

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

NICOLAS FARÈS

Chaînes dans l'ensemble des idempotents d'un anneau

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 17, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAÎNES DANS L'ENSEMBLE DES IDEMPOTENTS D'UN ANNEAU

par Nicolas FAREs

Introduction. - En juin 1968, dans une conférence en Tchécoslovaquie, P. DUBREIL a parlé de la structure de l'ensemble ordonné F des idempotents d'un anneau A [3]. L'objet du présent travail est l'étude des chaînes dans F (§ II). Les résultats du premier paragraphe, portant sur les idempotents et les $\mathcal{O}$ -classes, sont donnés dans le cas plus général d'un demi-groupe. Le troisième paragraphe est consacré à un théorème analogue au premier théorème d'homomorphisme pour l'ensemble des idempotents de l'anneau des endomorphismes d'un H -groupe abélien.

I. Idempotents et $\mathcal{O}$ -classes dans un demi-groupe.

Soient D un demi-groupe multiplicatif, et F l'ensemble des idempotents de D , ordonné par l'ordre de Rees, noté $<$ [12]. Les lettres $\mathcal{O}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ désigneront les équivalences de Green ⁽¹⁾ définies dans D . Quand D possède un zéro, cet élément sera noté 0 .

Définition 1. - Soient g et f deux idempotents de D , tels que $g \geq f$. On appelle chaîne maximale entre g et f toute chaîne maximale C d'idempotents compris entre g et f . Quand C est finie, son nombre d'éléments distincts de f est sa longueur. Une chaîne maximale, associée à un idempotent e de D , est une chaîne maximale d'idempotents inférieurs à e .

Définition 2. - On dit que D vérifie la condition f si toutes les suites strictement décroissantes d'idempotents de D sont de longueurs inférieures ou égales à un entier donné. C'est le cas, par exemple, où D est fini, ou est le demi-groupe des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, etc.

Définition 3. - Si toutes les chaînes maximales associées à un idempotent f de D sont de longueurs inférieures à un entier n , il existe une chaîne maximale associée à f (au moins une) et de longueur maximum p . L'entier p est appelé portée de f .

⁽¹⁾ Deux éléments de D sont $\mathcal{L}$ -équivalents (resp. $\mathcal{R}$ -équivalents) s'ils engendrent le même idéal à gauche (resp. à droite) de D ; $\mathcal{O}$ est l'équivalence borne supérieure de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ commutent (ou sont associables [4]), on a : $\mathcal{O} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{L}$ ([2], ch. 2, § 1).

THÉOREME 1. - Soient g et f deux idempotents de D , $\mathcal{O}$ -équivalents. Il y a un isomorphisme φ (d'ensembles ordonnés) entre l'ensemble E_f des idempotents de D inférieurs à f et l'ensemble E_g des idempotents de D inférieurs à g . L'image par φ de tout idempotent f_1 de E_f est $\mathcal{O}$ -équivalente à f_1 .

Démonstration (Cf. [6], p. 12). - Pour tout élément a de D , notons L_a (resp. R_a) la $\mathcal{L}$ -classe (resp. la $\mathcal{R}$ -classe) de a .

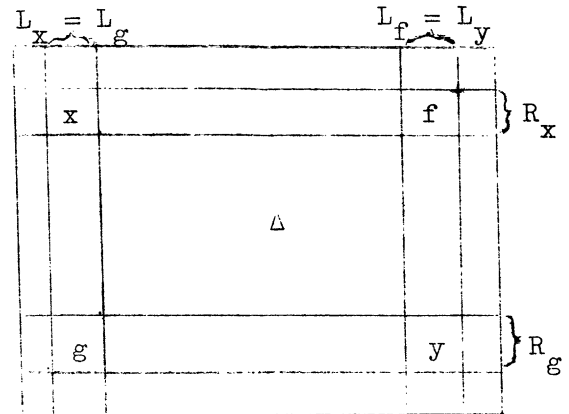
Soit Δ la $\mathcal{O}$ -classe de f et de g (fig. 1). L'ensemble $R_f \cap L_g$ est non vide. Soit x un élément de $R_f \cap L_g$. x admet un inverse généralisé y , unique dans $R_g \cap L_f$, et on a les relations suivantes (Cf. [2], ch. 2, § 3, th. 18) :

$$x = fx = xg ,$$

$$y = yf = gy ,$$

$$f = xy ,$$

$$g = yx .$$



(Fig. 1)

L'isomorphisme φ en question est la correspondance définie sur E_f de la façon suivante :

$$\varphi : f_1 \mapsto yf_1x \quad (f_1 \in E_f) .$$

Le théorème précédent a pour conséquences directes les résultats suivants (Cf. [6] p. 14-16).

