}(c_p)} ,$$

$$\begin{aligned} & d_{(p/2)+1} \\ &= \frac{\delta\sigma(\delta) \dots \sigma^{(p/2)-1}(\delta) \sigma\tau(c_{(p/2)+1}) \dots \sigma^{(p/2)-1} \tau(c_3) c_{(p/2)+3} \sigma(c_{(p/2)+4}) \dots \sigma^{(p/2)-2}(c_1)}{c_2 \sigma(c_2) \dots \sigma^{(p/2)-2}(c_2) \sigma\tau(c_2) \sigma^2 \tau(c_2) \dots \sigma^{(p/2)-1} \tau(c_2)} d_1 . \end{aligned}$$

On en déduit $c_{(p/2)+2} \tau(d_{(p/2)+1})$

$$= \frac{\gamma \tau(d_1) c_{(p/2)+2} \prod_{i=(p/2)+1}^p \sigma^i(\delta) \prod_{i=(p/2)+3}^{p+1} \sigma^{(p/2)-i+3} \tau(c_i)}{\prod_{i=(p/2)+2}^{p+2} \sigma^{(p/2)+i-2}(c_i) \prod_{i=(p/2)+1}^{p-1} \sigma^i(c_2) \sigma^{i+1} \tau(c_2)} ,$$

avec la convention suivante (valable pour la suite) : $c_{p+r} = c_r$. La condition s'écrit $N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma) N_{k(\theta)/k}(\delta)$.

- Si p est impair, elle s'écrit :

$$\delta d_1 \tau(d_1) = d_{(p+3)/2} \tau(d_{(p+3)/2}) .$$

Or

$$c_{(p+3)/2} = \frac{\gamma}{\sigma^{(p-1)/2}(c_1) \sigma^{(p+1)/2}(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{(p+1)/2}) \sigma(c_{(p+5)/2}) \dots \sigma^{(p-3)/2}(c_p)} ,$$

$$d_{(p+3)/2} = \frac{d_1 \prod_{i=0}^{(p-1)/2} \sigma^i(\delta) \prod_{i=3}^{(p+3)/2} \sigma^{((p+5)/2-i)} \tau(c_i) \prod_{i=(p+5)/2}^{p+1} \sigma^{((p-5)/2+i)}(c_i)}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \sigma^i(c_2) \sigma^{i+1} \tau(c_2)}$$

$$= \frac{d_1 \tau(\gamma) \prod_{i=0}^{(p-1)/2} \sigma^i(\delta) \prod_{i=3}^{(p+1)/2} \sigma^{((p+5)/2-i)} \tau(c_i) \prod_{i=(p+5)/2}^{p+1} \sigma^{((p-5)/2+i)}(c_i) \sigma \tau(c_{(p+3)/2})}{\prod_{i=0}^{(p-3)/2} \sigma^i(c_2) \sigma^{i+1} \tau(c_2) \prod_{i=1}^p \sigma^{((p+5)/2-i)} \tau(c_i)} .$$

La condition s'écrit ici encore $N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma) N_{k(\theta)/k}(\delta)$.

Remarquons encore que

$$\left\{ \begin{array}{l} cd = r, \quad d \in k(\theta), \quad r = \sigma\tau(r) \\ N_{K/k(\alpha)}(c) = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{r}{d}, \quad d \in k(\theta), \quad r = \sigma\tau(r) \\ N_{k(\theta)/k}(d) = N_{K/k(\alpha)}(r) \end{array} \right\} .$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

Les couples $(\mathcal{B}_\sigma, \mathcal{B}_\tau)$ vérifiant (3) et (6) sont obtenus en considérant une solution arbitraire des équations

$$(R_1) \quad N_{k(\theta)/k}(d) = N_{K/k(\alpha)}(r) ,$$

$$(R_2) \quad N_{K/k}(c_2) = N_{k(\alpha)/k}(\gamma) N_{k(\theta)/k}(\delta) ,$$

avec $c_2 \in K$, $d \in k(\theta)$, $\delta \in k(\theta)$, $\gamma \in k(\alpha)$, $r = \sigma\tau(r)$, et un ensemble de valeurs arbitraires pour $c_3, \dots, c_p, d_1$.

