

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY MAURY

Remarques sur les ordres maximaux réguliers noethériens sans diviseurs de zéro

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, n° 1 (1968-1969), exp. n° 8,
p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LES ORDRES MAXIMAUX RÉGULIERS NOETHÉRIENS
SANS DIVISEURS DE ZÉRO

par Guy MAURY

1. Introduction : Rappels et notations.

Dans cet article, R désigne un anneau non nécessairement commutatif à élément unité noethérien (c'est-à-dire satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche et pour les idéaux à droite), sans diviseurs de zéro. On sait qu'un tel anneau admet un corps des fractions K [3].

Nous allons supposer de plus que R est un ordre maximal régulier dans K au sens de ASANO [1]. Les définitions sont données dans l'article de ASANO [1] ou dans ma thèse [7] (chapitre III, partie II, p. 84 à 87). Dans la suite, nous dirons "ordre maximal" pour "ordre maximal dans K ".

Dans le chapitre III, partie II, de ma thèse [7], j'ai établi comme application de la théorie des $\mathcal{C}$ -algèbres de LESIEUR et CROISOT [6], un théorème qui s'énonce dans le cas particulier considéré ici :

THÉOREME 0. - Soit R un ordre maximal, régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Soit a , $a \neq 0$, $a \in R$, Ra (respectivement aR) est intersection d'idéaux à gauche (respectivement à droite) premiers (au sens de LESIEUR et CROISOT [6]) dont les radicaux sont des idéaux premiers bilatères minimaux de R .

Cet article a pour but de donner des propriétés des ordres maximaux noethériens, réguliers, sans diviseurs de zéro, vérifiant la condition (C) supplémentaire suivante :

(C) Pour tout idéal premier bilatère minimal $\mathfrak{P}$ de R , tout idéal d'un côté $\mathfrak{P}$ -primaire est compris dans $\mathfrak{P}$.

La condition (C) est vérifiée en particulier si tout idéal d'un côté X , $\mathfrak{P}$ -primaire, est bilatère.

Ces propriétés découlent principalement du théorème 0. On démontre, après une étude assez longue, que R a ses idéaux à gauche et à droite tous bilatères. D'où résulte l'existence, pour tout idéal premier bilatère $\mathfrak{P}$, de R , non obligatoirement minimal, d'un anneau de fractions à droite et à gauche selon $S = R - \mathfrak{P}$.

Lorsque $\mathcal{P}$ est un idéal premier bilatère minimal, la structure de $R_{\mathcal{G}}$ est particulièrement simple. Toujours dans le cas où $\mathcal{P}$ est un idéal premier bilatère minimal, nous étudions les puissances symboliques $\mathcal{P}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, de $\mathcal{P}$, définies de façon générale par GOLDIE [4].

Cet article laisse ouvertes bon nombre de questions dont quelques-unes sont citées à la fin.

Je remercie L. LESIEUR pour ses précieuses remarques au cours d'une discussion orale.

2. Anneaux de fractions selon un idéal premier, non nécessairement minimal de l'anneau R .

Dans toute la suite, nous dirons idéal pour idéal bilatère.

Soient $\mathcal{P}$ un idéal premier de R , et $S = R - \mathcal{P}$. Rappelons que si I désigne un idéal à gauche $\mathcal{Q}$ -primaire, $\mathcal{Q}$ désignant un idéal premier, il existe un entier naturel p tel que $\mathcal{Q}^p \subseteq I$ (voir LESIEUR-CROISOT [6], propriétés 5.5 et 5.6, et théorème 5.1), et si $\mathcal{Q}$ est premier minimal, la condition (C) entraîne $I \subseteq \mathcal{Q}$.

THÉOREME 1. - S est un sous-demi-groupe multiplicatif de R , R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S .

Démonstration. - Soient s et s' deux éléments de S ; nous allons établir que ss' appartient à S . Appliquons le théorème (0) :

$$Rs = \bigcap_{i=1}^n X_i, \quad X_i \text{ idéal à gauche } \mathcal{P}_i\text{-primaire, } i = 1, \dots, r,$$

$$s'R = \bigcap_{i=1}^{n'} X'_i, \quad X'_i \text{ idéal à droite } \mathcal{P}'_i\text{-primaire, } i = 1, \dots, r'.$$