COROLLAIRE 1. - Si f est un idempotent primitif, tout idempotent de la $\mathcal{O}$ -classe de f est primitif.

COROLLAIRE 2. - Dans un demi-groupe régulier (au sens de Von Neumann), si un élément engendre un idéal à gauche minimal, il engendre un idéal à droite minimal, et inversement.

COROLLAIRE 3. - Si D vérifie la condition f , deux idempotents, de la même $\mathcal{O}$ -classe, ont la même portée.

THÉOREME 2. - Si D vérifie la condition f , deux idempotents comparables distincts n'appartiennent jamais à la même $\mathcal{O}$ -classe.

COROLLAIRE. - Si D est un demi-groupe unitaire vérifiant la condition f , tout élément de D , inversible d'un côté, est inversible.

II. Chaînes maximales associées à un idempotent dans un anneau.

1. Preliminaire.

Les résultats précédents sont vrais pour un demi-groupe avec ou sans zéro, donc pour un anneau. Pourtant, l'addition donne dans le cas du demi-groupe multiplicatif d'un anneau des résultats qui ne sont pas vrais en général.

L'étude des chaînes maximales entre deux idempotents f et g d'un anneau ($f \leq g$) est ramenée à celle des chaînes maximales associées à un idempotent, et ceci à l'aide du lemme suivant :

LEMME 1. - Soient f et g deux idempotents d'un anneau A , tels que $f \geq g$. L'ensemble F_f^g des idempotents de A , compris entre f et g , est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à l'ensemble F_{f-g} des idempotents de A inférieurs à $f - g$.

Démonstration (Cf. [6], p. 19). - L'isomorphisme en question est la correspondance φ définie sur F_f^g de la façon suivante : $\varphi(x) = x - g$, $\forall x \in F_f^g$. Son inverse est naturellement défini comme suit : $\varphi^{-1}(y) = y + g$, $\forall y \in F_{f-g}$.

La notion de chaîne maximale de longueur n , associée à un idempotent f d'un anneau, coïncide avec celle de la décomposition de f en somme de n idempotents primitifs deux à deux orthogonaux (Cf. [6], th. 3, p. 24).

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide des deux lemmes suivants :

LEMME 2. - Si i et j sont deux idempotents d'un anneau A , tels que i couvre j , alors $i - j$ est un idempotent primitif.

LEMME 3. - Si g et f sont deux idempotents orthogonaux, et si f est primitif, alors $g + f$ est un idempotent qui couvre g .

A une chaîne maximale

$$(1) \quad f = f_1 > f_2 > \dots > f_n > 0,$$

correspond la décomposition suivante de f en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux :

$$(1') \quad f = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) + \dots + f_n.$$

Rappelons enfin qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idempotent f soit somme de n idempotents primitifs, deux à deux orthogonaux, est que l'idéal Af (resp. fA) soit ℓ -indécomposable (resp. r -indécomposable) ⁽²⁾ ([3], p. 4).

⁽²⁾ Un idéal à gauche L de A est ℓ -indécomposable s'il n'est pas somme directe non triviale d'idéaux à gauche de A . Définition analogue pour les idéaux à droite r -indécomposables.

2. Théorème de Jordan-Hölder dans l'ensemble des idempotents de certains anneaux (voir le schéma à la fin du § II).

Les résultats précédents (§ II, n° 1) permettent d'avoir un théorème analogue à celui de Jordan-Hölder dans l'ensemble des idempotents de certains anneaux.

(a) Anneaux dans lesquels tout idempotent est central ⁽³⁾.

THÉOREME 3. - Soit A un anneau dans lequel tout idempotent est central, et soit e un idempotent de A . S'il existe une chaîne maximale de longueur n , associée à e , toutes les chaînes maximales, associées à e , sont finies et de longueur n .

Démonstration.

Définition 1. - Un anneau est dit fragmenté, de longueur n , s'il est somme directe de n idéaux bilatères ℓ -indécomposables ⁽⁴⁾ (P. DUBREIL [3], p. 6).

