

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

YVES MATRAS

Sur deux équations fonctionnelles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 2 (1968-1969), exp. n° 14, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_2_A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

par Yves MATRAS

0. Introduction.

Ce travail est composé de cinq parties.

Dans la première, on donne la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(x + yf(x)) = f(x) f(y) \quad .$$

La méthode d'obtention de cette solution est celle proposée par P. JAVOR.

Une autre méthode, dont nous ne parlerons pas, a été mise au point, en même temps, et indépendamment, par S. WOŁODZKO [6].

Les quatre parties suivantes sont consacrées à l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad f[x.f(y)] = f(x).f(y) \quad ,$$

où f est une application du groupoïde $(\Gamma, .)$ dans lui-même.

On caractérisera les solutions de l'équation, lorsque :

- 1° Γ est un groupe avec zéro,
- 2° Γ est un groupe,
- 3° Γ est un groupe gauche ⁽¹⁾,
- 4° Γ est un demi-treillis.

Dans [4], DAROCZY caractérise les solutions différentiables, les solutions continues et les solutions bornées, lorsque Γ est le groupoïde multiplicatif des réels. Il prouve en outre l'existence d'une solution non mesurable.

Dans [2], Γ est un espace de fonctions à la structure compliquée et, dans son étude, Garrett BIRKHOFF impose à la fonction f un certain nombre de conditions supplémentaires.

Notations. - Les notations particulières à chaque paragraphe seront définies dans le paragraphe lui-même. Les notations suivantes seront utilisées systématiquement :

(¹) Nous appellerons groupe gauche, la structure algébrique que CLIFFORD et PRESTON étudient dans [3] sous le nom de left group.

X désignant un ensemble quelconque, $A(X)$ représentera l'ensemble des applications de X dans lui-même, et la composition des applications sera notée $\circ$.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) sur Γ sera noté $S(\Gamma)$.

1. Solution algébrique générale de l'équation (1).

Nous considérons donc l'équation fonctionnelle :

$$(1) \quad f(x + yf(x)) = f(x) f(y) ,$$

où f est une application d'un espace vectoriel E dans son corps (commutatif) de scalaires F .

La loi de groupe de E sera notée additivement.

Les lois de corps de F seront notées additivement et multiplicativement.

LEMME. - Supposons que f soit solution de (1). Alors

$$f(0) \neq 1 \quad \text{entraîne} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ de } E .$$

$$\text{En effet, } f(x + 0f(x)) = f(x) f(0) = f(x) .$$

THÉOREME. - f est solution de (1), non identiquement nulle, si, et seulement si, il existe :

- Un sous-groupe N de E ,
- Un sous-groupe multiplicatif M de $F \setminus \{0\}$,
- Une fonction w de M dans E ,

vérifiant les conditions :

- (a) $NM = N$,
- (b) Pour tout m_1 de M et tout m_2 de M , $w(m_1 m_2) = w(m_1) + w(m_2)m_1 \in N$,
- (c) $w(m) \in N \implies m = 1$.

Alors :

$$f(x) = m , \quad \text{si } x \in N + w(m) ,$$

$$f(x) = 0 , \quad \text{sinon} .$$

Nous allons d'abord montrer que les conditions sont suffisantes, et en premier lieu vérifier que les ensembles de la forme $N + w(m)$ sont deux à deux disjoints ou confondus.

Soit, en effet, $n_1 + w(m_1) = n_2 + w(m_2)$, et soit $n + w(m_1) \in N + w(m_1)$. Alors

$$n + w(m_1) = n_1 + (n - n_1) + w(m_1) = n - n_1 + n_2 + w(m_2) .$$

La fonction f est donc parfaitement définie.

Montrons qu'elle vérifie l'équation. Trois cas sont à distinguer :

1° $f(x) = 0$. Alors

$$f(x + y0) = f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) f(y) = 0 \quad .$$

2° $f(x) \neq 0$ et $f(y) = 0$. Dans ce cas, $f(x) f(y) = 0$. Supposons que $f(x + yf(x)) \neq 0$. Alors

$$x + yf(x) = n + w(m) \quad \text{et} \quad f(x + yf(x)) = m \quad .$$

D'autre part, $x = n_1 + w(m_1)$ et $f(x) = m_1$. Soit $m_2 = m_1^{-1} m$,

$$w(m) = n' + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad .$$

Donc

$$n + w(m) = n_1 + w(m_1) + ym_1 = n + n' + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad ,$$

et

$$ym_1 = n + n' - n_1 + w(m_2)m_1 \quad .$$

Mais par (a), $n + n' + n_1 = n'' m' = n'' m'' m_1$, d'où $y = n'' m'' + w(m_2)$. Or $n'' m'' \in \mathbb{N}$ par (a), donc $f(y) = m_2$, ce qui n'est pas, et

$$f(x + yf(x)) = 0 = f(x) f(y) \quad .$$

3° $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$. Alors

$$x = n_1 + w(m_1) \quad \text{et} \quad f(x) = m_1 \quad ,$$

$$y = n_2 + w(m_2) \quad \text{et} \quad f(y) = m_2 \quad .$$

D'où $x + yf(x) = n_1 + w(m_1) + n_2 m_1 + w(m_2)m_1$. Mais

$$n_2 m_1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad w(m_1 m_2) \in \mathbb{N} + w(m_1) + w(m_2)m_1 \quad .$$

