Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Celeyrette

Dualisation dans les algèbres abstraites

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 1 (1968-1969), exp. nº 12, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 12

10 mars 1969

DUALISATION DANS LES ALGÈBRES ABSTRAITES

par Jean CELEYRETTE

1. Généralités sur les algèbres abstraites.

Une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$ est un couple noté $\langle A , \mathfrak{F} \rangle$ où A , support de $\mathfrak{A}$, est un ensemble non vide, et $\mathfrak{F}$ est une famille d'opérations sur A portant sur un nombre fini de variables. Une sous-algèbre $\mathfrak{B} = \langle B , \mathfrak{F} \rangle$ de l'algèbre $\mathfrak{A} = \langle A , \mathfrak{F} \rangle$ est un couple pour lequel B est une partie non vide de A , stable pour tout f de $\mathfrak{F}$.

Une congruence $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A} = \langle A , \mathfrak{F} \rangle$ est une équivalence définie sur A , telle que pour tout f de $\mathfrak{F}$ (supposée à n variables) et tout système

$$\{x_1 , \ldots , x_n , y_1 , \ldots , y_n\}$$

de $2n$ éléments de A , l'hypothèse $x_i \equiv y_i \quad (\mathcal{C})$ pour $i = 1 , \ldots , n$ entraîne

$$f(x_1 , \ldots , x_n) \equiv f(y_1 , \ldots , y_n) \quad (\mathcal{C}) \quad .$$

On appellera opérations composées à n variables, les applications de A^n dans A définies comme suit :

(i) Les projections e_n^j $(j = 1 , 2 , \ldots , n)$, définies par

$$e_n^j(x_1 , \ldots , x_n) = x_j \quad ,$$

sont des opérations composées à n variables.

(ii) Si $p_1 , \ldots , p_q$ sont des opérations composées à n variables, et f une opération de $\mathfrak{F}$ à q variables, $f(p_1 , \ldots , p_q)$, définie par

$$f(p_1 , \ldots , p_q)(x_1 , \ldots , x_n) = f(p_1(x_1 , \ldots , x_n) , \ldots , p_q(x_1 , \ldots , x_n)) \quad ,$$

est une opération composée à n variables.

(iii) On obtient, par (i) et (ii), toutes les opérations composées à n variables. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}_n$.

Une opération à 0 variable consiste à désigner un élément.

Si S est une partie de A , il existe une sous-algèbre minimum contenant S . Son support est noté $\overline{S}$. C'est l'ensemble des $g_n(x_1 , \ldots , x_n)$ où n décrit $\underset{\sim}{N}$, g_n décrit $\mathcal{G}_n$, et $x_1 , \ldots , x_n$ sont des éléments de S , quelconques.

On montre que la famille des sous-algèbres d'une algèbre $\mathfrak{A}$ forme une famille de Moore algébrique, donc $\cup$-inductive.

On appellera <u>translation</u>, une application de A dans A obtenue à partir d'une opération (composée ou non) de $\mathfrak{A}$, en fixant toutes les variables sauf une. Etant donnée l'algèbre $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{F} \rangle$, nous noterons $\mathcal{G}$ la famille des opérations composées, $\mathcal{H}$ celle des translations, $\mathcal{H}_1$ le demi-groupe unitaire engendré par $\mathcal{H}$. Une équivalence sur A est une congruence sur $\langle A , \mathcal{F} \rangle$ si, et seulement si, c'est une congruence sur $\langle A , \mathcal{H}_1 \rangle$. (Remarquons que toutes les opérations de $\langle A , \mathcal{H}_1 \rangle$ sont à une variable. On dit que l'algèbre est unaire.)