Cette définition est équivalente à la suivante :

Définition 1'. - L'élément unité u de A est somme de n idempotents primitifs deux à deux hyperorthogonaux ⁽⁵⁾.

L'ensemble des idempotents d'un anneau fragmenté de longueur n est un treillis de Boole atomique ([13], § 29) ayant 2^n éléments ([13], p. 6).

On démontre que l'anneau A_e (théorème 3) est fragmenté au sens de la définition 1.

(b) Anneaux réguliers. - Dans un anneau régulier, un idempotent primitif engendre un idéal à gauche minimal. A une chaîne maximale, associée à un idempotent f de A , correspond donc une suite de composition du A -module Af ([5], ch. 8, § 3). L'application du théorème de Jordan-Hölder, pour les A -modules à gauche, donne le résultat suivant.

THÉOREME 4. - Dans un anneau régulier, deux chaînes maximales finies, associées à un idempotent, sont de même longueur.

Un anneau artinien à gauche et semi-simple ([10], ch. 3) étant régulier ([1], § 3, n° 3, conséquence du théorème 1), on a un résultat analogue au théorème 4 pour les

⁽³⁾ Exemples : anneaux réduits, commutatifs, etc.

⁽⁴⁾ ℓ -indécomposables et r -indécomposables.

⁽⁵⁾ Deux idempotents f et g de A sont dits hyperorthogonaux si $fAg = gAf = (0)$ ([3], p. 5).

anneaux artiniens à gauche et semi-simples.

(c) Anneaux finis. Anneaux dont l'ensemble des idéaux d'un côté vérifie les deux conditions de chaînes ⁽⁶⁾. - Supposons que l'ensemble des idéaux à gauche de A vérifie les deux conditions de chaînes. A deux chaînes maximales de longueurs n et m , associées à un idempotent e de A , correspond (§ II, n° 1) deux décompositions de Ae en somme de n et de m idéaux à gauche ℓ -indécomposables (respectivement). L'application du théorème de Krull-Schmidt ⁽⁷⁾ pour les groupes avec opérateurs donne $n = m$.

THÉOREME 5. - Si l'ensemble des idéaux d'un côté d'un anneau A vérifie les deux conditions de chaînes, toutes les chaînes maximales, associées à un idempotent e de A (qui sont nécessairement finies), sont de même longueur.

(d) d-anneaux vérifiant la condition f . - Dans le cours de P. DUBREIL à la Faculté des Sciences de Paris, 1966/67 (non publié), M. CRESTEY a démontré le théorème suivant.

PROPOSITION 1. - Deux idempotents e et f , d'un demi-groupe multiplicatif D , sont $\mathcal{Q}$ -équivalents si, et seulement si, les idéaux à gauche De et Df sont p -isomorphes.

Définition. - On dit que deux idéaux L et L' d'un demi-groupe D sont p -isomorphes s'il existe un isomorphisme φ de demi-groupe de L sur L' tel que :

$$\forall x \in D, \forall \ell \in L, \varphi(x\ell) = x\varphi(\ell).$$

On démontre que, dans le cas d'un anneau A , dire que Aa et Ab sont p -isomorphes ($a \in A, b \in A$) est équivalent à dire qu'ils sont isomorphes en tant que A -modules à gauche. Un idempotent primitif de A étant un idempotent e , tel que Ae soit ℓ -indécomposable, la proposition précédente admet comme conséquence que, dans un anneau, tout idempotent de la $\mathcal{Q}$ -classe d'un idempotent primitif est lui-même primitif.

Un cas particulier important est celui où, dans l'anneau A , tous les idempotents primitifs sont dans la même $\mathcal{Q}$ -classe. C'est le cas, par exemple, de l'anneau

⁽⁶⁾ Condition de chaîne ascendante et de chaîne descendante ([10], ch. 3, § 1).

⁽⁷⁾ ([9], ch. 5, § 13). Soit G un Δ -groupe satisfaisant aux deux conditions de chaînes pour les Δ -sous-groupes distingués, et soient :

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes \dots \otimes G_m \quad \text{et} \quad G = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_n$$

deux décompositions directes de G en Δ -sous-groupes distingués indécomposables. On a alors $m = n$, et avec une indexation convenable $G_i \cong A_i$, avec

$$G = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_k \otimes G_{k+1} \otimes G_{k+2} \otimes \dots \otimes G_m \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

des endomorphismes d'un espace vectoriel. Appelons d-anneaux ce type d'anneaux.