Donc

$$f(x + yf(x)) = m_1 m_2 = f(x) f(y) \quad .$$

Montrons maintenant que les conditions sont nécessaires. Soit donc f une solution de (1), non identiquement nulle. Considérons la loi de composition interne $\star$ définie sur E par $x \star y = x + yf(x)$. On a

$$(x \star y) \star z = x + yf(x) + zf(x + yf(x)) \quad ,$$

$$x \star (y \star z) = x + yf(x) + zf(y) f(x) \quad .$$

On voit donc que $\star$ est une loi associative. Adoptons alors les notations suivantes :

$$N = f^{-1}(1) ; \quad S = f^{-1}(0) ; \quad G = E \setminus S ; \quad f(G) = M .$$

Si x et y sont dans G , $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$, et donc $f(x \star y) \neq 0$. D'autre part, $0 \in G$ et si $x \in G$, $x \star 0 = x + 0f(x) = x$. Enfin, si $x \in G$, soit $y = (-x)(f(x))^{-1}$ ($f(x) \neq 0$). On a

$$x \star y = x - x(f(x))^{-1} f(x) = 0 .$$

Mais $f(0) = 1 = f(x \star y) = f(x) f(y)$. Donc $y \in G$, et G est un groupe pour la loi $\star$ (on le notera $(G, \star)$).

Si x et y sont dans N , il est immédiat que $x \star y = x + y$. De plus $0 \in N$. Enfin, si $x \in N$, $(-x)(f(x))^{-1} = -x$. Donc N est un sous-groupe additif de E . N est aussi, par définition, un sous-groupe distingué de $(G, \star)$, et M est un sous-groupe multiplicatif de $F \setminus \{0\}$.

Nous avons alors immédiatement,

$$\text{pour tout } g \text{ de } G, \quad N \star g = g \star N .$$

Mais $N \star g = N + g$. Donc $N + g = g + Nf(g)$. Par conséquent, $N = NM$.

Considérons alors une application w de M dans G telle que $f \circ w$ soit l'identité de M . Les ensembles $N + w(m)$ ne sont autres que les classes modulo N dans G et, si $x \in N + w(m)$, on a bien

$$f(x) = f(w(m)) = m .$$

Soient alors m_1 et m_2 dans M ; posons :

$$g_1 = w(m_1) ; \quad g_2 = w(m_2) ; \quad g_3 = w(m_1 m_2) .$$

Alors $f(g_1) = m_1$; $f(g_2) = m_2$; $f(g_3) = m_1 m_2$. D'où

$$m_1 m_2 = f(g_1) f(g_2) = f(g_1 + g_2 f(g_1)) = f(g_1 + m_1 g_2) = f(g_3) .$$

Par conséquent,

$$g_3 \star (- (g_1 + m_1 g_2))(f(g_1 + m_1 g_2))^{-1} \in N ,$$

c'est-à-dire $g_3 - g_1 - m_1 g_2 \in N$ et $w(m_1 m_2) - w(m_1) - m_1 w(m_2) \in N$.

Enfin, si $w(m) \in N$, alors $m = f(w(m)) = 1$.

2. Solution générale de l'équation (2) lorsque Γ est un groupe avec zéro.

2.1. Caractérisation des solutions. - Soit $(\bar{G}, .)$ un groupe avec zéro, $(G, .)$ étant le groupe

$$\bar{G} = G \cup \{0\} .$$

Si a et b sont des éléments de $\bar{G}$, nous noterons ab au lieu de $a.b$. L'élément neutre de $(G, .)$ sera noté e , et l'inverse d'un élément a de $(G, .)$ sera noté a^{-1} . La fonction prenant partout la valeur e sera désignée par E .

LEMME 2.1.

- (i) E appartient à $S(\bar{G})$;
- (ii) Si $f \in S(\bar{G})$ et $f(0) \neq 0$, alors $f = E$.

(i) est évident. Montrons (ii) : pour tout élément y de $\bar{G}$, nous avons

$$f(0) = f[0f(y)] = f(0) f(y) ,$$

et donc $f(y) = e$.

DÉFINITION 2.1. - G étant un groupe, nous appellerons G -système un couple (F, I) , où F est un sous-groupe de G , et I un ensemble d'éléments de G tels que

$$i \in I, j \in I \text{ et } i \neq j \implies iF \neq jF .$$

Un G -système sera dit plein, si $\bigcup_{i \in I} iF = G$.

Un G -système sera dit vide, si $I = \emptyset$.

THÉOREME 2.1. - $f \in S(\bar{G}) \setminus \{E\}$ si, et seulement si, il existe un G -système (F, I) vérifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & \text{si } x \notin \bigcup_{i \in I} iF, \\ f(x) &= i^{-1} x, & \text{si } x \in iF \text{ et } i \in I. \end{aligned}$$

Montrons d'abord que la condition est suffisante. Si $I = \emptyset$, $f(x) = 0$ pour tout x de G . Donc $f = \Omega$, où Ω représente la fonction prenant sur tout $\bar{G}$ la valeur 0 .