Les autres constantes sont alors déterminées par

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\gamma}{\sigma(c_2) \sigma^2(c_3) \dots \sigma^{p-1}(c_p)} , \\ d_2 = \delta d_1 , \\ d_i = \frac{\delta \sigma(\delta) \dots \sigma^{i-2}(\delta) \sigma \tau(c_i) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_3) c_{4-i} \sigma(c_{5-i}) \dots \sigma^{i-3}(c_1)}{c_2 \sigma(c_2) \dots \sigma^{i-3}(c_2) \sigma \tau(c_2) \sigma^2 \tau(c_2) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_2)} d_1 , \end{array} \right.$$

pour $i = 3, \dots, p$.

7. Détermination de la famille $\mathfrak{F}$ des couples pour lesquels (4) admet des solutions.

$$(4) \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\sigma}(M) = \sigma(M) \\ \beta_{\tau}(M) = \tau(M) \end{array} \right\} \iff (\exists \rho \in K)(\exists \rho' \in K) \left\{ \begin{array}{l} \rho\sigma(u_i) = c_i u_{i-1} \\ \rho\sigma(v_i) = cc_{3-i} v_{i+1} \\ \rho'\tau(u_i) = d_i v_i \\ \rho'\tau(v_i) = dd_{3-i} u_i \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{1er groupe} \\ \\ \\ \text{2e groupe} \end{array} .$$

Les p premières équations du 1er groupe donnent

$$(\forall i) \quad u_i = \frac{\sigma^{1-i}(c_2) \sigma^{2-i}(c_3) \dots \sigma^{p-1}(c_i) \sigma^{1-i}(u_1)}{\sigma^{1-i}(\rho) \sigma^{2-i}(\rho) \dots \sigma^{p-1}(\rho)} .$$

En faisant $i = 1$, on obtient une condition de compatibilité

$$u_1 = \frac{c_2 \sigma(c_3) \dots \sigma^{p-1}(c_p) \sigma^{p-1}(c_1)}{\rho\sigma(\rho) \dots \sigma^{p-1}(\rho)} u_1 ,$$

soit

$$c_p = \frac{N_{K/k}(\alpha)(\rho)}{\sigma(c_1) \sigma^2(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_{p-1})} .$$

On retrouve la relation (A), lorsqu'on pose $\gamma = N_{K/k}(\alpha)(\rho)$.

Les p premières équations du 2e groupe donnent

$$(\forall i) \quad v_i = \frac{\rho'\tau(u_i)}{d_i} = \frac{\rho'\sigma^{i-1}\tau(c_2) \sigma^{i-2}\tau(c_3) \dots \sigma\tau(c_i) \sigma^{i-1}\tau(u_1)}{d_i \sigma^{i-1}\tau(\rho) \sigma^{i-2}\tau(\rho) \dots \sigma\tau(\rho)} .$$

Portons ces valeurs dans les p dernières équations du 2e groupe. On obtient

$$(\forall i) \quad \frac{\rho'\tau(\rho')}{\tau(d_i)} = dd_{3-i} , \quad \text{soit} \quad (\forall i) \quad d_i = \frac{\rho'\tau(\rho')}{\tau(dd_{3-i})} ,$$

qui équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \tau(d) , \\ (\forall i) \quad d_i = \frac{\rho'\tau(\rho')}{d\tau(d_{3-i})} . \end{array} \right.$$

On retrouve la condition (B) de la première partie dans laquelle on a remplacé δ par $\frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1 \tau(d_1)}$.

Il reste à considérer les p dernières équations du 1er groupe.