THÉORÈME 6. - Dans un d-anneau, deux idempotents e et f , auxquels sont associées deux chaînes maximales finies de même longueur, sont $\mathbb{Q}$ -équivalents.

Démonstration. - Soient :

$$1^\circ \quad Ae = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n ,$$

$$2^\circ \quad Af = Af_1 \oplus Af_2 \oplus \dots \oplus Af_n ,$$

les deux décompositions directes de Ae et de Af en somme d'idéaux à gauche ℓ -indécomposables relativement aux chaînes maximales associées à e et f , et ayant la même longueur n . A étant un d-anneau, pour tout indice i ($1 \leq i \leq n$), on a $Ae_i \simeq Af_i$. Donc Ae et Af sont canoniquement isomorphes.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7. - Dans un d-anneau vérifiant la condition f toutes les chaînes maximales associées à un idempotent f sont de même longueur.

Démonstration. - Soient deux décompositions directes de Af en somme de m et de n idéaux à gauche, ℓ -indécomposables respectivement :

$$1^\circ \quad Af = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_m ,$$

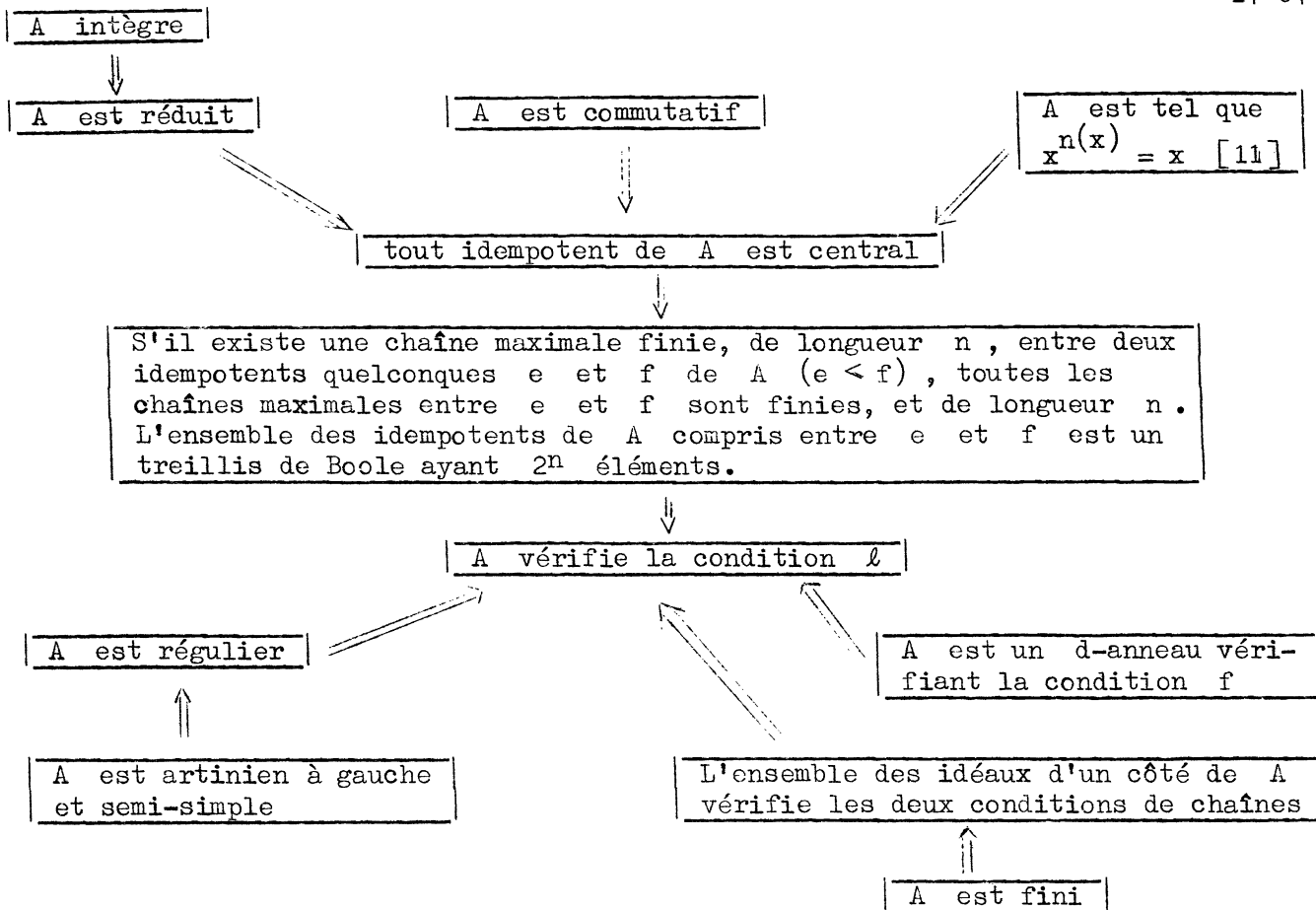
$$2^\circ \quad Af = Af_1 \oplus Af_2 \oplus \dots \oplus Af_n .$$