Il existe des entiers p_i et p'_j , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, r'$, tels que $\mathcal{P}_i^{p_i} \subseteq X_i$ et $\mathcal{P}'_j^{p'_j} \subseteq X'_j$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, r'$. On peut alors écrire :

$$\bigcap_{i=1}^r \mathcal{P}_i^{p_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=r} X_i = Rs; \quad \bigcap_{j=1}^{j=r'} \mathcal{P}'_j^{p'_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{j=r'} X'_j = s'R.$$

Si ss' appartient à $\mathcal{P}$, on a $Rss'R \subseteq \mathcal{P}$, et par suite :

$$(1) \quad \left(\bigcap_{i=1}^{i=r} \mathcal{P}_i^{p_i} \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{j=r'} \mathcal{P}'_j^{p'_j} \right) \subseteq \text{idéal engendré par } Rss'R \subseteq \mathcal{P}.$$

On déduit de là que l'un des $\mathcal{P}_j'$ ou l'un des $\mathcal{P}_i$ est compris dans $\mathcal{P}$. Mais ceci entraîne que s ou s' appartient à $\mathcal{P}$, contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant, montrons que, pour tout s appartenant à S , il existe un s' appartenant à S , tel que $Rs \supseteq s'R$. On a établi plus haut $\bigcap_{i=1}^{i=r} \mathcal{P}_i^{p_i} \subseteq Rs$. Supposons que $\bigcap_{i=1}^{i=r} \mathcal{P}_i^{p_i}$ appartienne à $\mathcal{P}$, on en déduirait que l'un au moins des $\mathcal{P}_i$ serait contenu dans $\mathcal{P}$, donc aussi Rs contenu dans X_i , donc dans $\mathcal{P}_i$.

On démontrerait de même que, pour tout s appartenant à S , il existe s'' appartenant à S tel que $sR \supseteq Rs''$.

Il est facile de démontrer, pour terminer, que R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S : démontrons, par exemple, qu'étant donnés a non nul appartenant à R et s appartenant à S , il existe a' appartenant à R et s' appartenant à S tel que $as' = sa'$: en effet il existe, d'après ce qui précède, $s' \in S$ tel que $sR \supseteq Rs'$, et as' s'écrit aussi sa' pour un certain a' appartenant à R , a et a' étant non nuls.

COROLLAIRE 1. - Si M est un idéal à gauche de R , on a

$$M_{\mathcal{P}} = \{x \in K \mid \exists s \in S, sRx \subseteq M\} = \{x \in K \mid \exists s' \in S, s'x \in M\},$$

et $M_{\mathcal{P}}$ est un idéal à gauche de l'anneau $R_{\mathcal{P}}$.

Si M est un idéal à droite de R , on a

$${}^{\mathcal{P}}M = \{x \in K \mid \exists s \in S, xRs \in M\} = \{x \in K \mid \exists s' \in S, xs' \in M\},$$

et ${}^{\mathcal{P}}M$ est un idéal à droite de l'anneau $R_{\mathcal{P}} = {}^{\mathcal{P}}R = R_S$.

Démonstration. - Démontrons d'abord que $R_{\mathcal{P}}$ est un sous-anneau de K : soient x et y appartenant à $R_{\mathcal{P}}$, il existe s et s' appartenant à S tels que $sRx \subseteq R$, $s'Ry \subseteq R$. Comme $sRs' \notin \mathcal{P}$, il existe r de R tel que sts' n'appartient pas à $\mathcal{P}$. On peut écrire alors

$$sts'R(x+y) \subseteq sts'Rx + stR \subseteq sRx + stR \subseteq R,$$

et $x+y$ appartient à $R_{\mathcal{P}}$.

Considérons maintenant xy . On a, y'' désignant un élément de R tel que $s'y''s \in S$,

$$s'y''sRx \subseteq s'y''Ry \subseteq s'Ry \subseteq R.$$

En s'inspirant de cette démonstration, le lecteur établira de même que $M_{\mathcal{P}}$ est un idéal à gauche de $R_{\mathcal{P}}$, M désignant un idéal à gauche de R . Finalement, de

$sRx \subseteq M$ nous déduisons $sx \in M$, puisque R possède un élément unité. Réciproquement, de $sx \in M$, $s \in S$, nous déduisons successivement $Rsx \in M$ et $s'Rx \in M$, $s' \in S$ tel que $Rs \supseteq s'R$.