Ω est évidemment un élément de $S(\bar{G}) \setminus \{E\}$. Soit donc $I \neq \emptyset$. Nous avons $0 \notin \bigcup_{i \in I} iF$, et donc $f(0) = 0$. Par conséquent, $f \neq E$.

D'autre part, il est évident que

$$(3) \quad (\bar{G} \setminus \bigcup_{i \in I} iF)F \subseteq \bar{G} \setminus \bigcup_{i \in I} iF .$$

Prenons alors x et y dans $\bar{G}$:

Si $y \notin \bigcup_{i \in I} iF$, alors $f(y) = 0$. Donc

$$f(xf(y)) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) f(y) = 0 .$$

Si $y \in iF$ pour un certain i de I et $x \notin \bigcup_{i \in I} iF$, alors

$$\begin{aligned} f(x) f(y) &= 0 , & \text{car } f(x) &= 0 , \\ f(xf(y)) &= 0 , & \text{car } f(y) &\in F \text{ et } xf(y) \notin \bigcup_{i \in I} iF , \end{aligned}$$

d'après (3).

Enfin, si $x \in jF$ et $y \in iF$ (i, j éléments de I), on a

$$j^{-1}(xf(y)) = (j^{-1}x) f(y) = f(x) f(y) ,$$

donc

$$j^{-1}(xf(y)) \in F \quad \text{et} \quad xf(y) \in jF .$$

Par conséquent,

$$f(xf(y)) = j^{-1}(xf(y)) = f(x) f(y) .$$

Nous allons maintenant montrer que la condition est nécessaire. Soit $f \in S(\bar{G}) \setminus \{E\}$. Considérons la loi $\star$ définie sur $\bar{G}$ par

$$x \star y = xf(y) .$$

Nous noterons $(\bar{G}, \star)$ le groupoïde ainsi obtenu. Si x, y et z sont des éléments quelconques de $\bar{G}$, nous aurons

$$x \star (y \star z) = xf(yf(z)) ,$$

$$(x \star y) \star z = xf(y) f(z) .$$

Par conséquent, $(\bar{G}, \star)$ est un demi-groupe dont nous allons préciser la structure. Puisque $f \neq E$, on a $f(0) = 0$, donc

$$y \star 0 = yf(0) = 0 ,$$

mais $0 \star y = 0f(y) = 0$, donc l'élément 0 est un zéro dans $(\bar{G}, \star)$. Il est d'autre part immédiat que l'ensemble $Z = \{z \in \bar{G} ; f(z) = 0\}$ est un idéal de $(\bar{G}, \star)$ contenant 0 .

Soit $D = \overline{G} \setminus Z = \{x \in \overline{G} ; f(x) \neq 0\}$.

Si $D = \emptyset$, $f = \Omega$, et n'importe quel G -système vide fera l'affaire.

Si $D \neq \emptyset$, D est un sous-demi-groupe de $(\overline{G} , \star)$. Pour x et y , éléments de D , on a alors

$$f(x) = f(xf(y)^{-1} f(y)) = f(xf(y)^{-1}) f(y) ,$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad f(xf(y)^{-1}) = f(x) f(y)^{-1} .$$

Caractérisons maintenant les idempotents de $(D , \star)$. Puisque la restriction de f à D est un homomorphisme de $(D , \star)$ dans $(G , .)$, un idempotent i de $(D , \star)$ sera défini par la relation

$$(5) \quad f(i) = e .$$

Soit I l'ensemble de ces idempotents ; nous pouvons dire que $I \neq \emptyset$ et que, de plus,

$$(6) \quad i \in I \iff (\exists x \in D) (i = xf(x)^{-1}) ;$$

c'est une conséquence immédiate de (4) et (5).

Pour chaque élément i de I , considérons l'ensemble

$$H_i = \{x \in D ; xf(x)^{-1} = i\} .$$

H_i n'est pas vide, car $i \in H_i$. Si x et y sont dans H_i , on a

$$(x \star y) f(x \star y)^{-1} = xf(y) f(y)^{-1} f(x)^{-1} = xf(x)^{-1} = i .$$

Donc H_i est un sous-demi-groupe de $(D , \star)$. De plus, si $x \in H_i$,

$$i \star x = if(x) = i .$$

Donc i est neutre à gauche dans $(H_i , \star)$. Enfin si $x \in H_i$, soit $y = if(x)^{-1}$, on a

$$f(y)^{-1} = [f(i) f(x)^{-1}]^{-1} = f(x) ,$$

d'après (4) et (5). Donc $yf(y)^{-1} = i$ et $y \in H_i$; mais évidemment $y \star x = i$.

Par conséquent, H_i est un sous-groupe de $(D , \star)$. Comme $D = \bigcup_{i \in I} H_i$ et que

$i \neq j \implies H_i \cap H_j = \emptyset$, les H_i sont maximaux. Par conséquent, si $x \in D$, il existe un, et un seul, i de I tel que $x \in H_i$, et donc tel que $xf(x)^{-1} = i$.

Donc $f(x) = i^{-1} x$, et $f(H_i) = i^{-1} H_i$ est un sous-groupe de $(G , .)$.

