

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ROBERT P. HUNTER

Sur les homomorphismes des demi-groupes compacts

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 20, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES HOMOMORPHISMES DES DEMI-GROUPES COMPACTS

par Robert P. HUNTER

On se propose d'étudier certains aspects de la structure des demi-groupes topologiques, notamment la nature des homomorphismes (continus) des demi-groupes compacts. Nous abordons essentiellement le problème de la dimension (il s'agit de la dimension cohomologique).

1. Homomorphismes qui élèvent la dimension.

Soient G un groupe compact, et f un homomorphisme (continu) de G . On connaît bien la formule

$$\dim G = \dim f(G) + \dim N, \quad$$

où N désigne le noyau de f . En particulier,

$$\dim f(G) \leq \dim G.$$

Le résultat analogue pour les demi-groupes est faux.

Exemple 1 (KOCH). - Soit C l'ensemble de Cantor considéré comme sous-ensemble de l'intervalle, muni de la multiplication $xy = \min(x, y)$. Alors C est un demi-groupe compact de dimension 0. Soit f une application de C sur $\{0, 1\}$ préservant l'ordre (on peut, par exemple, considérer la décomposition qui identifie les extrémités d'une composante du complément). En prenant $\{0, 1\} = J$, avec la multiplication $xy = \min(x, y)$, on voit que f est un homomorphisme continu qui élève la dimension de 1. En formant les cônes avec l'intervalle ordinaire I , on a un exemple connexe.



C'est-à-dire : Soient $B_1 = C \times I / \{0\} \times I$, $T_1 = J \times I / \{0\} \times I$, et f_1 l'homomorphisme induit par f . De plus, en commençant avec $C \times C \xrightarrow{f \times f} J \times J$, on construit un homomorphisme $f_2 : B_2 \rightarrow T_2$ élevant la dimension de 2. Evidemment, il existe une suite (∞ compris)

$$f_i : B_i \rightarrow T_i,$$

où B_i est un demi-groupe compact connexe (avec identité) de dimension 1, et f_i est un homomorphisme élevant la dimension de i .

Néanmoins, dans le cas de B_1 , on peut démontrer que la dimension la plus haute parmi toutes les images est 2.

PROPOSITION 1.1. - Etant donnés deux entiers n, k , il existe un demi-groupe compact et connexe, avec identité de dimension n , tel que la dimension la plus élevée parmi toutes les images est précisément $n + k$.

On dit qu'un demi-groupe satisfaisant aux conditions précédentes est k -stable. Pour la stabilité elle-même (0-stabilité), il semble que le résultat le plus net soit le suivant.

PROPOSITION 1.2. - Soit S un demi-groupe compact connexe avec identité de dimension 1. Si S est localement connexe, alors S est stable.

2. Homomorphismes abaissant la dimension.

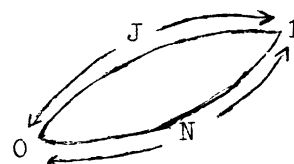
Si G est un groupe abélien compact, il est bien connu que G possède des caractères, c'est-à-dire des homomorphismes continus dans le cercle unité. En particulier, chaque G , de dimension ≥ 2 , possède des homomorphismes qui abaissent la dimension. Là encore le résultat analogue pour les demi-groupes est faux.

Exemple (URSELL). - Considérons le demi-groupe V :

$$V = J \times N / \{0\} \times N \cup J \times \{0\},$$

$$J = \{0, 1\} \quad (xy = \min(x, y)),$$

$$N = \{0, 1\} / \{0, \frac{1}{2}\} \quad (\text{multiplication habituelle}),$$



Supposons qu'il existe un homomorphisme continu f sur T , où T est de dimension 1. Rappelons qu'un demi-groupe compact et connexe de dimension 1, avec zéro et identité, contient précisément un arc (fil) entre zéro et l'identité. Puisque cet arc est contenu dans $f(J)$, il est idempotent, mais il est contenu aussi bien dans $f(N)$ qui est nilpotent.

Propriétés de V .

- (1) Tout homomorphisme est monotone.
- (2) Bien qu'on puisse croire le contraire, il existe des homomorphismes non dégénérés (c'est-à-dire : qui ne soient pas des homomorphismes de Rees sur un idéal).
- (3) Chaque image homomorphe de V est homéomorphe à V .

3. Dimension et congruence.

Soient $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$, les équivalences de Green. On considère les dimensions des espaces quotients $S/\mathcal{K}$, etc.

Soit S un demi-groupe compact avec identité :

1° Si $\dim S = 0$, alors $\dim S/\mathcal{K} = 0$;

2° Si $\dim S \geq 2$, alors il est possible d'avoir $\dim S/\mathcal{K} = \dim S + k$ pour tout $k < \infty$;

3° Si $\dim S = 1$, il n'est pas encore connu que cela implique que la dimension de $S/\mathcal{K}$ soit 1 .