Il est bien connu que la condition de Ore des deux côtés par rapport à S entraîne l'existence d'un anneau de fractions au sens ordinaire de R selon S , noté R_S : R_S est l'ensemble des éléments de K de la forme as^{-1} , $a \in R$, $s \in S$; on a donc $R_S = {}_{\mathcal{P}}R$; on a de même $R_S = R_{\mathcal{P}}$. Remarquons que si M est un idéal à gauche de R , on peut écrire $M_{\mathcal{P}} = R_S M$.

3. Anneau de fractions à droite et à gauche R_S , $S = R - \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ idéal premier bilatère minimal de R .

Dans toute la suite de l'article, $\mathcal{P}$ désigne un idéal premier bilatère minimal de R .

PROPOSITION 1 (ASANO [2]). - $R_{\mathcal{P}}$ est un ordre maximal régulier.

Démonstration. - Le lecteur est prié de se reporter à l'article de ASANO [2], p. 25, théorème 5.4 (la démonstration de ce théorème, donnée dans le cas où R est un demi-groupe, se recopie lorsque R est un anneau). Dans le cas particulier où R est un anneau dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, ce résultat se trouve aussi dans l'article de ASANO [1] (théorème 3.13).

LEMME 1. - Soit $M = \bigcap_{i=1}^r X_i$, X_i , $i = 1, \dots, n$, et M désignant des idéaux à gauche, on a $M_{\mathcal{P}} = \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{P}}$. Si de plus X_i est $\mathcal{P}_i$ -primaire avec $\mathcal{P}_i \not\subseteq \mathcal{P}$, on a $(X_i)_{\mathcal{P}} = R_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. - De $M \subseteq X_i$ résulte $M_{\mathcal{P}} \subseteq (X_i)_{\mathcal{P}}$ pour $i = 1, \dots, n$, donc $M_{\mathcal{P}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{P}}$. Soit maintenant $x \in \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{P}}$: pour chaque $i = 1, \dots, n$, il existe $s_i \in S$ tel que $s_i x \in X_i$. Il est facile d'établir par récurrence sur n , grâce à la condition de Ore, l'existence d'éléments α_i appartenant à S tels que

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \dots = \alpha_n s_n, \quad \text{avec } \gamma \in S.$$

On en déduit $\gamma x \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, donc $\gamma x \in \bigcap_{i=1}^n X_i$ et $x \in M_{\mathcal{P}}$. Ainsi $M_{\mathcal{P}}$ est égal à $\bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{P}}$.

La deuxième partie du lemme est démontrée au lemme II.2, p. 98 de ma thèse [7].

LEMME 2. - Si $\mathfrak{A}$ est un idéal de R maximal dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$, on a

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\mathfrak{A} = R_S \mathfrak{A} = \mathfrak{A}R_S ;$$

en particulier on a $\mathcal{P}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$.

Démonstration. - De $sRx \subseteq \mathfrak{A}$, on déduit $RsR.RxR \subseteq \mathfrak{A}$, en désignant aussi par RsR l'idéal engendré par RsR dans R . En passant aux classes des idéaux modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$ dans R (on pourra se reporter, pour les définitions et les propriétés relatives à l'équivalence $\mathcal{R}$, au livre de JACOBSON [5] ou à ma thèse [7]), on obtient : $\overline{RsR.RxR} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}$, donc $\overline{RxR} \subseteq \overline{RsR}^{-1}.\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}.RsR}^{-1}$ et $\overline{RxR.RsR} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}$ et $RxR.RsR \subseteq \mathfrak{A}$, puisque $\mathfrak{A}$ est maximum dans sa classe modulo $\mathcal{R}$: par suite x appartient à $\mathcal{P}\mathfrak{A}$, et réciproquement : on a donc $\mathfrak{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\mathfrak{A}$. Comme $\mathcal{P}$ est maximal dans sa classe modulo $\mathcal{R}$ ([7], chapitre III, théorème II.5 et lemme II.1), on peut appliquer au cas particulier $\mathcal{P} = \mathfrak{A}$.

LEMME 3. - Pour $n = 1, 2, \dots$, $(\mathcal{P}^n)_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{P}})^n = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n)$.