Montrons maintenant que $f(H_i)$ reste le même lorsque i parcourt I . Pour cela, supposons que I contient au moins deux éléments distincts i et j , et soient $x \in H_i$ et $y \in H_j$. Nous avons vu plus haut que

$$(x \star y) f(x \star y)^{-1} = i.$$

Donc $x \star y \in H_i$ et $H_i \star H_j \subseteq H_i$, ce qui peut s'écrire

$$H_i f(H_j) \subseteq H_i,$$

ou bien

$$i^{-1} H_i f(H_j) \subseteq i^{-1} H_i,$$

ou encore

$$f(H_i) f(H_j) \subseteq f(H_i),$$

mais, de même,

$$f(H_j) f(H_i) \subseteq f(H_j).$$

Comme $f(H_i)$ et $f(H_j)$ sont des sous-groupes de $(G, \cdot)$, ces deux inclusions impliquent $f(H_i) = f(H_j)$.

Tous les H_i ont donc même image par f , et nous dénoterons cette image par F . Nous avons alors $H_i = iF$, pour tout i de I , et nous sommes en présence d'un G -système (F, I) vérifiant la condition du théorème qui est ainsi démontré.

2.2. Demi-groupes cycliques de solutions.

LEMME 2.2. - Soient f et g deux éléments de $S(\overline{G})$. Si $f \circ g = g \circ f$, alors $f \circ g \in S(\overline{G})$.

La démonstration est triviale.

COROLLAIRE. - Un sous-ensemble de $S(\overline{G})$, dont les éléments sont deux à deux permutable, engendre un sous-demi-groupe abélien de $A(\overline{G})$, contenu dans $S(\overline{G})$. En particulier, le sous-demi-groupe cyclique $\langle f \rangle$ de $A(\overline{G})$, engendré par un élément f de $S(\overline{G})$, est contenu dans $S(\overline{G})$.

Remarque. - Ω commute avec tout élément de $A(\overline{G})$, sauf E . E commute avec un élément f de $A(\overline{G})$ si, et seulement si, $f(e) = e$.

L'application identique de $\overline{G}$ dans lui-même (que nous noterons γ) commute avec tout élément de $A(\overline{G})$.

Notations. - Soit un élément f de $S(\bar{G})$ différent de Ω , E et γ . Soit n un entier strictement positif, et soit $f^n \in \langle f \rangle$. Nous désignerons par :

(F_n, I_n) le G -système associé à f^n dans le théorème 2.2,

Z_n l'ensemble $\{x \in \bar{G} ; f^n(x) = 0\}$,

D_n l'ensemble $\bar{G} \setminus Z_n$.

Enfin l'élément courant de I_n sera noté i_n et, au cas où $F_n \subseteq D_n$, l'élément de I_n contenu dans F_n sera noté j_n . Nous n'écrirons pas l'index 1.

LEMME 2.3. - $\Omega \in \langle f \rangle \implies \langle f \rangle = \{f, \Omega\}$.

Supposons que $f^n = \Omega$ avec $n \geq 2$. Evidemment, $f^m = \Omega$ pour tout $m \geq n$.

Si $f^2 = \Omega$, $\langle f \rangle = \{f, \Omega\}$.

Si $f^2 \neq \Omega$, soit k le plus petit entier positif tel que $f^k = \Omega$:

$$\{0\} = f^k(\bar{G}) = f(f^{k-1}(\bar{G})) .$$

Donc $F_{k-1} = f^{k-1}(\bar{G}) \setminus \{0\}$ est contenu dans Z . Réciproquement, si $F_{k-1} \subseteq Z$ et $f^{k-1} \neq \Omega$, il est clair que $f^k = \Omega$. Mais

$$F_{n-1} \subseteq Z \implies e \in Z \implies F \subseteq Z \implies f^2 = \Omega ,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc

$$f^2 \neq \Omega \implies f^n \neq \Omega , \quad \text{pour tout } n \geq 2 .$$

Dans le théorème suivant, nous supposons $\langle f \rangle \neq \{f, \Omega\}$.

THÉORÈME 2.3.

(i) $Z_n = Z$, pour tout $n \geq 1$;

(ii) $F_n = F$, pour tout $n \geq 1$;

(iii) Si i et i_{n+1} sont congrus à gauche modulo F , on a

$$i_{n+1} = i j^n ;$$

(iv) Si j est d'ordre fini n , $\langle f \rangle$ est un groupe cyclique d'ordre n , et réciproquement.

Prouvons (i) :

$$x \in Z_n \implies f^n(x) = 0 \implies f^{n+1}(x) = 0 \implies x \in Z_{n+1} ,$$

donc $Z_n \subseteq Z_{n+1}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
 x \in Z_{n+1} &\implies f^{n+1}(x) = 0 \implies f(f^n(x)) = 0 \implies f^n(x) \in Z \\
 &\implies f^n(x) \in Z_n \implies f^n(x) = 0 \implies x \in Z_n,
 \end{aligned}$$

donc $Z_{n+1} \subseteq Z_n$ et $Z_{n+1} = Z_n$. Ceci équivaut à $D_{n+1} = D_n$.

Prouvons (ii) par récurrence sur n :

$$F_2 = f^2(D) = f(f(D)) = f(F) = F.$$

Supposons $F = F_2 = \dots = F_n$, $F_{n+1} = f^{n+1}(D) = f^n(f(D)) = f^n(F) = F$.