Les e_i , $i = 1, 2, \dots, m$ (resp. les f_j , $j = 1, 2, \dots, n$) étant des idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Supposons que $m < n$.

D'après le théorème précédent, Af est isomorphe à $Af_1 \oplus \dots \oplus Af_m$, i. e. à $A(f_1 + f_2 + \dots + f_m)$. Ainsi les idempotents f , et $g = f_1 + \dots + f_m$, sont dans la même $\mathbb{Q}$ -classe. Or $g < f$, puisque $m < n$. Ce qui est impossible, car l'anneau A vérifie la condition f .

On démontre qu'un d-anneau, vérifiant la condition f , qui est unitaire et régulier, est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps qui n'est pas nécessairement commutatif (Cf. [6], ch. 3).

Notation. - On dit qu'un anneau A vérifie la condition λ si toutes les chaînes maximales finies entre deux idempotents quelconques e et f de A ($e \leq f$) sont de même longueur.



III. Appendice

Théorème d'homomorphisme pour l'ensemble des idempotents de l'anneau des endomorphismes d'un H -groupe abélien.

Dans la suite, M désigne un H -groupe abélien, et A l'anneau des endomorphismes de M . Soient f un idempotent de A , $\bar{M}$ le groupe quotient $M/f(M)$, et $\bar{A}$ l'anneau des endomorphismes de $\bar{M}$. L'objet de ce paragraphe est de construire un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idempotents de A , contenant f (plus grands que f), et l'ensemble des idempotents de l'anneau $\bar{A}$.

1. Preliminaire.

Rappelons d'abord quelques résultats, faciles à démontrer.

LEMME 4. - Soient f et h deux éléments de A .

1° La relation $f = gh$ ($g \in A$) entraîne $N_h \subseteq N_f$ ⁽⁸⁾,

2° Si h est un idempotent, la relation $N_h \subseteq N_f$ entraîne $f = fh$.

⁽⁸⁾ Pour tout élément f de A , on note par N_f la noyau de f , et par $f(M)$ l'image de M par f .

COROLLAIRE. - f et h étant deux éléments de A , on a :

$$1^\circ f \leq h \implies N_f = N_h \quad (9),$$

$$2^\circ \text{ Si } f \text{ et } h \text{ sont des idempotents, } f \leq h \iff N_f = N_h .$$

LEMME 5. - Soient f et h deux éléments de A , on a :

$$1^\circ \text{ La relation } f = hg \text{ (} g \in A \text{) entraîne } f(M) \subseteq h(M) ,$$

$$2^\circ \text{ Si } h \text{ est un idempotent, la relation } f(M) \subseteq h(M) \text{ entraîne } f = hf .$$

COROLLAIRE. - Dans A , on a les relations :

$$1^\circ f \mathcal{R} f' \implies f(M) = f'(M) ,$$

$$2^\circ \text{ Si } f \text{ et } f' \text{ sont des idempotents, } f \mathcal{R} f' \iff f(M) = f'(M) .$$

Les lemmes 4 et 5 permettent d'énoncer les résultats suivants.