S'il existe une bijection entre les familles d'opérations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de deux algèbres $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{F} \rangle$ et $\mathfrak{A}' = \langle A' , \mathcal{F}' \rangle$ conservant le nombre de variables des opérations, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont dites <u>de même type</u>. Nous utiliserons la même notation pour désigner deux opérations homologues dans la bijection précédente. Une application φ de A dans A' est alors un <u>homomorphisme</u> de $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{F} \rangle$ dans $\mathfrak{A}' = \langle A' , \mathcal{F} \rangle$ si, pour tout f de $\mathcal{F}$ (supposée à n variables) et tout $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ dans A,

$$\varphi f(x_1 , \dots , x_n) = f(\varphi x_1 , \dots , \varphi x_n) \quad .$$

Les <u>classes d'algèbres</u> dont nous parlerons sont des classes d'algèbres de même type qui, lorsqu'elles contiennent une algèbre, contiennent toutes ses images isomorphes. Pour toutes ces notions, voir [3] par exemple.

A toute image homomorphe d'une algèbre $\mathfrak{A}$ nous ferons correspondre, dualement, le noyau de l'homomorphisme, c'est-à-dire sa <u>congruence nucléaire</u>. C'est pourquoi, à la fermeture de Moore : $X \to \overline{X}$ (de $\mathcal{P}(A)$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$, ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{A}$), nous pouvons faire correspondre l'application $\mathcal{R} \to \widetilde{\mathcal{R}}$ (de l'ensemble $\Gamma(A)$ des équivalences de A sur l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des congruences de $\mathfrak{A}$) qui à une équivalence $\mathcal{R}$ associe la plus grande congruence $\widetilde{\mathcal{R}}$ contenue dans $\mathcal{R}$. $\mathcal{C}(A)$ étant un sous-treillis complet de $\Gamma(A)$, $\widetilde{\mathcal{R}}$ existe pour tout $\mathcal{R}$; c'est le produit transitif des congruences contenues dans $\mathcal{R}$. On dit que $\widetilde{\mathcal{R}}$ est analysée par $\mathcal{R}$ (cf. [5]).

Si $\mathcal{H}_1$ est le demi-groupe unitaire, précédemment défini, on montre aisément que $\widetilde{\mathcal{R}}$ est définie par

$$x \equiv y \quad (\widetilde{\mathcal{R}}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\ h \in \mathcal{H}_1) \ , \quad hx \equiv hy \quad (\mathcal{R}) \quad .$$

D'autre part, les relations $\widetilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, entraîne $\widetilde{\mathcal{R}} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathcal{R}}} = \widetilde{\mathcal{R}}$, montrent que l'application précédente est une fermeture de Moore inversée. On a évidemment

$$\bigcap_i \widetilde{\mathcal{R}}_i = \widetilde{\bigcap_i \mathcal{R}_i} \qquad \text{et} \qquad \prod_i^t \widetilde{\mathcal{R}}_i \subseteq \widetilde{\prod_i^t \mathcal{R}_i} \quad .$$

Si S , partie de A , est telle que $\overline{S} = \mathfrak{A}$, on dit que S engendre $\mathfrak{A}$. Dualement, nous dirons que l'équivalence $\mathcal{R}$ analyse $\mathfrak{A}$ si $\widetilde{\mathcal{R}}$ est l'égalité dans $\mathfrak{A}$. Toute algèbre $\mathfrak{A}$ a au moins une partie génératrice (A) et une équivalence analysante (l'égalité dans $\mathfrak{A}$).

2. Produit direct. Produit libre.

(a) Etant donnée une famille $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ d'algèbres de même type, on peut définir sur le produit cartésien $\prod_{i \in I} A_i$ une structure d'algèbres de même type, en définissant les opérations composante par composante de façon habituelle.

L'algèbre ainsi construite, notée $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, est appelée produit direct (complet) des $\mathfrak{A}_i$. Si une classe K contient le produit direct de toute famille d'algèbres de K , nous dirons qu'elle "admet les produits directs", et nous noterons $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$. Il est clair que, dans une classe K contenant le produit direct d'une famille $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ d'algèbres de K , $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ a la propriété universelle habituelle. La réciproque n'est pas vraie : La classe T des groupes de torsion contient un groupe ayant la propriété universelle pour toute famille $(G_i)_{i \in I}$ de T , mais n'admet pas les produits directs ([1] et [4]).