$$(\forall i) \quad \frac{\rho\sigma(\rho')\sigma^i\tau(c_2)\sigma^{i-1}\tau(c_3)\dots\sigma^2\tau(c_i)\sigma^i\tau(u_1)}{\sigma^i\tau(\rho)\sigma^{i-1}\tau(\rho)\dots\sigma^2\tau(\rho)\sigma(d_i)} = \frac{cc_{3-i}\rho'\sigma^i\tau(c_2)\dots\sigma\tau(c_{i+1})\sigma^i\tau(u_1)}{\sigma^i\tau(\rho)\dots\sigma\tau(\rho)d_{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow (\forall i) \quad \rho\sigma(\rho') \sigma\tau(\rho) d_{i+1} = c\rho'\sigma\tau(c_{i+1}) c_{3-i} \sigma(d_i)$$

$$\Leftrightarrow (\forall i) \quad d_i = \frac{c\rho'\sigma\tau(c_i) c_{4-i}}{\rho\sigma(\rho') \sigma\tau(\rho)} \sigma(d_{i-1}) ,$$

qui est la deuxième relation de (D), lorsqu'on pose $\delta = \frac{\rho'cc_2 \sigma\tau(c_2) \sigma(d_1)}{\rho\sigma(\rho') \sigma\tau(\rho) d_1}$.

Les résultats de la première partie sont encore valables, pourvu que les deux valeurs trouvées pour δ soient égales, c'est-à-dire pourvu que

$$\frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1 \tau(d_1)} = \frac{\rho'cc_2 \sigma\tau(c_2) \sigma(d_1)}{\rho\sigma(\rho') \sigma\tau(\rho) d_1} ,$$

soit

$$cd = \frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} \sigma\tau\left[\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)}\right] .$$

On obtiendra donc les conditions cherchées en remplaçant, dans les résultats précédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ par } N_{K/k}(\alpha)(\rho) , \\ \delta \text{ par } \frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1 \tau(d_1)} , \\ r \text{ par } \frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} \sigma\tau\left[\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)}\right] . \end{array} \right.$$

On a bien $r = \sigma\tau(r)$.

R_1 s'écrit

$$N_{k(\theta)/k}(d) = \frac{N_{K/k}(\alpha)(\rho\tau(\rho') \sigma\tau(\rho) \sigma(\rho'))}{N_{K/k}(\alpha)(c_2 \tau(d_1) \sigma\tau(c_2) \sigma(d_1))} = N_{K/k}\left(\frac{\rho\rho'}{c_2 d_1}\right) ,$$

soit

$$(U) \quad N_{k(\theta)/k}(t) = 1 , \quad \text{avec } t = \frac{\rho\rho'\tau(\rho\rho')}{dc_2 d_1 \tau(c_2 d_1)} ;$$

R_2 s'écrit

$$N_{K/k}(c_2) = N_{K/k}(\rho) \frac{N_{K/k}(\rho')}{N_{k(\theta)/k}(d) N_{K/k}(d_1)} \iff (U) .$$

On retrouve ainsi l'équation de départ (E).

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on voit que les couples $(\mathfrak{B}_\sigma, \mathfrak{B}_\tau)$ de $\mathfrak{F}$ sont obtenus en choisissant t_0 solution de (E) ; $\rho, \rho', d_1, c_2, \dots, c_p$ arbitraires, puis en prenant

$$d = \frac{\rho \rho' \tau(\rho \rho')}{t_0 c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)} ,$$

$$\gamma = N_{K/k}(\alpha)(\rho) , \quad \delta = \frac{\rho' \tau(\rho')}{d d_1 \tau(d_1)} ,$$

$$d_2 = \delta d_1 ,$$

$$c = \frac{\rho \tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} \sigma \tau \left[\frac{\rho \tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} \right] \times \frac{1}{d} ,$$

$$c_1 = \frac{\gamma}{\sigma(c_2) \sigma^2(c_3) \dots \sigma^{p-1}(c_p)} ,$$

$$d_1 = \frac{\delta \sigma(\delta) \dots \sigma^{i-2}(\delta) \sigma \tau(c_i) \sigma^2 \tau(c_{i-1}) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_3) c_{4-i} \sigma(c_{5-i}) \dots \sigma^{i-3}(c_1) d_1}{c_2 \sigma(c_2) \dots \sigma^{i-3}(c_2) \sigma \tau(c_2) \sigma^2 \tau(c_2) \dots \sigma^{i-2} \tau(c_2)} .$$

Démontrons maintenant la proposition suivante :

Pour tout $p \in F$, il existe $(\mathfrak{B}_\sigma, \mathfrak{B}_\tau) \in \mathfrak{F}$ et $M \in E_{2p-1}$ (vérifiant (4)) tels que $P = (T \circ \varphi)(M)$.