PROPOSITION 1. - f et h étant deux idempotents de A , il y a équivalence entre les deux relations suivantes :

$$1^\circ f \leq h ,$$

$$2^\circ f(M) \subseteq h(M) \text{ et } N_h \subseteq N_f .$$

PROPOSITION 2. - Soit f un idempotent de A . On a la décomposition directe
(2)
$$M = f(M) \oplus N_f .$$

Notons que, pour tout élément y de $f(M)$, on a $y = f(y)$, et que, pour tout élément x de M , $x - f(x)$ appartient à N_f . Un élément quelconque m de M s'écrit relativement à (2) sous la forme

$$m = f(m) + [m - f(m)] .$$

2. Théorème d'homomorphisme.

LEMME 6. - Si f et g sont des idempotents de A tels que $g \geq f$, on a :
(3)
$$M = f(M) \oplus (g - f)(M) \oplus N_g$$

avec :

$$(a) \quad (g - f)(M) \oplus N_g = N_f ,$$

$$(b) \quad N_f \cap g(M) = (g - f)(M) .$$

Démonstration. - f et $g - f$ étant deux idempotents orthogonaux dont la somme est g , on a $g(M) = f(M) + (g - f)(M)$, d'où la relation (3). La relation $gf = fg = f$ entraîne la relation (b). La relation (a) découle du fait que, pour tout élément n de N_f , on a $(g - f)(n) = g(n)$.

(9) L'anneau A étant unitaire, les idéaux à gauche (resp. à droite) principaux de l'anneau A sont les idéaux à gauche (resp. à droite) principaux du demi-groupe multiplicatif A .

On a de plus la relation :

$$(c) \quad N_{g-f} = f(M) + N_g.$$

LEMME 7. - Soient f et g deux idempotents de A tels que $f \leq g$, et soit $\bar{M} = M/f(M)$. La correspondance $\bar{g} : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$, définie par $\bar{g}(\bar{x}) = \overline{g(x)}$, est un endomorphisme idempotent du H -groupe $\bar{M}$ (Pour tout élément y de M , on pose $\bar{y} = \varphi(y)$, φ étant l'homomorphisme canonique de M sur $\bar{M}$).

LEMME 8. - f étant un idempotent de A , pour tout idempotent $\bar{g}$ de l'anneau $\bar{A}$ des endomorphismes de $\bar{M} = M/f(M)$, il existe un idempotent g de A , tel que

$$\overline{g(x)} = \bar{g}(\bar{x}), \quad \forall x \in M.$$

Démonstration. - φ étant l'homomorphisme canonique de M sur $\bar{M}$, si on pose

$$L = \varphi^{-1}(N_{\bar{g}}), \quad H = \varphi^{-1}[\bar{g}(\bar{M})],$$

la relation

$$(4) \quad \bar{g}(\bar{M}) \oplus N_{\bar{g}} = \bar{M}$$

donne :

$$(5) \quad L \cap H = f(M) \quad \text{et} \quad M = L + H.$$

Soient :

$$(6) \quad N = L \cap N_f,$$

et

$$(7) \quad V = H \cap N_f.$$

On démontre successivement les relations :

$$(8) \quad L = f(M) \oplus N,$$

$$(9) \quad M = H \oplus N,$$

$$(10) \quad H = f(M) \oplus V,$$

$$(11) \quad N_f = V \oplus N,$$

$$(12) \quad M = f(M) \oplus V \oplus N.$$

Soit maintenant g la projection de M sur $H = f(M) + V$ annihilant N . Les relations $N_g = N \subseteq N_f$ et $g(M) = H \supseteq f(M)$ montrent que $f \leq g$.

Pour tout élément x de M , qui s'écrit $x = f(x) + v + n$, $v \in V$, $n \in N$, on a $g(x) = f(x) + v$, donc $\overline{g(x)} = \bar{v}$. D'autre part, la relation $\bar{x} = \bar{v} + \bar{n}$, où $\bar{n} \in \bar{N} \subseteq \bar{L} = N_{\bar{g}}$ (donc $\bar{g}(\bar{n}) = \bar{0}$) et $\bar{v} \in \bar{H} = \bar{g}(\bar{M})$ (donc $\bar{v} = \bar{g}(\bar{v})$), entraîne $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{v} = \overline{g(x)}$.