(b) On définit également le produit libre d'une famille d'algèbres. $\mathfrak{A}$ est produit libre dans K des algèbres $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ de K , si :

(i) $\mathfrak{A} \in K$;

(ii) Il existe pour tout i un homomorphisme injectif $\psi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$;

(iii) $\mathfrak{A}$ est engendrée par $\bigcup_{i \in I} \psi_i \mathfrak{A}_i$;

(iv) Si $\mathfrak{B}$ est une algèbre de K et si, pour tout i , $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}$ est un homomorphisme, il existe alors un homomorphisme $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tel que $\varphi_i = \varphi \circ \psi_i$.

[Pour des propriétés et des conditions suffisantes d'existence du produit libre, voir [1] et [4]. Si K contient le produit libre de toute famille d'algèbres de K , nous dirons que K "admet les produits libres", et nous noterons $\underset{\sim}{PL}(K) \subseteq K$.]

3. Algèbres libres (voir [2] et [4]).

(a) I , partie du support A de $\mathfrak{A}$, est une partie libre de $\mathfrak{A}$ relativement à une classe K (contenant $\mathfrak{A}$), si toute application de I dans une algèbre quelconque $\mathfrak{B}$ de K peut être prolongée par un homomorphisme de la sous-algèbre $\overline{I}$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. On montre que cet homomorphisme est unique.

La famille des parties libres de $\mathfrak{A}$ est $\cup$-inductive. Il existe donc des parties libres maximales. De plus, toute partie d'une partie libre est libre.

(b) Une algèbre $\mathfrak{A}$ est dite libre de base X sur une classe K, si :

(i) $\mathfrak{A} \in K$;

(ii) $\overline{X} = \mathfrak{A}$;

(iii) X est une partie libre de $\mathfrak{A}$ relativement à K.

(c) On montre ([4]) qu'il y a équivalence entre :

(i) Il existe une classe K sur laquelle $\mathfrak{A}$ est libre de base X ;

(ii) Il existe une classe K telle que $\underset{\sim}{S}(K) \subseteq K$ (K contient toutes les sous-algèbres de ses algèbres), $\underset{\sim}{H}(K) \subseteq K$ (K contient toutes les images homomorphes de ses algèbres), $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$, sur laquelle $\mathfrak{A}$ est libre de base X ;

(iii) $\mathfrak{A}$ est libre, de base X, sur la classe réduite à $\{\mathfrak{A}\}$.

(d) BIRKHOFF a établi l'existence (et donné une construction) d'algèbres libres sur toute classe K telle que : $\underset{\sim}{S}(K) \subseteq K$, $\underset{\sim}{H}(K) \subseteq K$, $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$. De plus, deux algèbres libres sur une même classe de bases X et X' équipotentes, sont isomorphes.

(e) On montre que toute base d'une algèbre libre est une partie libre maximale et un système générateur minimal. Les réciproques sont évidemment fausses (voir la classe des A-modules à gauche).

(f) Enfin, si dans la classe K existe une algèbre finie, deux bases d'une même algèbre ont même cardinal.

Pour résoudre le problème général des cardinaux des bases d'une algèbre libre, on a recours à un théorème d'échange :

THÉORÈME. - Si $I = I_0 \cup J$ $(I_0 \cap J = \emptyset)$ est une base de $\mathfrak{A}$, et si I_1 est une partie libre telle que $\overline{I_1} = \overline{I_0}$, $I' = I_1 \cup J$ est une autre base de $\mathfrak{A}$.

La plupart de ces propriétés peuvent être dualisées. Malheureusement les raisonnements seront faits sur des algèbres dont les opérations sont à une variable, ou "algèbres unaires".