Démonstration. - Démontrons par exemple $(\mathcal{P}_{\mathcal{P}})^n = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n)$: soient $x_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ pour $i = 1, \dots, n$, et considérons $\prod_{i=1}^n x_i$; on a $x_i = s_i^{-1} p_i = p'_i s_i'^{-1}$, avec p_i et p'_i appartenant à $\mathcal{P}$, et s_i, s'_i appartenant à S . On peut écrire

$$x_1 x_2 = p'_1 s_1'^{-1} s_2^{-1} p_2 = p_1 \tau^{-1} p_2, \quad \text{avec } \tau = s_2 s_1 \in S.$$

Or $\tau^{-1} p_2$ appartient à $\mathcal{P}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$, et on peut écrire $\tau^{-1} p_2 = p_2'' \tau'^{-1}$, $\tau' \in S$, $p_2'' \in \mathcal{P}$, et $x_1 x_2 = p_1 p_2'' \tau'^{-1}$. On peut appliquer ce raisonnement à

$$x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 \dots x_n.$$

On obtient finalement

$$x_1 x_2 \dots x_n = p_1 p_2'' \dots p_n'' \gamma^{-1}, \quad \text{avec } \gamma \in S,$$

$p_1, p_2'', \dots, p_n''$ appartenant à $\mathcal{P}$. On a donc $x_1 \dots x_n \gamma \in \mathcal{P}^n$, donc

$$x_1 \dots x_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P}^n) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_{\mathcal{P}})^n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}^n).$$

L'inclusion $\mathcal{P}(\mathcal{P}^n) \subseteq (\mathcal{P}_{\mathcal{P}})^n$ est immédiate.

LEMME 4. - $\forall a \in R, R_S a = (Ra)_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. - Si x appartient à $R_S a$, on a $x = s^{-1} \lambda a$, $\lambda \in R$, donc $sx \in Ra$ et $R_S a \subseteq (Ra)_{\mathcal{P}}$. Soit $x \in (Ra)_{\mathcal{P}}$, il existe $s \in S$ tel que $sx \in Ra$, donc $x = s^{-1} \lambda a$ pour $\lambda \in R$ et $x \in R_S a$, $(Ra)_{\mathcal{P}} \subseteq R_S a$.

PROPOSITION 2. - R_S est un anneau noethérien ; $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ est son plus grand idéal à gauche et aussi son plus grand idéal à droite. $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ et (0) sont les seuls idéaux premiers de R_S . Il y a une correspondance entre les idéaux à gauche propres (à droite propres) de R_S et les idéaux à gauche (à droite) ne rencontrant pas S :

$$I \text{ idéal à gauche de } R_S \rightarrow I' = I \cap R ,$$

$$I' \text{ idéal à gauche de } R \rightarrow I = R_S I' ;$$

de plus, I désignant un idéal à gauche de R_S , on a

$$I = R_S(I \cap R) .$$

Démonstration. - Soit I un idéal à gauche propre de R_S , $I' = I \cap R$ est un idéal à gauche de R . On a $I \supseteq R_S I'$. Soit $i = s^{-1} a \in I$, $a \in R$, $s \in S$. On peut écrire $si = a \in I \cap R = I'$ et $i \in R_S I'$. D'ailleurs I' ne rencontre pas S , sinon on aurait $I' = R_S$. Si I' est maintenant un idéal à gauche de R ne rencontrant pas S , $R_S I'$ est un idéal à gauche de R_S propre car, si 1 appartient à $R_S I'$, on peut écrire

$$1 = \sum_{j=1}^r s_j^{-1} a_j i'_j , \quad \text{avec } i'_j \in I' , \quad a_j \in R \text{ et } s_j \in S \text{ pour } j = 1, \dots, r .$$

On a vu au lemme 1, au cours de la démonstration, l'existence de γ , $\gamma \in S$, tel que

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \dots = \alpha_r s_r , \quad \alpha_j \in S , \quad j = 1, \dots, r .$$

Dès lors $\gamma = \sum_{j=1}^r \gamma s_j^{-1} a_j i'_j \in I'$, ce qui entraîne une contradiction.

Le fait que R_S est noethérien se démontre comme dans le cas commutatif. Cherchons les idéaux premiers de R_S . Démontrons d'abord que $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ est le plus grand idéal à gauche de R_S : soit I un idéal à gauche de R_S , $I \neq R_S$, $I' = I \cap R$ ne rencontre pas S , donc est inclus dans $\mathcal{P}$, et on a $I = R_S I' \subseteq R_S \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$.

