Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jacques Riguet

Théorie des catégories semi-abéliennes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 22, nº 1 (1968-1969), exp. nº 4, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969__22_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
22e année, 1968/69, n° 4, 10 p.

2 et 9 décembre 1968

THÉORIE DES CATÉGORIES SEMI-ABÉLIENNES

par Jacques RIGUET

1re partie

Semi-abélianité et quasi-exactitude

Appelons [1] un couple $(\mathcal{C}, +)$ *catégorie demi-additive* (MITCHELL dit "semi-additive"), lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie, et $+ = (+_{A,B})_{(A,B)\in \text{ob } \mathcal{C} \times \text{ob } \mathcal{C}}$ une famille indexée par les couples d'objets de $\mathcal{C}$, telle que $(\mathcal{C}(A, B), +_{A,B})$ est un demi-groupe abélien à élément neutre satisfaisant à la distributivité par rapport à la composition des flèches :

$$\forall f, f' \in \mathcal{C}(A, B), \qquad g(f +_{A,B} f') = gf +_{A,C} gf' ,$$

$$\forall g, g' \in \mathcal{C}(B, C), \qquad (g +_{B,C} g')f = gf +_{A,C} g'f .$$

Si on désigne par $\mathbf{mau}$ la catégorie des demi-groupes à élément neutre, on obtient une définition équivalente en appelant catégorie demi-additive un couple $(\mathcal{C}, H)$, constitué par une catégorie $\mathcal{C}$ et un foncteur H de $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}$ vers $\mathbf{mau}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{mau} \arrow[dr, "\text{ens}"] & \\ \mathcal{C}^0 \times \mathcal{C} \arrow[ur, "H"] \arrow[rr, "\mathcal{C}(,)"'] & & \mathbf{ens} \end{tikzcd} ,$$

où ens désigne le foncteur d'oubli ensembliste de $\mathbf{mau}$.

De même, on appellera *catégorie additive*, une catégorie demi-additive $(\mathcal{C}, +)$ telle que, $\forall A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$, $(\mathcal{C}(A, B), +_{A,B})$ est un groupe abélien.

Si on désigne par $\mathbf{ab}$ la catégorie des groupes abéliens, on obtient une définition équivalente en appelant catégorie additive un couple $(\mathcal{C}, H)$, constitué par une catégorie $\mathcal{C}$ et un foncteur H de $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}$ vers $\mathbf{ab}$, rendant commutatif le diagramme

---

[1] Nous utilisons les notations et la terminologie de J. RIGUET : Algèbre catégorique. Applications, Cours à la Faculté des sciences de Limoges, 1969/70.

$$\begin{tikzcd} & \underset{\sim}{\mathrm{ab}} \arrow[dr, "\mathrm{ens}"] & \\ \mathbb{C}^0 \times \mathbb{C} \arrow[ur, "H"] \arrow[rr, "\mathbb{C}(\ ,\ )"'] & & \underset{\sim}{\mathrm{ens}} \end{tikzcd},$$

où ens désigne le foncteur d'oubli ensembliste de $\underset{\sim}{\mathrm{ab}}$.

Certains auteurs (BRINKMANN, PUPPE, MACLANE, EILENBERG, MOORE, ...) appellent préadditive, une catégorie additive au sens précédent. La terminologie que nous adoptons ici suit celle de GODEMENT, MITCHELL, NORTHCOTT, MARANDA, ...

Nous dirons qu'une catégorie a la propriété :

L lorsque tout diagramme admet une limite,

L^* lorsque tout diagramme admet une colimite,

Lf lorsque tout diagramme fini admet une limite,

Lf^* lorsque tout diagramme fini admet une colimite,

P lorsque toute famille d'objets admet un produit,

P^* lorsque toute famille d'objets admet un coproduit,

Pf lorsque toute famille finie d'objets admet un produit,

Pf^* lorsque toute famille finie d'objets admet un coproduit,

Pa lorsque tout éventail de flèches de même but admet un produit fibré,

Pa^* lorsque tout éventail de flèches de même source admet un coproduit amalgamé,

Paf lorsque tout éventail fini de flèches de même but admet un produit fibré,

Paf^* lorsque tout éventail fini de flèches de même source admet un coproduit amalgamé,

I lorsque tout éventail de monoflèches de même but admet une intersection,

I^* lorsque tout éventail d'épiflèches de même source admet une cointersection,

If lorsque tout éventail fini de monoflèches de même but admet une intersection,

If^* lorsque tout éventail fini d'épiflèches de même source admet une intersection,

K lorsque tout couple de flèches de même source et même but admet un noyau,

K^* lorsque tout couple de flèches de même source et même but admet un conoyau.