$$P = T(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in F \iff \begin{cases} N_{K/k}(\alpha)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1 , & N_{K/k}(\alpha)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1 , \\ \alpha_\sigma(m) = \sigma(m) \iff (\forall i) \quad \frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2} = \frac{\sigma(\lambda_i)}{\lambda_{i+1}} , \\ \alpha_\tau(m) = \tau(m) \iff (\forall i) \quad \tau(\lambda_1) \lambda_2 = \tau(\lambda_i) \lambda_{p+3-i} . \end{cases}$$

Si on pose $M = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$,

$$P = (T \circ \varphi)(M) \iff (\exists s \in K) \quad (\forall i) \quad \lambda_i = s \frac{v_i}{u_{p+3-i}}$$

$$\iff (\exists s \in K) \quad (\forall i) \quad v_i = \frac{\lambda_i u_{p+3-i}}{s} ,$$

$$(4) \iff \begin{cases} \beta_\sigma(M) = \sigma(M) \\ \beta_\tau(M) = \tau(M) \end{cases} \iff (\exists \rho \in K) (\exists \rho' \in K) \begin{cases} \rho\sigma(u_i) = c_i u_{i-1} , \\ \rho\sigma(v_i) = cc_{3-i} v_{i+1} , \\ \rho'\tau(u_i) = d_i v_i , \\ \rho'\tau(v_i) = dd_{3-i} u_i . \end{cases}$$

D'où les valeurs des constantes. Pour tout i ,

$$c_i = \rho \frac{\sigma(u_i)}{u_{i-1}}, \quad d_i = \frac{\rho'\tau(u_i)}{v_i} = \rho' \frac{\tau(u_i)}{\lambda_i} \frac{s}{u_{p+3-i}},$$

$$c = \frac{\rho\sigma(v_i)}{c_{3-i} v_{i+1}} = \frac{u_{2-i}}{\sigma(u_{3-i})} \frac{\sigma(\lambda_i u_{3-i})}{\sigma(s)} \frac{s}{\lambda_{i+1} u_{2-i}} = \frac{s}{\sigma(s)} \frac{\sigma(\lambda_i)}{\lambda_{i+1}},$$

$$d = \frac{\rho'\tau(v_i)}{d_{3-i} u_i} = \frac{\rho'}{u_i} \frac{\lambda_{3-i} u_i}{\tau(u_{3-i})s} \frac{\tau(\lambda_i u_{3-i})}{\tau(s)} = \frac{\lambda_{3-i} \tau(\lambda_i)}{s\tau(s)}.$$

Compte tenu des conditions exprimant $P \in F$, on vérifie que les diverses expressions obtenues pour c (ou d) sont égales. En particulier, faisant $i = 1$, on obtient

$$c = \frac{s}{\sigma(s)} \frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2}, \quad d = \frac{\lambda_2 \tau(\lambda_1)}{s\tau(s)}.$$

Montrons maintenant que les couples $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ obtenus appartiennent à $\mathfrak{F}$.

Posons $t = (\rho\rho'\tau(\rho\rho'))/(dc_2 d_1 \tau(c_2 d_1))$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_2)} \implies \lambda_2 \tau(\lambda_1) = \tau[\lambda_2 \tau(\lambda_1)]$$

$$\implies \lambda_2 \tau(\lambda_1) \in k(\theta) \implies d \in k(\theta) \implies t \in k(\theta).$$

De plus,

$$t = \rho\rho'\tau(\rho\rho') \frac{s\tau(s)}{\lambda_2 \tau(\lambda_1)} \times \frac{u_1}{\rho\sigma(u_2)} \times \frac{\lambda_1 u_2}{\rho'\tau(u_1)} \times \frac{\tau(u_1)}{\tau(\rho) \tau\sigma(u_2)} \times \frac{\tau(\lambda_1 u_2)}{\tau(\rho's)u_1}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{u_2 \tau(u_2)}{\sigma(u_2) \tau\sigma(u_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \frac{u_2/(\tau\sigma(u_2))}{\sigma(u_2/(\tau\sigma(u_2)))} \implies N_{k(\theta)/k}(t) = N_{k(\theta)/k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 1.$$