Remarquons enfin que $V = (g - f)(M)$, et la relation (12) s'écrit sous la forme (Cf. (1), lemme 1) :

$$(12') \quad M = f(M) \oplus (g - f)(M) \oplus N_g.$$

THÉOREME 8. - Soit f un idempotent de A . Il existe un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) entre l'ensemble F_f des idempotents de A , contenant f , et l'ensemble $\bar{F}$ des idempotents de l'anneau $\bar{A}$ des endomorphismes de $\bar{M} = M/f(M)$. De plus, ω étant cet isomorphisme, on a les relations suivantes :

- (a) $g \mathcal{L} g' \iff \omega(g) \mathcal{L} \omega(g')$
 et $(g \in F_f, g' \in F_f)$.
 (b) $g \mathcal{R} g' \iff \omega(g) \mathcal{R} \omega(g')$

Démonstration. - Soit, avec les mêmes notations que dans les lemmes 7 et 8, la correspondance de F_f dans $\bar{F}$, définie par $\omega(g) = \bar{g}$, $\forall g \in F_f$, avec

$$\bar{g}(\bar{x}) = \overline{g(x)}, \quad \forall x \in M.$$

1° ω est bien une application surjective d'après les lemmes 7 et 8.

2° ω est injective. Soient en effet g et g' deux éléments de F_f tels que $\bar{g} = \bar{g}'$. Pour tout x de M , on a $\bar{g}(x) = \bar{g}'(x)$. D'après le lemme 6, M s'écrit

$$M = f(M) \oplus V \oplus N_g = f(M) \oplus V' \oplus N_{g'}, \quad \text{avec } V \oplus N_g = V' \oplus N_{g'} = N_f.$$

Un élément x de M s'écrit donc :

$$x = f(x) + v + n = f(x) + v' + n', \quad v \in V, \quad n \in N_g, \quad v' \in V', \quad n' \in N_{g'};$$

et l'on a :

$$\bar{x} = \bar{v} + \bar{n} = \bar{v}' + \bar{n}'; \quad \bar{g}(\bar{x}) = \bar{v}, \quad \bar{g}'(\bar{x}) = \bar{v}'.$$

Donc $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}'(\bar{x}) \iff \bar{v} = \bar{v}'$. Or la relation $\bar{v} = \bar{v}'$ est équivalente à la relation $v - v' \in f(M)$, donc à la relation $v - v' = f(v - v')$. Or $v - v'$ appartient à N_f , donc $f(v - v') = 0$, et finalement la relation $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{g}'(\bar{x})$ est équivalente à la relation $v = v'$, qui est à son tour équivalente à la relation $g(x) = g'(x)$. On a donc

$$\bar{g} = \bar{g}' \iff g = g'.$$

C. Q. F. D.

3° ω est un isomorphisme. Ceci se démontre facilement vu le résultat du n° 1, prop. 1.

4° Les relation (a) et (b) de l'énoncé sont vraies d'après les corollaires des lemmes 4 et 5 du n° 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261; Bourbaki, 23).
- [2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [3] DUBREIL (Paul). - Etude du demi-groupe multiplicatif de certains anneaux, Symposium on algebra and number theory [1968. Smolenice (Tchécoslovaquie)] (à paraître).
- [4] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Théorie algébrique des relations d'équivalence, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 18, 1939, p. 63-95.
- [5] DUBREIL (P.) et DUBREIL-JACOTIN (M.-L.). - Leçons d'algèbre moderne. 2e édition. - Paris, Dunod, 1964 (Collection universitaire de Mathématiques, 6).
- [6] FARÈS (Nicolas). - Idempotents et classes de Green du demi-groupe multiplicatif d'un anneau (Thèse 3e cycle, Math., Paris, 1969).
- [7] FARÈS (Nicolas). - Idempotents et $\mathcal{O}$ -classes dans les demi-groupes et les anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 341-343.
- [8] FARÈS (Nicolas). - Chaînes dans l'ensemble des idempotents d'un anneau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 377-379.
- [9] JACOBSON (Nathan). - Lectures in the abstract algebra. Vol. 1. - New-York, D. Van Nostrand Company, 1951 (University Series in higher Mathematics).
- [10] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. 2nd edition. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Amer. math. Soc. Colloq. Publ., 37).
- [11] LESIEUR (Léonce). - Sur les anneaux tels que $x^n = x$, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 13, 8p.
- [12] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400,
- [13] RUTHERFORD (D. E.). - Introduction of lattice theory. - Edinburgh, Oliver and Boyd, 1965 (University mathematical Monographs).

(Texte reçu le 16 novembre 1969)