Prouvons (iii) par récurrence sur n : Si $x \in i_2 F = iF$, on a

$$f^2(x) = i_2^{-1} x = f(f(x)) = f(i^{-1} x) = j^{-1} i^{-1} x,$$

donc $i_2 = ij$. Supposons alors que $i_n = ij^{n-1}$, et soit $x \in i_{n+1} F = iF$;

$$f^{n+1}(x) = i_{n+1}^{-1} x = f(f^n(x)) = f(i_n^{-1} x) = j^{-1} i_n^{-1} x,$$

donc $i_{n+1} = i_n j = ij^n$.

Pour montrer (iv), remarquons que, si $1 \leq m \leq n-1$, on a $j^n = e$ et $j^m \neq e$. Donc $i_{n+1} = i$ pour tout $i \in I$, donc $f^{n+1} = f$.

Réciproquement, $f^k = f \implies i_k = i$ pour tout i de I . Donc $j^{k-1} = e$, et n divise $k-1$. Donc $n+1$ est le plus petit entier tel que $f = f^{n+1}$ et, par conséquent, $\langle f \rangle$ est un groupe d'ordre n , engendré par f , et ayant f^n comme élément neutre.

La réciproque est évidente.

3. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un groupe.

THÉOREME 3.1. - Soit G un groupe. Alors $f \in S(G)$ si, et seulement si, il existe un G -système plein (F, I) vérifiant :

$$f(x) = i^{-1} x, \quad \text{pour } i \in I \text{ et } x \in iF.$$

Considérons d'abord un élément f de $S(G)$. Adjoignons à G un zéro pour en faire un groupe avec zéro $\bar{G}$, et étendons f à $\bar{G}$ par

$$\begin{cases} \bar{f}(0) = 0, \\ \bar{f}(x) = f(x), \end{cases} \quad \text{pour tout } x \text{ de } G.$$

Il est évident que $\bar{f} \in S(\bar{G})$. Donc il existe un G -système (F, I) vérifiant :

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = 0, & \text{pour } x \in \bigcup_{i \in I} iF, \\ \bar{f}(x) = i^{-1} x, & \text{pour } i \in I \text{ et } x \in iF. \end{cases}$$

Comme $\bar{f}(x) = 0 \implies x = 0$, (F, I) est plein. Par conséquent, $\bar{f}(x) = i^{-1} x$ pour $i \in I$, et $x \in iF$ se réduit à $f(x) = i^{-1} x$ pour $i \in I$ et $x \in iF$.

Réciproquement, soit $f \in A(G)$, et soit un G -système plein (F, I) vérifiant la condition du théorème. On considère de nouveau $\bar{G}$ et $\bar{f}$ qui vérifient les conditions du théorème 2.1. Donc $\bar{f} \in S(\bar{G})$, et donc $f \in S(G)$.

Remarquons que le G -système correspondant à l'application identique de G sur lui-même est $(G, \{e\})$. Celui correspondant à l'application E est $(\{e\}, G)$.

Nous allons maintenant montrer une proposition qui sera utilisée au paragraphe suivant.

PROPOSITION 3.1. - Soient G un groupe, et $\{\alpha_u\}_{u \in U}$ une famille d'éléments de $A(G)$. Cette famille vérifie la relation

$$\alpha_u(g\alpha_v(h)) = \alpha_u(g) \alpha_v(h), \quad \text{pour tout } u, v \in U \text{ et tout } g, h \in G,$$

si, et seulement si, chaque α_u est dans $S(G)$, et $\alpha_u(G) = \alpha_v(G)$ pour tout $u, v \in U$.

Montrons d'abord que la condition est suffisante. A chaque α_u , correspond un G -système plein que nous noterons (F, I_u) . Soient u et v dans U , g et h dans G : les $\alpha_v(h)$ étant dans F , g et $g\alpha_v(h)$ sont congrus à gauche modulo F . Donc, pour un certain élément i de I_u ,

$$\alpha_u(g) = i^{-1} g \quad \text{et} \quad \alpha_u(g\alpha_v(h)) = i^{-1} g\alpha_v(h) = \alpha_u(g) \alpha_v(h).$$

Réciproquement, supposons la condition satisfaite. Evidemment chaque α_u est dans $S(G)$, et correspond à un G -système plein (F_u, I_u) . Soient alors u, v dans U , et g, h dans G . Il existe, dans I_u , deux éléments i et j congrus respectivement à g et $g\alpha_v(h)$, à gauche modulo F_u . Donc

$$\alpha_u(g) = i^{-1} g \quad \text{et} \quad \alpha_u(g\alpha_v(h)) = j^{-1} g\alpha_v(h),$$

mais $\alpha_u(g\alpha_v(h)) = \alpha_u(g) \alpha_v(h)$, donc $j^{-1} g\alpha_v(h) = i^{-1} g\alpha_v(h)$, et $i = j$. Par conséquent, g et $g\alpha_v(h)$ sont congrus à gauche modulo F_u pour tout g et h de G . Donc $\alpha_v(h)$ et e sont congrus à gauche modulo F_u pour tout h de G et, par suite, $F_v \subseteq F_u$. Ceci étant vrai pour tout u et v de U , le résultat est établi.

4. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un groupe gauche.

L'étude des groupes gauches se trouve dans [3]. Nous allons cependant rappeler la définition, quelques propriétés, et préciser quelques notations.