$$c_1 \sigma(c_2) \dots \sigma^{p-1}(c_p) = \rho \frac{\sigma(u_1)}{u_p} \times \frac{\sigma(\rho) \sigma^2(u_2)}{\sigma(u_1)} \times \dots \times \frac{\sigma^{p-1}(\rho)u_p}{\sigma^{p-1}(u_{p-1})} = N_{K/k}(\alpha)(\rho).$$

$$\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} = \rho\tau(\rho') \frac{u_1}{\rho\sigma(u_2)} \frac{\tau(\lambda_1 u_2)}{\tau(\rho')u_1 \tau(s)} = \frac{\tau(\lambda_1 u_2)}{\sigma(u_2) \tau(s)} .$$

$$\text{Donc } \frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)} \sigma\tau\left[\frac{\rho\tau(\rho')}{c_2 \tau(d_1)}\right] = \frac{\tau(\lambda_1 u_2)}{\sigma(u_2) \tau(s)} \times \frac{\sigma(\lambda_1 u_2)}{\tau(u_2) \sigma(s)} = \frac{\sigma(\lambda_1) \tau(\lambda_1)}{\sigma(s) \tau(s)} = cd .$$

$$\delta = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\tau(u_2) \lambda_1 u_2}{\tau(u_1) \lambda_2 u_1} \text{ entraîne}$$

$$\frac{\delta\sigma(\delta)\dots\sigma^{i-2}(\delta)\sigma\tau(c_i)\sigma^2\tau(c_{i-1})\dots\sigma^{i-2}\tau(c_3)c_{4-i}\sigma(c_{5-i})\dots\sigma^{i-3}(c_1)d_1}{c_2\sigma(c_2)\dots\sigma^{i-3}(c_2)\sigma\tau(c_2)\sigma^2\tau(c_2)\dots\sigma^{i-2}\tau(c_2)} = \frac{\rho's\tau(u_i)}{\lambda_1 u_{p+3-i}} = d_1 .$$

$$\frac{\rho'\tau(\rho')}{dd_1 \tau(d_1)} = \rho'\tau(\rho') \frac{s\tau(s)}{\lambda_2 \tau(\lambda_1)} \frac{\lambda_1 u_2}{\rho's\tau(u_1)} \frac{\tau(\lambda_1 u_2)}{\tau(\rho's)u_1} = \frac{\tau(u_2) \lambda_1 u_2}{\tau(u_1) \lambda_2 u_1}$$

montre que les deux expressions obtenues pour δ sont égales.

8. Conditions pour qu'un seul couple de $\mathfrak{F}$ fournisse tous les points rationnels de S .

Donnons-nous un couple $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$, correspondant à des valeurs $t_0, \rho_1, \rho'_1, c_1, d_1$, et cherchons à quelles conditions ce couple suffit à obtenir les points de F . Nous nous servirons des résultats du paragraphe précédent. Tout revient à trouver, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in E_{p-1}$ tel que $P = T(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in F$, un ensemble de nombres $s, \rho, \rho', u_1, \dots, u_p$ de K tels que

$$\frac{s}{\sigma(s)} \times \frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_2} = t_0 \left(\sigma\tau\left[\frac{\rho_1 \tau(\rho'_1)}{c_2 \tau(d_1)}\right] / \frac{\rho'_1 \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) = t_0 \left(\sigma\left(\frac{\rho'_1 \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)}\right) / \frac{\rho'_1 \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) ,$$

$$\frac{\lambda_2 \tau(\lambda_1)}{s\tau(s)} = \frac{\rho_1 \rho'_1 \tau(\rho_1 \rho'_1)}{t_0 c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)} ,$$

$$\rho \frac{\sigma(u_i)}{u_{i-1}} = c_i ,$$

$$\rho' \frac{\tau(u_1)}{\lambda_1} \times \frac{s}{u_2} = d_1 ,$$

$$\rho' \frac{\tau(u_2)}{\lambda_2} \times \frac{s}{u_1} = \delta d_1 .$$

Ce système équivaut à :

$$(\alpha_1) \quad \frac{s}{\sigma(s)} = \frac{\lambda_2}{\sigma(\lambda_1)} t_0 \left(\sigma \left(\frac{\rho'_1 \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) / \frac{\rho'_1 \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) ,$$