4. Définition et existence des universels avec $\mathfrak{N}$-analyse.

(a) Une congruence $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A} = \langle A , \mathfrak{F} \rangle$ est "universellement analysée" sur une classe K, par l'équivalence $\mathfrak{N}$ de A, si :

(i) $\mathfrak{A} \in K$;

(ii) $\mathfrak{N} = \mathcal{C}$;

(iii) Pour toute algèbre $\mathfrak{B}$ de K et toute application f de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$, il existe un homomorphisme φ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$ tel que $f = \pi \circ \varphi$ (où π est la surjection canonique $\mathfrak{A}/\mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$).

L'algèbre $\mathfrak{A}$ est un "universel avec $\mathfrak{N}$-analyse" sur K , si :

(i) $\mathfrak{A} \in K$;

(ii) $\mathfrak{N}$ analyse $\mathfrak{A}$ (ou $\widetilde{\mathfrak{N}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$) ;

(iii) $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$ est universellement analysée par $\mathfrak{N}$.

(b) L'existence peut se montrer en adaptant un raisonnement de Green ([5]). Il est clair que les congruences d'une algèbre unaire $\mathfrak{A} = \langle A , \mathfrak{F} \rangle$ et que les homomorphismes de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B} = \langle B , \mathfrak{F} \rangle$ sont les congruences de $\mathfrak{A}' = \langle A , \mathcal{K}_1 \rangle$ et les homomorphismes de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{B}' = \langle B , \mathcal{K}_1 \rangle$ (voir § 1). Nous supposerons donc dans la suite que la famille d'opérations est un demi-groupe unitaire Σ .

Soit N un ensemble. Posons

$$U = N^{\Sigma} = \prod_{s \in \Sigma} N_s$$

(avec $N_s = N$ pour tout s). On munit U d'une structure de Σ-algèbre par

$$(\forall\, u \in U) \ , \quad (\forall\, \mu \in \Sigma) \ , \quad (\forall\, \sigma \in \Sigma) \ , \qquad (\mu u)_\sigma = u_{\sigma\mu} \ .$$

On pose $\mathfrak{U} = \langle U , \Sigma \rangle$ ($(\mu u)_\sigma$ est la σ-ième composante de μu , $u_{\sigma\mu}$ est la $\sigma\mu$-ième composante de u).

1° Σ est alors un demi-groupe unitaire d'opérations pour $\mathfrak{U}$. En effet, pour tout σ de Σ , tout μ de Σ , tout ν de Σ , tout u de U ,

$$[\mu(\nu u)]_\sigma = [(\mu\nu)u]_\sigma \ .$$

Si i est l'unité de Σ , $[i(u)]_\sigma = u_\sigma$.

2° L'équivalence nucléaire $\mathfrak{Q}_i$ de la i-ième projection analyse $\mathfrak{U}$. Si $\mathcal{C}$ est une Σ-congruence contenue dans $\mathfrak{Q}_i$, et si $u \equiv v$ $(\mathcal{C})$, pour tout σ de Σ , $\sigma u \equiv \sigma v$ $(\mathcal{C})$, soit $\sigma u \equiv \sigma v$ $(\mathfrak{Q}_i)$. Donc $(\sigma u)_i = (\sigma v)_i$, soit $u_{i\sigma} = v_{i\sigma}$. Finalement, pour tout σ de Σ , $u_\sigma = v_\sigma$, soit $u = v$.

D'où : $\mathcal{C} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}}$.

3° Tout diagramme

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{U} \arrow[r, "\pi_i"] & \mathfrak{U}/\mathfrak{Q}_i \\
\mathfrak{B} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\quad ,
$$

où π_i est la surjection canonique, et $\mathfrak{B}$ une algèbre d'une classe contenant $\mathfrak{U}$, peut être rendu commutatif par un homomorphisme $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$. Il existe une bijection canonique entre $\mathfrak{U}/\mathfrak{Q}_i$ et N_i. Soit φ_i l'application de $\mathfrak{B}$ dans N_i correspondant à f.