Lorsque la catégorie est pointée, nous désignerons par :

K_0 la propriété : Toute flèche admet un noyau,

K_0^* la propriété : Toute flèche admet un conoyau,

D la propriété : Si $m \in \mathrm{mon}\ \mathbb{C}$ et $e \in \text{épi}\ \mathbb{C}$, alors $m \in \ker e \rightleftarrows e \in \mathrm{coker}\ m$

Nous dirons qu'une catégorie a la propriété :

B lorsque toute famille d'objets admet un produit et un coproduit, reliés entre eux par une flèche invertible, Bf lorsque toute famille finie d'objets admet un produit et un coproduit, reliés entre eux par une flèche invertible,

bal lorsqu'elle est balancée, c'est-à-dire lorsque toute flèche mon et épi est invertible,

nul lorsqu'elle admet un objet nul (c'est-à-dire un objet à la fois initial et terminal).

Etant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, nous désignerons par $\leqq$ la relation de préordre sur les flèches de $\mathcal{C}$, constituée par la divisibilité à droite, et nous désignerons par $\overset{=}{<}$ la relation de préordre sur les flèches de $\mathcal{C}$, constituée par la divisibilité à gauche. En d'autres termes, on écrira

$f \leqq g$ lorsque $\exists\, h$, $f = gh$, c'est-à-dire lorsque $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, equal] & \cdot \end{tikzcd}$ est commutatif ,

$g \overset{=}{<} f$ lorsque $\exists\, k$, $f = kg$, c'est-à-dire lorsque $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, dashed, "k"'] & \cdot \end{tikzcd}$ est commutatif .

Pour exprimer que $f \leqq g$ (resp. $g \overset{=}{<} f$), on dira aussi que f se factorise à travers g , f et g ayant même but (resp. même source).

Remarquons que les préordres $\leqq$, $\overset{=}{<}$ sont inclus dans un préordre plus faible, que nous noterons $<$, exprimant l'immersibilité dans un carré commutatif :

$f < g$ lorsque $\exists\, h, k$, $gh = kf$, c'est-à-dire lorsque $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, dashed, "k"'] & \cdot \end{tikzcd}$ est commutatif .

Remarquons que

$$f \in \mathcal{C}(X , Y) \;\rightarrow\; \iota_X \overset{=}{<} f \leqq \iota_Y \;,$$

$$fu \leqq f \overset{=}{<} vf \;,$$

et que

$$\begin{cases} f \leqq f' \\ u < u' \end{cases} \rightarrow\; vfu \leqq vf'u' \;,$$

$$\begin{cases} f \overset{=}{<} f' \\ v < v' \end{cases} \rightarrow\; vfu \overset{=}{<} v'f'u \;,$$

lorsque sources et buts de $uu'vv'ff'$ sont disposés pour donner un sens aux seconds membres .

Si f est une flèche de $\mathcal{C}$, nous désignerons par $f^{\leqq}$ (respectivement $f^{\geqq}$, $f^{\overset{=}{>}}$, $f^{\overset{=}{<}}$) la classe des flèches x pour lesquelles $x \geqq a$ (respectivement $x \leqq f$, $x \overset{=}{<} f$, $x \overset{=}{>} f$). Les relations $\leqq$ et $\overset{=}{>}$ se traduisent donc par

$$f \leqq g \rightleftarrows g \in f^{\leqq} \rightleftarrows f \in g^{\geqq} ,$$

$$g \overset{=}{<} f \rightleftarrows f \in g^{\overset{=}{<}} \rightleftarrows g \in f^{\overset{=}{>}} .$$

Il est utile de considérer des préordres $\underset{=}{\lhd}$ et $\overset{=}{\lhd}$, plus faibles que les préordres $\leqq$ et $\overset{=}{<}$, définis de la manière suivante :

$$f \underset{=}{\lhd} g \qquad \text{lorsque} \quad ug = vg \Rightarrow uf = vf \quad ,$$

$$f \overset{=}{\lhd} g \qquad \text{lorsque} \quad fu = fv \Rightarrow gu = gv \quad .$$