$$(\alpha_2) \quad s\tau(s) = t_0 \lambda_2 \tau(\lambda_1) \frac{c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)}{\rho_1 \rho'_1 \tau(\rho_1 \rho'_1)} ,$$

$$(\alpha_3) \quad u_1 = \sigma^{-1} \left(\frac{c_1 u_{i-1}}{\rho} \right) ,$$

$$(\alpha_4) \quad \rho' s\tau(u_1) = d_1 \lambda_1 u_2 ,$$

$$(\alpha_5) \quad \rho' s\tau(u_2) = \delta d_1 \lambda_2 u_1 .$$

Si (α_2) est vérifiée, on a

$$\begin{aligned} (\alpha_5) \iff \frac{\lambda_2}{s} = \frac{\rho' \tau(u_2)}{\delta d_1 u_1} &\iff \frac{\tau(s) \rho_1 \rho'_1 \tau(\rho_1 \rho'_1)}{t_0 \tau(\lambda_1) c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)} = \frac{\rho' \tau(u_2)}{\delta d_1 u_1} \\ &\iff \frac{s}{\lambda_1 t_0} \frac{\rho_1 \rho'_1 \tau(\rho_1 \rho'_1)}{c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)} = \frac{u_2 \tau(\rho')}{\delta \tau(d_1) \tau(u_1)} \\ &\iff \frac{s\tau(u_1)}{\lambda_1 u_2} = \frac{t_0 \tau(\rho')}{\delta \tau(d_1)} \frac{c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)}{\rho_1 \rho'_1 \tau(\rho_1 \rho'_1)} = \frac{d_1 \tau(\rho')}{\rho'_1 \tau(\rho'_1)} . \end{aligned}$$

D'où $[(\alpha_4) \text{ et } (\alpha_5)] \iff [(\alpha_4) \text{ et } \rho' \tau(\rho') = \rho'_1 \tau(\rho'_1)]$.

Supposons pour l'instant trouvée une solution s_0 de (α_1) et (α_2) ,

$$(\alpha_4) \iff \frac{s_0}{\lambda_1} = d_1 \frac{u_2}{\tau(u_1)} = \frac{d_1}{\tau(u_1)} \sigma^{-1} \left(\frac{c_2 u_1}{\rho} \right) = \frac{\sigma^{-1}(u_1)}{\tau(u_1)} d_1 \sigma^{-1} \left(\frac{c_2}{\rho} \right)$$

$$\iff \frac{u_1}{\sigma\tau(u_1)} = \sigma \left(\frac{s_0}{\lambda_1} \right) \frac{\rho}{c_2 \sigma(d_1)} .$$

D'après le théorème 90 de Hilbert, cette équation aura des solutions si, et seulement si, en appelant K_1 le corps fixe par $\sigma\tau$, $N_{K/K_1} \left[\sigma \left(\frac{s_0}{\lambda_1} \right) \frac{\rho}{c_2 \sigma(d_1)} \right] = 1$. Or

$$\begin{aligned}
N_{K/K_1} \left[\sigma \left(\frac{s_0}{\lambda_1} \right) \frac{\rho}{c_2 \sigma(d_1)} \right] &= \frac{\sigma(s_0) \tau(s_0)}{\sigma(\lambda_1) \tau(\lambda_1)} \frac{\rho \sigma \tau(\rho)}{c_2 \sigma \tau(c_2) \sigma(d_1) \tau(d_1)} \\
&= \frac{\rho_1' \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} / \left(\lambda_2 t_0 \sigma \left[\frac{\rho_1' \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right] \right) \times t_0 \lambda_2 \frac{c_2 d_1 \tau(c_2 d_1)}{\rho_1 \rho_1' \tau(\rho_1 \rho_1')} \times \frac{\rho \sigma \tau(\rho)}{c_2 \sigma \tau(c_2) \sigma(d_1) \tau(d_1)} \\
&= \frac{\rho \sigma \tau(\rho)}{\rho_1 \sigma(\rho_1') \sigma \tau(\rho_1) \tau(\rho_1')} = N_{K/K_1} \left[\frac{\rho}{\rho_1 \sigma(\rho_1')} \right] .
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\rho = \rho_1 \sigma(\rho_1')$.