Pour tout s de Σ, on définit $\varphi_s : \mathfrak{B} \to N_s$ par $\varphi_s(b) = \varphi_1(sb)$. Ceci définit une application unique $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$ qui rend commutatif le diagramme (1), et qui est tel que

$$(\forall\ s \in \Sigma)\ ,\quad (\forall\ b \in \mathfrak{B})\ ,\qquad (\varphi(b))_s = \varphi_s(b)\quad .$$

Il reste à montrer que φ est un Σ-homomorphisme.

$(\forall\ \nu \in \Sigma)$, $(\forall\ s \in \Sigma)$, $(\forall\ b \in \mathfrak{B})$,

$$[\varphi(\nu b)]_s = \varphi_s(\nu b) = \varphi_1(s\nu b) = \varphi_{s\nu}(b) = [\varphi(b)]_{s\nu} = [\nu\varphi(b)]_s \quad .$$

D'où : $(\forall\ \nu \in \Sigma)$, $\varphi(\nu b) = \nu\varphi(b)$.

(c) La même démonstration peut se faire à partir de $\mathfrak{Q}_a$, où a est un élément inversible à droite de Σ.

Il suffit donc de raisonner dans le cas d'un demi-groupe unitaire Σ ayant plusieurs éléments inversibles à droite, pour obtenir un universel, universellement analysé par plusieurs équivalences.

5. Propriétés des universels sur des classes d'algèbres unaires.

PROPOSITION 1. - Il y a équivalence entre :

(i) $\mathfrak{U} = \langle U\ ,\ \Sigma\rangle$ est universel avec $\mathfrak{N}$-analyse sur une classe K ;

(ii) $\mathfrak{U} = \langle U\ ,\ \Sigma\rangle$ est universel avec $\mathfrak{N}$-analyse sur la classe réduite à $\{\mathfrak{U}\}$;

(iii) $\mathfrak{U} = \langle U\ ,\ \Sigma\rangle$ est universel avec $\mathfrak{N}$-analyse sur une classe K , telle que

$$\underline{S}(K) \subseteq K\ ,\qquad \underline{H}(K) \subseteq K\ ,\qquad \underline{PL}(K) \subseteq K\quad .$$

Il suffit de montrer que (i) $\Longrightarrow$ (iii) . On voit immédiatement qu'on peut se ramener au cas où $\underline{S}(K) \subseteq K$, $\underline{PL}(K) \subseteq K$.

Si $\psi(\mathfrak{B})$ est image homomorphe d'une algèbre $\mathfrak{B}$ de K , et si g est une application de $\psi(\mathfrak{B})$ dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$, il existe ζ homomorphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$, tel que

$\pi_{\mathcal{N}} \circ \zeta = g \circ \psi$. Si b et b_1 de $\mathcal{B}$ ont même image par ψ , on a, pour tout σ de Σ ,

$$\pi_{\mathcal{N}}\ \zeta(\sigma b) = \pi_{\mathcal{N}}\ \zeta(\sigma b_1) = \pi_{\mathcal{N}}\ \sigma\zeta(b) = \pi_{\mathcal{N}}\ \sigma\zeta(b_1) \quad .$$

Comme $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$, $\zeta(b) = \zeta(b_1)$.

ζ se factorise par ψ , et il existe ζ' (qui est évidemment un homomorphisme) tel que $\zeta = \zeta' \circ \psi$.

Nous parlerons donc d'universel sans préciser sur quelle classe.