Comme $\mathcal{P}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ (lemme 2), $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ est aussi le plus grand idéal à droite de R_S . Soit $\mathcal{Q}$ un idéal premier non nul de R_S , donc compris dans $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$. On veut démontrer l'égalité $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$. Soit $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap R$, $0 \subsetneq \mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{P}$. Démontrons que $\mathcal{Q}'$ est complètement premier, donc premier dans R ($a, b \in \mathcal{Q}'$, $ab \in \mathcal{Q}'$ entraîne a ou b appartient à $\mathcal{Q}'$). On peut supposer d'entrée que a et b n'appartiennent

pas à S , car si l'un d'eux, par exemple a , appartient à S , de $ab \subseteq \mathfrak{z}'$ on déduit $b \in \mathfrak{z}$, donc $b \in \mathfrak{z}'$. Supposons donc que a et b appartiennent à $\mathfrak{P}$ et qu'ils n'appartiennent pas à $\mathfrak{z}'$: de $ab \subseteq \mathfrak{z}'$, on déduit $(R_S a).b \subseteq \mathfrak{z}$, donc $(Ra)_{\mathfrak{P}}.b \subseteq \mathfrak{z}$ (lemme 4). D'après le théorème 0, on peut écrire

$$Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i, \quad X_i \text{ } \mathfrak{P}_i\text{-primaire}, \quad i = 1, \dots, n,$$

et, d'après le lemme 1,

$$(Ra)_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathfrak{P}};$$

puisque l'on suppose que a appartient à $\mathfrak{P}$, l'un des $\mathfrak{P}_i$, par exemple $\mathfrak{P}_1$, est égal à $\mathfrak{P}$. D'après le lemme 1, on a

$$(X_1)_{\mathfrak{P}} = (Ra)_{\mathfrak{P}}.$$

Comme $\mathfrak{P}^{p_1} \subseteq X_1$ pour un certain entier naturel p_1 , on a $(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$ et, d'après le lemme 3,

$$(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}.$$

Si l'on avait $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq \mathfrak{z}$, on déduirait $\mathfrak{z} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, c'est-à-dire ce que nous voulons établir. Supposons donc $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \not\subseteq \mathfrak{z}$, il existe alors a' , $a' \notin \mathfrak{z}$, $a' \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1}$, donc $a'R_S \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$. On a donc $a'R_S b \subseteq (Ra)_{\mathfrak{P}}.b \subseteq \mathfrak{z}$ avec a' et b n'appartenant pas à $\mathfrak{z}$: il y a une contradiction. Finalement $\mathfrak{z}'$ est bien premier dans R . Il est donc égal à $\mathfrak{P}$, et $\mathfrak{z} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$.

LEMME 5. - Soit R un ordre maximal régulier noethérien, sans diviseurs de zéro ; soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de R , on a $\bigcap_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{P}^n = 0$.

Démonstration. - Soit $K = \bigcap_{n=1}^{n=+\infty} \mathfrak{P}^n$. Si K est non nul, en désignant comme plus haut par $\overline{\mathfrak{A}}$ la classe de $\mathfrak{A}$, idéal de R , modulo $\mathfrak{K}$, on a $\overline{K} \neq \overline{R}$, car $\overline{K} = \overline{R}$ entraînerait $\mathfrak{P} = \overline{R}$, ce qui est impossible (cf. [7], lemme II.1, p. 97). On pourrait écrire alors :

$$\overline{K} = \overline{\mathfrak{z}_1^{p_1}} \dots \overline{\mathfrak{z}_r^{p_r}} \subseteq \overline{\mathfrak{P}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{z}_1} = \overline{\mathfrak{P}},$$

par exemple, $\overline{\mathfrak{P}}$ étant un élément premier dans l'ensemble des classes (théorème II.5, p. 93 de ma thèse [7]). Comme on a $\overline{K} \subseteq \overline{\mathfrak{P}^n}$ pour tout n entier naturel, on peut écrire $\overline{\mathfrak{P}^{p_1+1}} \supseteq \overline{\mathfrak{P}^{p_1}} \overline{\mathfrak{z}_2^{p_2}} \dots \overline{\mathfrak{z}_r^{p_r}}$, d'où $\overline{\mathfrak{P}} \supseteq \overline{\mathfrak{z}_2^{p_2}} \dots \overline{\mathfrak{z}_r^{p_r}}$ et $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{z}_j^{p_j}}$ pour un

j compris entre 2 et r . Or ceci est impossible, car on a supposé $\overline{2}_i \neq \overline{2}_j$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, r$). Il y a une contradiction, et $K = 0$.

LEMME 6 (NAKAYAMA). - Soit A un anneau à élément unité, admettant un idéal M qui soit à la fois le plus grand idéal à gauche propre de A et le plus grand idéal à droite propre de A .