Il est clair que

$$f \leqq g \Rightarrow f \underset{=}{\lhd} g \quad ,$$

$$f \overset{=}{<} g \Rightarrow f \overset{=}{\lhd} g \quad .$$

On introduira les notations $f^{\underset{=}{\lhd}}$, $f^{\underset{=}{\rhd}}$, $f^{\overset{=}{\rhd}}$, $f^{\overset{=}{\lhd}}$ pour des concepts semblables à ceux définis ci-dessus pour $\leqq$ et $\overset{=}{<}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une <u>monoflèche</u> m <u>de</u> $\mathcal{C}$ <u>sera dite normale</u> (GROTHENDIECK dit "stricte"), et on écrira $m \in \operatorname{monn} \mathcal{C}$, lorsque $f \underset{=}{\lhd} m \Rightarrow f \leqq m$; en d'autres termes, lorsque $m^{\underset{=}{\rhd}} = m^{\overset{=}{>}}$.

Une <u>épiflèche</u> e <u>de</u> $\mathcal{C}$ <u>sera dite normale</u> (GROTHENDIECK dit "stricte"), et on écrira $e \in \operatorname{épin} \mathcal{C}$, lorsque $e \overset{=}{\lhd} f \Rightarrow e \overset{=}{<} f$; en d'autres termes, lorsque $e^{\overset{=}{\lhd}} = e^{\overset{=}{<}}$.

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est pointée, on peut considérer les préordres $\underset{=}{\lhd}_0$ et $\overset{=}{\lhd}_0$, définis de la manière suivante :

$$f \underset{=}{\lhd}_0 g \qquad \text{lorsque} \quad ug = 0 \Rightarrow uf = 0 \quad ,$$

$$f \overset{=}{\lhd}_0 g \qquad \text{lorsque} \quad fu = 0 \Rightarrow gu = 0 \quad .$$

Il est clair que

$$f \leqq g \Rightarrow f \underset{=}{\lhd} g \Rightarrow f \underset{=}{\lhd}_0 g \quad ,$$

$$f \overset{=}{<} g \Rightarrow f \overset{=}{\lhd} g \Rightarrow f \overset{=}{\lhd}_0 g \quad .$$

On écrira $m \in \operatorname{monno} \mathcal{C}$, lorsque $f \underset{=}{\lhd}_0 m \Rightarrow f \leqq m$; en d'autres termes, lorsque

$m^{{}_0\!\geqq} = m^{\geqq}$.

On écrira $e \in$ épino $\mathcal{C}$, lorsque $e \overset{=}{<}_0 f \rightarrow e \overset{=}{<} f$; en d'autres termes, lorsque $e^{\overset{=}{<}_0} = e^{\overset{=}{<}}$.

Si l'on pose, pour une catégorie pointée $\mathcal{C}$,

$$\text{monko } \mathcal{C} = \{m \in \text{fl } \mathcal{C} \mid \exists f \ , \ m \in \ker f\} \ ,$$

$$\text{épiko } \mathcal{C} = \{e \in \text{fl } \mathcal{C} \mid \exists f \ , \ e \in \operatorname{coker} f\} \ ,$$

et si l'on introduit les notations suivantes, pour une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque,

$$\text{monk } \mathcal{C} = \{m \in \text{fl } \mathcal{C} \mid \exists f_1 , f_2 , \ m \in \ker(f_1 , f_2)\} \ ,$$

$$\text{épik } \mathcal{C} = \{e \in \text{fl } \mathcal{C} \mid \exists f_1 , f_2 , \ e \in \operatorname{coker}(f_1 , f_2)\} \ ,$$

on peut montrer la validité du diagramme d'inclusions :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{sect } \mathcal{C} \arrow[rr] & & \text{monk } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{monn } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{mon } \mathcal{C} \arrow[ddr] & \\
 & \text{monko } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{monno } \mathcal{C} \arrow[ur] & & & & \\
\text{inv } \mathcal{C} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & & & \mathcal{C} \\
 & \text{épiko } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{épino } \mathcal{C} \arrow[dr] & & & & \\
 & \text{retr } \mathcal{C} \arrow[rr] & & \text{épik } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{épin } \mathcal{C} \arrow[r] & \text{épi } \mathcal{C} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

On démontrera aussi que

$$m \in \text{monno } \mathcal{C} \ , \quad e \in \operatorname{coker} m \rightarrow m \in \ker e \ ,$$

$$e \in \text{épino } \mathcal{C} \ , \quad m \in \ker e \rightarrow e \in \operatorname{coker} m \ .$$