Soit H_x une $\mathcal{K}$ -classe du demi-groupe compact S . Il existe un idempotent e minimal relativement à la condition $x = xe$. Il en résulte que $H_x \subseteq xH_e$, d'où

$$\dim H_x \leq \dim H_e .$$

Il est commode ici de définir la dimension de groupe d'un demi-groupe S ,

$$\dim_g S = \max\{\dim H_e : e^2 = e\} ,$$

alors on a

$$\dim S \leq \dim S/\mathcal{K} + \dim_g S .$$

Un résultat fondamental de A. D. WALLACE est que le sous-groupe maximal contenant l'élément unité d'un demi-groupe compact et connexe, de dimension n , est de dimension au plus $n - 1$. Il en résulte, en faisant usage des résultats précédents, que si S est un demi-groupe compact et connexe de dimension n , et H une $\mathcal{K}$ -classe de dimension n , alors H est un groupe, et c'est l'idéal minimal.

Le résultat suivant est lié au problème original sur la stabilité.

PROPOSITION 3.1. - Soit S un demi-groupe compact et connexe avec identité. Si $\mathcal{K}$ est une congruence telle que $S/\mathcal{K}$ soit localement connexe, et de dimension 1, alors S est stable.

Un tel demi-groupe peut être assez compliqué, même s'il est commutatif et si $S/\mathcal{K}$ est un arc (voir [3]).

Notons que la condition $\dim S/\mathcal{K} = 1$ entraîne, soit $\dim S = 1 + \dim_g S$, soit $\dim S = \dim_g S$. Et comme nous l'avons mentionné, ceci implique que S est un homogroupe (c'est-à-dire qu'il contient un idéal comme sous-groupe).

En tout cas, pour un homomorphisme continu quelconque f , on a

$$\dim_g f(S) \leq \dim_g S.$$

En effet, si G est un sous-groupe compact de $f(S)$, on considère un sous-groupe M de l'idéal minimal de $f^{-1}(G)$. On voit que

$$f(M) = G.$$

Il en résulte que si $f : S \rightarrow T$ élève la dimension de 2, alors

$$\tilde{f} : S/\% \rightarrow T/\% \quad (l'application induite)$$

élève aussi la dimension de 2.

Si G est un sous-groupe compact d'un demi-groupe contenant l'élément unité, alors G opère à gauche et à droite. Soient ${}_g(S/G)$ et ${}_d(S/G)$ les espaces quotients associés.

Finalement, nous mentionnons le résultat suivant, qui établit une connection très nette entre la dimension et l'existence d'une congruence.

PROPOSITION 3.2. - Soient S un demi-groupe compact et connexe avec identité, et G un sous-groupe compact et connexe de H_1 . Si ${}_g(S/G)$ est de dimension 1, alors $xG \subseteq Gx$ pour tout x . Ainsi les orbites forment une congruence.

Supposons, au contraire, qu'il existe x tel que Gx ne contienne pas xG . Nous nous bornons au cas où S a un zéro. Considérons

$$T_x = \{g \mid g \in G, \quad xg \in Gx\}.$$

Evidemment T_x est un sous-groupe compact de G . Soit $\gamma : S \rightarrow {}_g(S/G)$ l'application canonique. Alors il existe un homéomorphisme entre les espaces ${}_g(G/T_x)$ et $\gamma(xG)$. Il en résulte que ${}_g(S/G)$ contient l'espace homogène ${}_g(G/T_x)$. Puisque l'espace ${}_g(G/T_x)$ est un sous-espace avec une cohomologie non dégénérée, nous avons une contradiction. En effet, faisant usage de l'opération de S sur ${}_g(S/G)$, on voit que chaque sous-espace de ${}_g(S/G)$ a une cohomologie dégénérée.

Si K (l'idéal minimal de S) n'est pas dégénéré, on note que, soit $\gamma(L)$ est dégénéré pour tout L -classe dans K , soit chaque L -classe de K est une orbite à gauche (sinon, K/G serait un produit cartésien non dégénéré). Alors, K étant une seule L -classe, il en résulte que $kG \subseteq Gk$, puisque $kG = H_k$ pour tout $k \in K$.

Evidemment, si les espaces ${}_g(S/G)$ et ${}_d(S/G)$ sont de dimension 1, alors l'idéal minimal de S est simple à gauche ou simple à droite.

On note aussi que, pour qu'un sous-groupe G de H_1 ait la propriété que $g(S/G)$ soit de dimension 1, il faut que G contienne une composante de H_1 .

Un demi-groupe S , satisfaisant aux conditions précédentes, contient un arc A contenant l'identité tel que l'homomorphisme canonique défini par G est un isomorphisme local sur A .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON (L. W.) and HUNTER (R. P.). - The $\mathcal{K}$ -equivalence in compact semi-groups, Bull. Soc. math. Belg., t. 14, 1962, p. 274-296.
- [2] ANDERSON (L. W.) and HUNTER (R. P.). - Homomorphisms and dimension, Math. Annalen, t. 147, 1962, p. 248-268.
- [3] COHEN (H.) and KRULE (I. S.). - Continuous homomorphic images of real clans with zero, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 106-109.
- [4] HUNTER (R. P.). - On one dimensional semigroups, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 383-396.
- [5] STRALKA (A.). - On the Green equivalences, Doct. Dissert., Pennsylvania State University, 1966.

(Texte reçu le 6 novembre 1969)

Robert P. HUNTER
 Department of Mathematics
 University of Georgia
 ATHENS, Ga (Etats-Unis)