PROPOSITION 2 (Unicité). - Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux universels sur une même classe K , avec $\mathcal{N}$- (resp. $\mathcal{N}'$-) analyse, tels que $|\mathcal{U}/\mathcal{N}| = |\mathcal{U}'/\mathcal{N}'|$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont isomorphes.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "\pi_{\mathcal{N}}"] \arrow[d, shift right, "\theta"'] & \mathcal{U}/\mathcal{N} \arrow[d, shift right, "j^{-1}"'] \\
\mathcal{U}' \arrow[r, "\pi_{\mathcal{N}'}"] \arrow[u, shift right, "\varphi"'] & \mathcal{U}'/\mathcal{N}' \arrow[u, shift right, "j"']
\end{tikzcd} ,$$

où j et j^{-1} sont deux bijections réciproques, montre l'existence de deux homomorphismes θ et φ tels que $\pi_{\mathcal{N}'}\ \theta\varphi = \pi_{\mathcal{N}'}$ et $\pi_{\mathcal{N}}\ \varphi\theta = \pi_{\mathcal{N}}$. On en déduit,

$$(\forall\ \sigma \in \Sigma) \ , \quad (\forall\ u' \in \mathcal{U}') \ , \qquad \pi_{\mathcal{N}'}\ \sigma\theta\varphi(u') = \pi_{\mathcal{N}'}\ \sigma u' \quad .$$

D'où $\theta\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}'}$, et, de même, $\varphi\theta = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$.

PROPOSITION 3 (Unicité de l'homomorphisme φ associé à une application f donnée de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}$). - Si φ et ψ sont deux homomorphismes de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}$, tels que $\pi_{\mathcal{N}} \circ \varphi = \pi_{\mathcal{N}} \circ \psi = f$, comme précédemment, $\varphi = \psi$.

PROPOSITION 4. - Si $\mathcal{U}$ est un universel avec $\mathcal{N}$-analyse, et si $\mathcal{N}'$ est une équivalence contenant $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ analyse universellement une congruence $\mathcal{C}$.

Utilisant la surjection canonique $\pi : \mathcal{U}/\mathcal{N} \to \mathcal{U}/\mathcal{N}'$, on associe à toute application f d'une algèbre $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}'$, une application g de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}$ telle que $\pi \circ g = f$, et l'homomorphisme ζ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}$ tel que $\pi_{\mathcal{N}} \circ \zeta = g$.

Posant $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{N}'}$, on montre aisément que, si $\pi_{\mathcal{C}}$ est l'homomorphisme surjectif canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}/\mathcal{C}$, $\pi_{\mathcal{C}} \circ \zeta$ est l'homomorphisme qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U}/\mathcal{C} \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{U}/\mathfrak{N}' \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

(π' surjection canonique) .

PROPOSITION 5. - Si l'équivalence $\mathfrak{N}$ analyse universellement $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}$ est maximale parmi les équivalences qui analysent $\mathfrak{U}$.

Si une équivalence $\mathfrak{M}$ contient $\mathfrak{N}$, soient N_1 et N_2 deux $\mathfrak{N}$-classes contenues dans une $\mathfrak{M}$-classe. Soit $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{N}$ une application telle que si b de $\mathfrak{B}$ est fixé, $f(b) = N_1$ et $f(x) = N_2$ (pour $x \neq b$). L'homomorphisme $\omega : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{N}}"] & \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} ,$$

est tel que, pour tout σ de Σ ,

$$\sigma\omega(x) \equiv \sigma\omega(x) \quad (\mathfrak{M}) ,$$

soit $\varphi(x) = \omega(b)$ et $N_1 = N_2$.

PROPOSITION 6. - Si $\mathfrak{N}$ analyse universellement $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{N}$ est minimale parmi les équivalences de $\mathfrak{U}$ qui analysent universellement des congruences de $\mathfrak{U}$.

Si $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, alors $\widetilde{\mathfrak{N}'} = Id_{\mathfrak{U}}$. Il existe alors une application $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{N}'$ à laquelle on ne peut associer d'homomorphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$. Il suffit de considérer f qui envoie un élément de $\mathfrak{B}$ sur une $\mathfrak{N}'$-classe, et les autres sur une autre $\mathfrak{N}'$-classe, contenue dans la même $\mathfrak{N}$-classe. La démonstration précédente s'applique alors.