1° Si E est un A -module à gauche (respectivement à droite) de type fini, $E = ME$ entraîne $E = 0$ (respectivement $E = EM$ entraîne $E = 0$).

2° Si F est un sous- A -module à gauche (respectivement à droite) du A -module à gauche (respectivement à droite) E' , tel que E'/F soit un A -module à gauche (respectivement à droite) de type fini, alors $E' = F + ME'$ (respectivement $E' = F + E'M$) entraîne $E' = F$.

Démonstration. - Elle est bien connue. Le lecteur la retrouvera sans peine de toutes façons.

LEMME 7. - Soit X un idéal à gauche $\mathcal{P}$ -primaire de R , $\mathcal{P}$ désignant, rappelés-le, un idéal premier minimal de R ; on a $X = (R_S X) \cap R$.

Démonstration. - Elle a été faite, sous des hypothèses plus générales, au lemme II.2, p. 98, de ma thèse [7].

PROPOSITION 3. - Soit T un idéal non nul de R_S , R_S/T est un anneau à idéaux à gauche tous principaux et à idéaux à droite tous principaux.

Démonstration. - JACOBSON a démontré (cf. [5], théorème 24, p. 128 et 129) que si L est un ordre maximal régulier noethérien vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux (c'est-à-dire que toute chaîne descendante d'idéaux de L contenant un idéal donné s'arrête au bout d'un nombre fini d'idéaux), pour tout idéal non nul T de L , L/T a tous ses idéaux à gauche principaux et tous ses idéaux à droite principaux. Or R_S est un ordre maximal régulier noethérien sans diviseurs de zéro ne possédant qu'un seul idéal premier non nul $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}$, qui est d'ailleurs le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de R_S . On sait alors qu'il vérifie la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux (cf. ASANO [1], théorème 2.16), et on peut appliquer le théorème de Jacobson à R_S .

THÉOREME 2. - Les seuls idéaux à gauche (respectivement à droite) de R_S sont les $\mathcal{P}_{\mathcal{P}}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; ainsi tout idéal d'un côté de R_S est bilatère. Enfin il existe un élément a , $a \in R_S$, tel que $R_S a^n = a^n R_S = \mathcal{P}_{\mathcal{P}}^n$, $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. - D'après la proposition 3, $\overline{R_S} = R_S / \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^2$ est un anneau à idéaux à gauche (respectivement à droite) tous principaux, et $\mathfrak{P}_\mathfrak{P} / \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^2 = \overline{R_S} \overline{a}$, $\overline{a} \in \overline{R_S}$. On a donc $R_S a + \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}_\mathfrak{P}$ et, d'après le lemme 6, $\mathfrak{P}_\mathfrak{P} = R_S a$.

Soit I un idéal à gauche propre non nul de R_S , I contient $\mathfrak{P}_\mathfrak{P}^n$ pour un certain n puisque, pour $i \in I$, $i \neq 0$, $R_S i$ est $\mathfrak{P}_\mathfrak{P}$ -primaire (théorème 0). On a donc $I / \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^{n+1} = \widetilde{R_S} \widetilde{a'}$, en posant $\widetilde{R_S} = R_S / \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^{n+1}$ et $a' \in I$. On peut écrire successivement :

$$I = R_S a' + \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^{n+1} = R_S a' + \mathfrak{P}_\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^n \subseteq R_S a' + \mathfrak{P}_\mathfrak{P} \cdot I \subseteq I,$$

donc $I = R_S a' + \mathfrak{P}_\mathfrak{P} I$ et, d'après le lemme 6, $I = R_S a'$. Mais a' , appartenant à $\mathfrak{P}_\mathfrak{P}$, s'écrit $a_1 a = a'$, et il est alors facile de prouver que $I = R_S a'^r$ pour un entier naturel r . En particulier, on a $\mathfrak{P}_\mathfrak{P}^r = R_S a'^p \subseteq \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^p$: si l'on avait $p > r$, on en déduirait $\mathfrak{P}_\mathfrak{P}^p = \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^r$, mais cela entraînerait $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{P}_\mathfrak{P}^i \neq 0$, contrairement au lemme 5. On a donc $p \leq r$. Or ceci entraîne $p = r$ (démonstration par récurrence sur p pour $p = 1$, on a évidemment $r = 1$).

Le théorème s'en déduit alors facilement.

THÉORÈME 3. - Tout idéal à gauche (respectivement à droite) de R est bilatère.