DÉFINITION 4.1. - Un demi-groupe L est appelé groupe-gauche, s'il est simple à gauche, et vérifie la règle de simplification à droite.

Un tel demi-groupe a, entre autres, les propriétés suivantes :

- (a) L'ensemble E de ses idempotents n'est pas vide, et est un zéro-demi-groupe à gauche ⁽²⁾ ;
- (b) Pour un élément donné x de L , il existe un unique idempotent, noté $\bar{x}$, vérifiant $\bar{x}x = x$;
- (c) Chaque élément de E est élément neutre à droite dans L ;
- (d) Si e est un élément de E , l'ensemble eL est un groupe d'élément neutre e , et l'application $\varphi : (e, g) \in \text{Exe}L \rightarrow eg \in L$, est un isomorphisme de $\text{Exe}L$ sur L avec $\varphi^{-1}(x) = (\bar{x}, ex)$.

LEMME 4.1. - $\gamma \in S(L)$ si, et seulement si, $\varphi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi \in S(\text{Exe}L)$.

C'est immédiat.

Nous allons maintenant considérer un groupe G , un zéro-demi-groupe à gauche E , et le produit direct $L = \text{Ex}G$. Soit $f \in A(\text{Ex}G)$.

Pour tout élément e de E , on définit un élément α_e de $A(G)$ par

$$(e', \alpha_e(g)) = f(e, g) .$$

Pour chaque élément g de G , on définit un élément β_g de $A(E)$ par

$$(\beta_g(e), \alpha_e(g)) = f(e, g) .$$

Réciproquement, si nous prenons une famille $\{\alpha_e\}_{e \in E}$ d'éléments de $A(G)$ et une famille $\{\beta_g\}_{g \in G}$ d'éléments de $A(E)$, nous pouvons définir un élément f de $A(\text{Ex}G)$ par

$$f(e, g) = (\beta_g(e), \alpha_e(g)) .$$

La famille $\{\alpha_e\}_{e \in E}$ sera appelée composante α de f , et la famille $\{\beta_g\}_{g \in G}$ sera la composante β de f .

⁽²⁾ C'est-à-dire que, pour tout couple (e_1, e_2) d'éléments de E , on a $e_1 e_2 = e_1$.

Supposons maintenant que $f \in S(\text{Ex}G)$. Pour tout $e_1, e_2 \in E$ et tout $g_1, g_2 \in G$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f((e_1, g_1) f(e_2, g_2)) &= f(e_1, g_1) f(e_2, g_2) , \\ f((e_1, g_1)(\beta_{g_2}(e_2), \alpha_{e_2}(g_2))) &= (\beta_{g_1}(e_1), \alpha_{e_1}(g_1))(\beta_{g_2}(e_2), \alpha_{e_2}(g_2)) , \\ f(e_1 \beta_{g_2}(e_2), g_1 \alpha_{e_2}(g_2)) &= (\beta_{g_1}(e_1) \beta_{g_2}(e_2), \alpha_{e_1}(g_1) \alpha_{e_2}(g_2)) , \\ f(e_1, g_1 \alpha_{e_2}(g_2)) &= (\beta_{g_1}(e_1), \alpha_{e_1}(g_1) \alpha_{e_2}(g_2)) , \\ (\beta_{g_1 \alpha_{e_2}(g_2)}(e_1), \alpha_{e_1}(g_1 \alpha_{e_2}(g_2))) &= (\beta_{g_1}(e_1), \alpha_{e_1}(g_1) \alpha_{e_2}(g_2)) . \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

- (a) $\alpha_{e_1}(g_1 \alpha_{e_2}(g_2)) = \alpha_{e_1}(g_1) \alpha_{e_2}(g_2)$, pour tout e_1, e_2 dans E , et tout g_1, g_2 dans G ;
- (b) $\beta_{g_1 \alpha_{e_2}(g_2)} = \beta_{g_1}$, pour tout e_2 dans E , et tout g_1, g_2 dans G .

Réciproquement, si les composantes α et β de f vérifient les conditions (a) et (b) ci-dessus, il est évident que $f \in S(\text{Ex}G)$.

PROPOSITION 4.1. - Soit $\{\alpha_e\}_{e \in E}$ vérifiant la condition (a) ci-dessus. D'après la proposition 3.1, on a, pour tout $e \in E$, $\alpha_e(G) = F$, F étant un certain sous-groupe de G . Alors $\{\beta_g\}_{g \in G}$ vérifie la condition (b) ci-dessus si, et seulement si, g et h congrus à gauche modulo F implique $\beta_g = \beta_h$.

Supposons d'abord que $g \in hF \implies \beta_g = \beta_h$. Si $e \in E$, alors $\alpha_e(h) \in F$ et $\alpha_e(h)F = F$. Donc

$$g \in gF \implies g \in g\alpha_e(h)F \implies \beta_g = \beta_{g\alpha_e(h)} .$$

Réciproquement, supposons que la condition (b) soit satisfaite : Si $g \in hF$ et $e \in E$, il existe g' dans G tel que $\alpha_e(g') = h^{-1}g$. Donc $g = h\alpha_e(g')$, et par conséquent,

$$\beta_h = \beta_{h\alpha_e(g')} = \beta_g .$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. - $f \in S(\text{Ex}G)$ si, et seulement si, il existe :

- 1° Une famille $\{(F, I_e)\}_{e \in E}$ de G-systèmes pleins ;
 2° Une famille $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $A(E)$ (indexée par l'ensemble Λ des classes à gauche modulo F) vérifiant

$$f(e, g) = (\beta_\lambda(e), \lambda_e^{-1} g),$$

où λ est l'élément de Λ contenant g , et λ_e est l'unique élément de I_e contenu dans λ .