Soit alors u_1^0 tel que

$$\frac{u_1^0}{\sigma \tau(u_1^0)} = \sigma \left(\frac{s_0}{\lambda_1} \right) \frac{\rho_1 \sigma(\rho_1')}{c_2 \sigma(d_1)} .$$

(α_3) admet pour solutions :

$$(\forall i) \quad u_i = \sigma^{-i+1}(u_1^0) \sigma^{-1} \left(\frac{c_i c_{i-1} \cdots c_2}{\rho^{i-1}} \right) .$$

Tout revient donc à étudier (α_1) et (α_2) .

(α_1) a des solutions, car

$$N_{K/k(\alpha)} \left\{ \frac{\lambda_2 t_0}{\sigma(\lambda_1)} \left(\sigma \left(\frac{\rho_1' \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) / \frac{\rho_1' \tau(\rho_1)}{d_1 \tau(c_2)} \right) \right\} = N_{K/k(\alpha)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) N_{K/k(\alpha)}(t_0) = 1 .$$

Soit s_1 l'une de ces solutions,

$$(\alpha_1) \iff s = w s_1, \quad w \in k(\alpha),$$

$$(\alpha_2) \iff w \tau(w) = \frac{t_0}{\beta_0} \frac{\lambda_1 c_2 d_1}{\rho_1 \rho_1' s_1} \tau \left(\frac{\lambda_1 c_2 d_1}{\rho_1 \rho_1' s_1} \right), \quad \text{avec } \beta_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} .$$

(α_2) aura donc des solutions si, et seulement si, il existe $\eta \in K$ tel que $\frac{t_0}{\beta_0} = \eta \tau(\eta)$. Cela doit être vrai, quelle que soit la solution β_0 de (E), donc quel que soit $\frac{t_0}{\beta_0}$ (solution de (E)).

Autrement dit, toutes les solutions de (E) doivent être des normes de nombres de K par rapport à $k(\theta)$. Remarquons que cette condition ne dépend pas du couple $(\beta_\sigma, \beta_\tau)$ choisi. On pourra donc, si elle est remplie, choisir le couple correspondant à tous les coefficients égaux à 1. On trouve que les solutions de (E) sont données par

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_1 v_1}{u_2 v_2}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_1 = \tau(u_1) \\ u_2 = \sigma^{-1}(u_1) \\ v_2 = \tau(u_2) = \sigma\tau(u_1) \end{cases}, \quad u_1 \in K,$$

c'est-à-dire par l'unique formule

$$\beta = \frac{u_1 \tau(u_1)}{\sigma^{-1}(u_1) \sigma\tau(u_1)}, \quad u_1 \in K.$$

Remarque. - Si la condition trouvée n'est pas vérifiée, la formule ci-dessus fournit les solutions de (E) de la forme $N_{K/k(\theta)}(\zeta)$, $\zeta \in K$.

En effet, si $t_0 = 1$, la condition d'existence de solutions pour (α_2) se réduit à

$$(\exists \eta \in K) \quad \frac{1}{\beta_0} = N_{K/k(\theta)}(\eta).$$

9. Etude du cas p impair.

Nous allons montrer que, dans ce cas, la condition que l'on a trouvée est remplie.

$$(E) \quad N_{k(\theta)/k}(\beta) = 1 \iff (\beta \in k(\theta) \text{ et } N_{K/k(\theta)}(\beta) = 1)$$

$$\xLeftrightarrow{(\text{théorème 90})} (\beta_1) \quad \begin{cases} \beta = \frac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \\ \tau(\beta) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \tau\left(\frac{\delta}{\sigma(\delta)}\right) = \frac{\delta}{\sigma(\delta)} &\iff \tau(\delta) \sigma(\delta) = \delta \tau\sigma(\delta) = \sigma^{-1}[\sigma(\delta) \tau(\delta)] \\ &\iff \sigma(\delta) \tau(\delta) = \sigma[\sigma(\delta) \tau(\delta)]. \end{aligned}$$