Démonstration. - Nous considérons un idéal à gauche $\mathfrak{P}$ -primaire, $\mathfrak{P}$ premier minimal, X . D'après le lemme 7, $X = (R_S X) \cap R$. D'après le théorème 2, $R_S X$ est un idéal bilatère de R_S , donc X est un idéal de R . Soit alors $Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i$, $a \in R$, $a \neq 0$, une représentation de Ra comme intersection d'idéaux à gauche $\mathfrak{P}_i$ -primaires (théorème 0), $\mathfrak{P}_i$ premier minimal, $i = 1, \dots, n$. Chaque X_i est bilatère, et par suite Ra est bilatère. On démontrerait de même que aR est bilatère, et par suite tout idéal d'un côté de R est bilatère.

4. Puissance symbolique n-ième d'un idéal premier minimal $\mathfrak{P}$ de R .

Dans son article [4], GOLDIE définit la puissance symbolique n-ième d'un idéal bilatère premier $\mathfrak{P}$, notée $\mathfrak{P}^{(n)}$, d'un anneau non commutatif noethérien. En transposant dans le cas particulier considéré ici, la définition de $\mathfrak{P}^{(n)}$, par récurrence sur n , prend la forme simple suivante : on pose pour $n = 1$, $\mathfrak{P}^{(1)} = \mathfrak{P}$. Supposons $\mathfrak{P}^{(n-1)}$ définie, $\mathfrak{P}^{(n)}$ est définie ainsi :

$$\mathfrak{P}^{(n)} = \{x \mid x \in R, \exists F \in \mathfrak{F}, \exists G \in \mathfrak{F}, \text{ tel que } Gx \subseteq \mathfrak{P}^{(n-1)} \cdot \mathfrak{P}\},$$

$\mathfrak{F}$ désignant la famille des idéaux de R qui coupent $S = R - \mathfrak{P}$.

THÉOREME 4. - Pour $n = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{p}^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de $\mathfrak{p}^n$ modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$; de plus, on a

$$(\mathfrak{p}^n)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}^n) = (\mathfrak{p}^{(n)})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}^{(n)}) = R_S \mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n)} R_S = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^n.$$

Démonstration. - Partageons la démonstration en plusieurs points :

Premier point : Les $\mathfrak{p}^{(n)}$, pour $n = 1, 2, \dots$, sont tous distincts. En effet, si l'on avait $\mathfrak{p}^{(n-1)} = \mathfrak{p}^{(n)}$, cela signifierait (cf. [4], proposition 3.3) :

$$G\mathfrak{p}^{(n)} \cap F \subseteq \mathfrak{p}^{(n-1)} \cap F,$$

pour un certain F et un certain G appartenant à $\mathcal{S}$. Passons aux classes modulo $\mathcal{R}$, compte tenu de $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n-1)}$, il vient :

$$\overline{G \cdot \mathfrak{p}^{(n)}} \cdot \overline{F} \subseteq \overline{\mathfrak{p}^{(n)}} \cdot \overline{F}$$

et

$$\overline{G \cdot F} \subseteq \overline{\mathfrak{p}}$$

et

$$G \cdot F \subseteq \mathfrak{p},$$

puisque $\mathfrak{p}$ est maximal dans sa classe. Soient $s \in F$, $s' \in G$, s et s' appartenant à S . On en déduit $ss' \in \mathfrak{p}$, ce qui est impossible d'après le théorème 1. On ne peut donc avoir l'égalité $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n')}$ avec $n \neq n'$.

Deuxième point : $\mathfrak{p}^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de $\mathfrak{p}^n$ modulo $\mathcal{R}$. En effet, on sait, d'après GOLDIE ([4], théorème 4.3), que $\mathfrak{p}^{(n)}$ est $\mathfrak{p}$ -primaire des deux côtés, $n = 1, 2, \dots$. Les idéaux $\mathfrak{p}^{(k)}$ sont donc les plus grands idéaux de leur classe $\overline{\mathfrak{p}^{(k)}}$ modulo $\mathcal{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Les classes $\overline{\mathfrak{p}^{(k)}}$, $k = 1, \dots, n$, sont des classes $\overline{\mathfrak{p}}$ -primaires contenant $\overline{\mathfrak{p}^n}$ (cf. [7], théorème II.6, p. 94, et lemme II.1) : ce sont donc des classes parmi les $\overline{\mathfrak{p}^k}$, $k = 1, \dots, n$. Comme les classes $\overline{\mathfrak{p}^{(k)}}$, $k = 1, 2, \dots, n$, sont distinctes d'après le premier point, on a l'égalité $\overline{\mathfrak{p}^{(k)}} = \overline{\mathfrak{p}^k}$, et $\mathfrak{p}^{(k)}$ est élément maximum de la classe $\overline{\mathfrak{p}^k}$, $k = 1, \dots, n$.