Combinant le lemme 4.1 et la proposition 4.2, nous obtenons finalement le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. - Soient L un groupe gauche, et E l'ensemble des idempotents de L . Alors $\gamma \in S(L)$ si, et seulement si, il existe :

1° Une famille $\{(F, I_e)\}_{e \in E}$ de G-systèmes pleins, avec $G = \varepsilon L$, ε étant un certain élément de E ;

2° Une famille $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $A(E)$ (indexée par l'ensemble Λ des classes à gauche modulo F dans G) vérifiant

$$\gamma(x) = \beta_\lambda(\bar{x}) \lambda_{\bar{x}}^{-1} x,$$

où

$\bar{x}$ est l'unique élément de E tel que $\bar{x}x = x$,

λ est l'élément de Λ contenant εx ,

$\lambda_{\bar{x}}$ est l'unique élément de $I_{\bar{x}}$ contenu dans λ .

Remarque. - Dans le groupe gauche L , les eL ($e \in E$) sont des groupes disjoints, et leur union est L . De plus, chaque eL est un idéal à droite de L . Si nous regardons l'égalité précédente $\gamma(x) = \beta_\lambda(\bar{x}) \lambda_{\bar{x}}^{-1} x$, nous voyons que $\beta_\lambda(\bar{x}) \lambda_{\bar{x}}^{-1}$ appartient à $\beta_\lambda(\bar{x})L$.

Ceci suggère la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3. - Soit U un demi-groupe, union disjointe d'idéaux à droite. Dans chacun de ces idéaux, nous choisissons un élément, et nous notons I l'ensemble de ces éléments.

Soit $\beta \in A(I)$; définissons un élément f de $A(U)$ par $f(x) = \beta(\bar{x})x$, où $\bar{x}$ est l'élément de I contenu dans l'idéal contenant x . Alors $f \in S(L)$.

En effet, soit x, y deux éléments de L . Nous avons immédiatement $\bar{x} = \overline{xf(y)}$; donc

$$f(xf(y)) = \beta(\bar{x}) xf(y) = f(x) f(y).$$

5. Solution générale de l'équation (2) dans le cas d'un demi-treillis.

Soit T un inf-demi-treillis, dont nous noterons la loi par $\wedge$. Soit F un sous-demi-treillis de T .

Considérons une famille $\{E_a\}_{a \in F}$ de sous-ensembles non vides de T . Posons $E = \bigcup_{a \in F} E_a$. Pour tout x de T , nous noterons par I_x l'ensemble des éléments i de E , vérifiant $x \wedge a = i$ pour $i \in E_a$.

DÉFINITION 5.1. - Une telle famille sera appelée ancêtre de F , si elle vérifie:

$$1^\circ \quad i \in E_a \implies i \leq a;$$

$$2^\circ \quad a, b \in F \text{ et } a \neq b \implies E_a \cap E_b = \emptyset;$$

$$3^\circ \quad \text{Pour tout } x \text{ de } T, \text{ l'ensemble } I_x \text{ possède un élément maximum, noté } i_x.$$

DÉFINITION 5.2. - Nous appellerons associée de l'ancêtre $\{E_a\}_{a \in F}$, la fonction f de T dans F définie de la façon suivante :

D'après 2° et 3° , pour tout x de T , il existe un unique élément de F , noté $\bar{x}$, vérifiant $x \wedge \bar{x} = i_x$. On définit alors f par $f(x) = \bar{x}$.

Remarquons que f est surjective. En effet, soient $a \in F$ et $x \in E_a$.

$$x \leq a \implies x \wedge a = x.$$

Donc $x \in I_x$. D'autre part, si $j \in I_x$ avec $j \in E_b$, ou si $x \wedge b = j$, $j \leq x$ et $x = i_x$. Donc

$$\bar{x} = a \quad \text{et} \quad f(E_a) = a.$$

THÉOREME 5.1. - $f \in S(T)$ si, et seulement si, il existe un sous-demi-treillis F de T et un ancêtre $\{E_a\}_{a \in F}$ de F , ayant f comme associée, et vérifiant la condition

$$(C) \quad (\forall x \in T) \quad (\forall a \in F) \quad (i_{x \wedge a} \in E_{\bar{x} \wedge a} \quad \text{et} \quad i_x \wedge a \in E_{\bar{x} \wedge a}).$$

Soient, en effet, x et y dans T . Nous avons, par (C) et la remarque ci-dessus,

$$f(i_{x \wedge \bar{y}}) = f(i_x \wedge \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{y} = f(x) \wedge f(y),$$

mais $f(i_{x \wedge \bar{y}}) = f(x \wedge \bar{y}) = f(x \wedge f(y))$, donc $f \in S(T)$.