6. Diverses équivalences analysant universellement un universel (les algèbres sont unaires).

Une remarque précédente a montré qu'un universel pouvait admettre plusieurs équivalences l'analysant universellement.

PROPOSITION 1. - Si une algèbre $\mathfrak{U} = \langle U , \Sigma \rangle$ est un universel sur une classe contenant une algèbre finie, deux équivalences $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ analysant universellement $\mathfrak{U}$ sont telles que $|\mathfrak{U}/\mathfrak{M}| = |\mathfrak{U}/\mathfrak{N}|$.

Soit $\mathfrak{B}$ une algèbre finie de K. On a $|\mathfrak{B}| = p$. Il est clair que l'ensemble des homomorphismes de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$ est équipotent à l'ensemble des applications de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$ (cardinal : $|\mathfrak{U}/\mathfrak{N}|^p$), ou à celui des applications de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}/\mathfrak{M}$ (cardinal : $|\mathfrak{U}/\mathfrak{M}|^p$). D'où $|\mathfrak{U}/\mathfrak{N}| = |\mathfrak{U}/\mathfrak{M}|$.

THÉORÈME DE L'ÉCHANGE. - <u>$\mathfrak{U} = \langle U , \Sigma\rangle$ étant un universel avec $\mathfrak{P}$-analyse sur une classe K, telle que $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$, $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{M}$ deux équivalences telles que</u>

$$\mathfrak{U}/\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{U}/\mathcal{H} \times \mathfrak{U}/\mathfrak{M} ,$$

<u>$\widetilde{\mathfrak{N}}$ une équivalence analysant universellement $\widetilde{\mathfrak{N}} = \widetilde{\mathfrak{M}} = \mathcal{C}$, alors $\mathfrak{N} \cap \mathcal{H}$ analyse universellement $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}/(\mathfrak{N} \cap \mathcal{H}) \simeq \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \times \mathfrak{U}/\mathcal{H}$.</u>

(La démonstration est la même avec $\widetilde{\mathfrak{P}} \neq \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}}$.)

LEMME. - <u>Si $\mathfrak{P}$ analyse universellement $\mathfrak{U}$ (sur K telle que $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$), et si $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{M}$ sont deux équivalences, telles que $\mathfrak{U}/\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{U}/\mathcal{H} \times \mathfrak{U}/\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{U}$ est isomorphe à $\mathfrak{U}/\widetilde{\mathcal{H}} \times \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{M}}$.</u>

Puisque $\underset{\sim}{P}(K) \subseteq K$, il suffit de montrer qu'à tout couple d'homomorphismes $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\widetilde{\mathcal{H}}$ et $\varphi_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{M}}$, on peut associer un homomorphisme unique ψ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{M}} & \mathfrak{U} \arrow[l, "\pi_{\widetilde{\mathfrak{M}}}"'] \arrow[r, "\pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}"] & \mathfrak{U}/\widetilde{\mathcal{H}} \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Soient $\pi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{M}$ et $\pi_{\mathcal{H}} : \mathfrak{U}/\widetilde{\mathcal{H}} \to \mathfrak{U}/\mathcal{H}$ les surjections canoniques habituelles. Posons $f = \pi_{\mathcal{H}} \circ \varphi$, $f_1 = \pi_{\mathfrak{M}} \circ \varphi_1$. Elles définissent une application $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{P}$. Soit ζ l'homomorphisme correspondant de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$. Montrons que ζ répond à la question. On a $\pi_{\mathcal{H}}\, \pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \zeta(b) = \pi_{\mathcal{H}}\, \varphi(b)$ pour tout b de $\mathfrak{B}$. Alors $(\forall\, \sigma \in \Sigma)$, $(\forall\, b \in \mathfrak{B})$, $\pi_{\mathcal{H}}\, \sigma \pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \zeta(b) = \pi_{\mathcal{H}}\, \sigma\varphi(b)$.