Troisième point : On montre alors, comme au lemme 5, en remplaçant $\mathfrak{p}^n$ par $\mathfrak{p}^{(n)}$, que $\bigcap_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{p}^{(n)} = 0$.

Quatrième point : L'anneau local associé par GOLDIE à $\mathfrak{p}$, dans son article [4], est R_S (grâce au troisième point). En appliquant les résultats de GOLDIE ([4], théorème 4.6), on peut écrire $\mathfrak{p}^{(n)} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^n \cap R$, d'où résulte $\mathfrak{p}^{(n)} R_S = R_S \mathfrak{p}^{(n)} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^n R_S$.

On a vu, au lemme 3, l'égalité $(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^n = (\mathfrak{p}^n)_{\mathfrak{p}}$.

THÉOREME 5. - Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ associé à $Ra = aR$, $a \neq 0$, $a \in R$, il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{P}$ -primaire entre $\mathfrak{P}^{(2)}$ et $\mathfrak{P}$. De façon générale, les seuls idéaux $\mathfrak{P}$ -primaires entre $\mathfrak{P}^n$ et $\mathfrak{P}$ sont $\mathfrak{P}^{(n)}$, $\mathfrak{P}^{(n-1)}$, ..., $\mathfrak{P}$.

Démonstration. - Rappelons que les idéaux $\mathfrak{P}$ -primaires sont maximaux dans leurs classes modulo R , et celles-ci sont distinctes de la classe de R . La classe d'un idéal $\mathfrak{P}$ -primaire contenant $\mathfrak{P}^n$ est donc de la forme $\overline{\mathfrak{P}^k}$ avec $k = 1, \dots, n$. Un idéal $\mathfrak{P}$ -primaire contenant $\mathfrak{P}^n$ est donc élément maximal de la classe $\overline{\mathfrak{P}^k}$ pour un certain k , $1 \leq k \leq n$: c'est donc $\mathfrak{P}^{(k)}$.

Problèmes ouverts :

Premier problème : Dans le cas commutatif, la réciproque du théorème 5 est exacte (cf. [8] et [9]). Est-elle exacte dans le cas non commutatif ?

Deuxième problème : $\mathfrak{P}^{(n)}$ est-elle composante $\mathfrak{P}$ -primaire de $\mathfrak{P}^n$ bien déterminée dans toute décomposition réduite de $\mathfrak{P}^n$ en idéaux tertiaires ?

Troisième problème : Comment se modifie cette étude lorsque R est un anneau premier ou semi-premier ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASANO (Keizo). - Zur Arithmetik in Schieftringen, I, Osaka math. J., t. 1, 1949, p. 98-134.
- [2] ASANO (Keizo) and MURATA (Kentaro). - Arithmetical ideal theory in semigroups, J. of Inst. of Polytech., Osaka City Univ., Series A : Math., t. 4, 1953, p. 9-33.
- [3] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Society, 3rd Series, t. 8, 1958, p. 589-608.
- [4] GOLDIE (A. W.). - Localization in non-commutative noetherian rings, J. of Algebra, t. 5, 1967, p. 89-105.
- [5] JACOBSON (Nathan). - Theory of rings. - New York, American mathematical Society, 1943 (Mathematical Surveys, 2).
- [6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Centerick, 1957 (Centre Belge de Recherches mathématiques).
- [7] MAURY (G.). - La condition intégralement clos dans quelques structures algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 78, 1961, p. 31-100 (Thèse Sc. math. Paris, 1960).
- [8] MORI (S.) und DODO (T.). - Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, J. of Sc. of Hiroshima Univ., Series A, t. 7, 1937, p. 15-28.

- [9] YOSHIDA (Michio) and SAKUMA (Motoyoshi). - On integrally closed noetherian rings, J. of Sc. of Hiroshima Univ., Series A, t. 17, 1954, p. 311-315.

(Texte reçu le 10 février 1969)

Guy MAURY
Prof. Fac. Sc. Lyon
49 rue Duguesclin
69 - LYON 06