Pour démontrer la réciproque, considérons un élément f de $S(T)$, et la loi $\star$ définie sur T par

$$x \star y = x \wedge f(y).$$

$(T, 1)$ étant un demi-groupe, on montre, comme dans le théorème 2.1, que

$$f \in S(T) \implies [(T, \star) \text{ est un demi-groupe}] .$$

Par suite, $f(T) = F$ est un sous-demi-treillis de T .

Dans $(T, \star)$, chaque carré est un idempotent,

$$\begin{aligned} (x \star x) \star (x \star x) &= (x \wedge f(x)) \wedge f(x \wedge f(x)) \\ &= x \wedge f(x) = x \star x . \end{aligned}$$

Donc i est un idempotent si, et seulement si, $i \leq f(i)$. Notons E l'ensemble des idempotents de $(T, \star)$.

Soit $H_i = \{x \in T ; x \star x = i\}$. Evidemment, $i \in H_i$. De plus, soient x et y dans H_i ,

$$f(x \star x) = f(i) = f(x) \wedge f(x) = f(x) ,$$

et

$$x \star y = x \wedge f(y) = x \wedge f(x) = i .$$

Donc H_i est, pour la loi $\star$, un demi-groupe tel que tout produit est égal à i . Il est clair que les H_i sont deux à deux disjoints, et que

$$T = \bigcup_{i \in E} H_i .$$

Soit maintenant a un élément de F , et soit E_a l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est a . Puisque $T = \bigcup_{i \in E} H_i$, E_a n'est pas vide. Si $i \in E_a$, $i \star i = i \wedge f(i) = i \wedge a = i$. Donc $i \leq a$. Evidemment, si a et b sont deux éléments distincts de F , $E_a \cap E_b = \emptyset$.

Considérons enfin un élément x de T , et soit I_x l'ensemble défini au début du paragraphe. Puisque x est dans un certain H_i , on a évidemment $i \in I_x$. Soit alors j un élément de I_x ,

$$\begin{aligned} x \wedge f(j) = j &\implies f(x) \wedge f(j) = f(j) \\ &\implies f(j) \leq f(x) . \end{aligned}$$

De plus,

$$x \wedge f(j) = j \implies x \wedge f(j) \wedge f(x) = j \wedge f(x) = j .$$

Donc $i \wedge f(j) = j$, et $j \leq i$. Donc i est maximum dans I_x . La famille $\{E_a\}_{a \in F}$ est donc un ancêtre de F , et il est évident que son associée est f .

Il reste à montrer que la condition (C) est vérifiée. Soient x dans T , et a dans F ,

$$x \star x = i_x \quad \text{et} \quad (x \wedge a) \star (x \wedge a) = i_{x \wedge a} .$$

Alors

$$\begin{aligned} i_{x \wedge a} &= x \wedge a \wedge f(x \wedge a) \\ &= x \wedge a \wedge f(x) \wedge a = i_x \wedge a . \end{aligned}$$

Mais nous avons

$$(i_x \wedge a) \star (i_x \wedge a) = i_x \wedge a \wedge f(i_x) \wedge a = i_x \wedge a .$$

Donc $i_x \wedge a \in E$. Enfin $f(i_x \wedge a) = f(i_x) \wedge a$ implique que $i_x \wedge a \in E_{f(i_x) \wedge a}$, et par conséquent, la condition (C) est vérifiée.

Remarque. - Pour un sous-demi-treillis F de T donné, il n'existe pas forcément un ancêtre.

Prenons, par exemple, un inf-demi-treillis T ayant un élément minimum 0 et un ensemble non vide d'atomes ⁽³⁾. Le sous-ensemble de T , constitué du zéro et de tous les atomes, est un sous-demi-treillis de T .

Evidemment, si $p \in F$, $E_p = \{p\}$ est le seul ancêtre possible.

Supposons alors qu'il existe un x de T supérieur à deux atomes distincts p et q (on suppose ici que F contient au moins trois éléments). Alors I_x contient au moins p et q , et il n'existe pas d'élément de E plus grand que p et q à la fois.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ACZÉL (J.). - Lectures on functional equations and their applications. - New York and London, Academic Press, 1966 (Mathematics in Science and Engineering, 19).
- [2] BIRKHOFF (Garrett). - Moyenne des fonctions bornées, *Colloques internationaux du C. N. R. S. : Algèbre et Théorie des nombres* [24, 1949, Paris], p. 143-153. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1950.
- [3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - Algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [4] DARÓCZY (Z.). - Über die Funktionalgleichung $\varphi[\varphi(x)y] = \varphi(x) \varphi(y)$, *Acta Univ. Debrecen, Ser. Fiz. Chem.*, t. 8, 1962, p. 125-132.

⁽³⁾ Un élément a est un atome, s'il est différent de 0 , et si

$$0 < x \leq a \implies x = a .$$

- [5] JAVOR (P.). - Continuous solutions of the functional equation $f(x + yf(x)) = f(x) f(y)$ (à paraître).
- [6] WOŁODZKO (S.). - General solution of the functional equation $f(x + yf(x)) = f(x) f(y)$, Meeting on functional equations [1967. Waterloo (Canada)], Abstract.

(Texte remis le 13 mars 1969)

Yves MATRAS
Ingénieur au C. E. A.
Charg. Ens. Fac. Sc. Orsay
5 rue Fernand Widal
75 - PARIS 13