D'où : $\pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \zeta(b) = \varphi(b)$ et, de même, $\pi_{\widetilde{\mathfrak{M}}}\, \zeta(b) = \varphi_1(b)$.

L'unicité de ζ est évidente, car s'il existe ζ' ayant la même propriété,

$$(\forall\, b \in \mathfrak{B}) , \qquad \pi_{\widetilde{\mathfrak{M}}}\, \zeta(b) = \pi_{\widetilde{\mathfrak{M}}}\, \zeta'(b) = \varphi_1(b) ,$$

$$\pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \zeta(b) = \pi_{\widetilde{\mathcal{H}}}\, \zeta'(b) = \varphi(b) .$$

D'où $\zeta(b) = \zeta'(b)$ $(\widetilde{\mathfrak{M}} \cap \widetilde{\mathcal{H}})$. Or $\widetilde{\mathfrak{M}} \cap \widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathfrak{M} \cap \mathcal{H}} = \widetilde{\mathfrak{P}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}}$. D'où $\zeta = \zeta'$. Finalement $\zeta = \psi$.

<u>Démonstration du théorème de l'échange.</u> – $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{M}$ analysent universellement $\widetilde{\mathfrak{K}}$ et $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (prop. 4, § 5).

$$\widetilde{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{N}} \cap \widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{M}} \cap \widetilde{\mathfrak{K}} = \widetilde{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}} = \mathfrak{P} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}} \quad .$$

Le lemme montre que $\mathfrak{U} \simeq \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{K}} \times \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{K}} \times \mathfrak{U}/\widetilde{\mathfrak{N}}$. D'où $\mathfrak{N}.\mathfrak{K} \supseteq \widetilde{\mathfrak{N}}.\widetilde{\mathfrak{K}}$ = congruence universelle. Finalement $\mathfrak{U}/(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}) \simeq \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \times \mathfrak{U}/\mathfrak{K}$.

Il reste à montrer que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}$ analyse universellement $\mathfrak{U}$. Soient σ une application de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}/(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K})$, $\pi_{\mathfrak{N}}$ la surjection canonique de $\mathfrak{U}/(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K})$ sur $\mathfrak{U}/\mathfrak{N}$. Or $\mathfrak{C} = \widetilde{\mathfrak{N}}$ est universellement analysée par $\mathfrak{N}$, il existe donc un homomorphisme $h_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{C}$ rendant commutatif la partie droite du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}/\mathfrak{M} & & \mathfrak{U}/\mathfrak{C} \arrow[ll, "\pi_{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}"'] \arrow[rr, "\pi_{\mathfrak{C}\mathfrak{N}}"] & & \mathfrak{U}/\mathfrak{N} \\
& & & \mathfrak{U}/(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}) \arrow[ur, "\pi_{\mathfrak{N}}"'] & \\
& & \mathfrak{B} \arrow[uull, "\sigma'"] \arrow[uu, "h_1"] \arrow[ur, "\sigma"'] & &
\end{tikzcd} .$$

Soit σ' l'application rendant commutative la partie gauche. Les applications : $\pi_{\mathfrak{K}} \circ \sigma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{K}$, $\sigma' : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{M}$, permettent de définir

$$s : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{P} \quad (\simeq \mathfrak{U}/\mathfrak{K} \times \mathfrak{U}/\mathfrak{M}) \quad .$$

Soit h l'homomorphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{U}$, associé à s .

(a) Les définitions de s et de h montrent que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U} \arrow[r] & \mathfrak{U}/\mathfrak{P} \arrow[r] & \mathfrak{U}/\mathfrak{K} \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "\pi_{\mathfrak{K}} \circ \sigma"'] &
\end{tikzcd} .$$

(b) La partie droite du diagramme ci-dessous est commutative, d'après la définition de σ' .

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{C}}"] & \mathfrak{U}/\mathfrak{C} \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}"] & \mathfrak{U}/\mathfrak{M} \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "h_1"] \arrow[ur, "\sigma'"'] &
\end{tikzcd} .$$