D'autre part $\tau[\sigma(\delta) \tau(\delta)] = \sigma^{-1} \tau(\delta) \delta = \sigma^{-1}[\sigma(\delta) \tau(\delta)] = \sigma(\delta) \tau(\delta)$. Donc

$$\begin{aligned} (\beta_1) &\iff \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \\ \sigma(\delta) \tau(\delta) = \sigma[\sigma(\delta) \tau(\delta)] = \tau[\sigma(\delta) \tau(\delta)] \end{array} \right\} \\ &\iff (\beta_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{\delta}{\sigma(\delta)}, \quad \delta \in K \\ \sigma(\delta) \tau(\delta) \in k \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Notons que ces résultats sont également valables dans le cas p pair.

Posons

$$\lambda = \frac{N_{K/k(\alpha)}(\delta)}{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^{(p-1)/2}} .$$

D'après (β_2) , $\lambda \in k(\alpha)$. De plus

$$\begin{aligned} \lambda \tau(\lambda) &= \frac{\prod_{K=1}^p \sigma^K(\delta) \prod_{K=1}^p \tau \sigma^K(\delta)}{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \frac{\prod_{K=1}^p \sigma^{K+1}(\delta) \prod_{K=1}^p \sigma^K \tau(\delta)}{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^{(p-1)}} \\ &= \frac{\prod_{K=1}^p \sigma^K [\sigma(\delta) \tau(\delta)]}{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \frac{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^p}{[\sigma(\delta) \tau(\delta)]^{(p-1)}} = \sigma(\delta) \tau(\delta) . \end{aligned}$$

Donc $\beta = \frac{\delta \tau(\delta)}{\sigma(\delta) \tau(\delta)} = \frac{\delta}{\lambda} \tau\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = N_{K/k(\theta)}\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)$, qui montre que les solutions de (E) sont des normes de nombres de K par rapport à $k(\theta)$. Elles sont donc données par

$$\beta = \frac{u_1 \tau(u_1)}{\sigma^{-1}(u_1) \sigma \tau(u_1)} , \quad u_1 \in K .$$

11. Etude, dans le cas p impair, de l'équation

$$(E_1) \quad N_{k(\theta)/k}(\beta_1) = A , \quad A \in k .$$

Associions à (E_1) l'équation

$$(E_2) \quad N_{K/k(\alpha)}(\beta_2) = A .$$

Si (E_1) a pour solution β_1^0 , (E_2) a pour solution $\beta_2 = \beta_1^0$, car

$$N_{K/k(\alpha)}(\beta_1^0) = \beta_1^0 \sigma(\beta_1^0) \dots \sigma^{p-1}(\beta_1^0) = N_{k(\theta)/k}(\beta_1^0) = A .$$

Si (E_2) a pour solution β_2^0 , (E_1) a pour solution $\beta_1 = A / (N_{K/k(\theta)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2}))$, car

$$\begin{aligned} N_{k(\theta)/k}\left(\frac{A}{N_{K/k(\theta)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})}\right) &= \frac{A^p}{N_{K/k}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})} = \frac{A^p}{N_{k(\alpha)/k}[N_{K/k(\alpha)}((\beta_2^0)^{(p-1)/2})]} \\ &= \frac{A^p}{N_{k(\alpha)/k}(A^{(p-1)/2})} = \frac{A^p}{A^{p-1}} = A . \end{aligned}$$

L'étude de (E_1) est donc équivalente à celle de (E_2) . Mais, K étant une extension cyclique de $k(\alpha)$ (de groupe de Galois $\{1, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\}$), l'étude de (E_2) résulte du théorème de Hasse sur les restes normiques : (E_2) a des solutions si, et seulement si, elle en a pour toute extension $\mathbb{P}$ -adique de $k(\alpha)$. De plus, il y a des solutions pour toutes les extensions dont $\mathbb{P}$ ne divise, ni A , ni le discriminant D de K par rapport à $k(\alpha)$. Il suffit donc de faire un nombre fini de vérifications, correspondant aux extensions $\mathbb{P}$ -adiques, dont $\mathbb{P}$ divise A ou D .

(Texte reçu le 26 janvier 1970)

Christian PITTI
 Faculté des Sciences de Marseille
 Place Victor Hugo
 13 - MARSEILLE 03