On désignera par :

N la propriété pour une catégorie d'être <u>normale</u> (MITCHELL), c'est-à-dire pointée telle que mon $\mathcal{C}$ = monno $\mathcal{C}$,

N^* la propriété pour une catégorie d'être <u>conormale</u> (MITCHELL), c'est-à-dire pointée telle que épi $\mathcal{C}$ = épino $\mathcal{C}$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, f une flèche de $\mathcal{C}$, et $m \in$ mon $\mathcal{C}$, tel que $f \leqq m$. On désigne alors par $f^{\bullet}_{m}$ l'unique flèche x , telle que $f = mx$. De manière duale, si $e \in$ épi $\mathcal{C}$, tel que $e \overset{=}{<} f$, on désigne par $f^{\bullet\bullet}_{e}$ l'unique flèche y , telle que $f = ye$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et f une flèche de $\mathcal{C}$. On dira que (e , m) est un <u>couple standard de</u> f , et on écrira $(e , m) \in \text{std } f$, lorsque $e \in$ épi $\mathcal{C}$, $m \in$ mon $\mathcal{C}$, et qu'il existe une flèche z telle que $f = mze$ (cette dernière condition équivaut à $f \leqq m$, $e \overset{=}{<} f^{\bullet}_{m}$, ou encore à $e \overset{=}{<} f$, $f^{\bullet\bullet}_{e} \leqq m$). Si $(e , m) \in \text{std } f$, on désigne par $f^{\bullet\bullet\bullet}_{e,m}$ l'unique z tel que $f = mze$. On montre facilement que l'on a

$$f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m} = (f^{\cdot\cdot}_{e})^{\cdot}_{m} = (f^{\cdot}_{m})^{\cdot\cdot}_{e} \ , \qquad f^{\cdot}_{m} = f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m}\, e \ , \qquad f^{\cdot\cdot}_{e} = m(f^{\cdot\cdot}_{e})^{\cdot}_{m} \ .$$

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{estd}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot}_{m} \in$ épi , ou, ce qui est équivalent, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m} \in$ épi .

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{mstd}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot\cdot}_{e} \in \mathrm{mon}$, ou, ce qui est équivalent, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m} \in \mathrm{mon}$.

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{emstd}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{estd}\ f \cap \mathrm{mstd}\ f$.

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{istd}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m} \in \mathrm{inv}$.

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{dec}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{std}\ f$ et $f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m} \in \mathrm{id}$, ou, ce qui est équivalent, lorsque $f = me$.

On écrira $(e\ ,\ m) \in \mathrm{decu}\ f$, lorsque $(e\ ,\ m) \in \mathrm{dec}\ f$ et que, pour tout $(e'\ ,\ m') \in \mathrm{dec}\ f$, on ait $f^{\cdot\cdot\cdot}_{e,m'} \in \mathrm{inv}$.

Pour éviter des confusions, dues au fait que la notion d'image est susceptible de définitions différentes, nous introduirons la terminologie suivante. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et f une flèche de $\mathcal{C}$.

Nous écrirons $m \in \mathrm{im}\ f$, lorsque $m \in \mathrm{mon}$, $f \leqq m$, tel que, si $m' \in \mathrm{mon}$ tel que $f \leqq m'$, on a $m \leqq m'$.

Nous écrirons $e \in \mathrm{coim}\ f$, lorsque $e \in$ épi , $e \overset{=}{<} f$, tel que, si $e' \in$ épi tel que $e' \overset{=}{<} f$, on a $e' \overset{=}{<} e$.

Nous dirons que m <u>est une image décomposante de</u> f (MITCHELL dit "image épimorphe"), et nous écrirons $m \in \mathrm{imz}\ f$, lorsque $m \in \mathrm{im}\ f$ et $f^{\cdot}_{m} \in$ épi .

On définirait de la même manière la <u>coimage décomposante</u> coimz f d'une flèche f .

Nous dirons que m est une <u>image de Sonner</u> de f , et nous écrirons $m \in \mathrm{imzu}\ f$, lorsque $m \in \mathrm{mon}$, $f \leqq m$, $f^{\cdot}_{m} \in$ épi , tel que, si $m' \in \mathrm{mon}$ tel que $f \leqq m'$, $f^{\cdot}_{m'} \in$ épi , on a $m' \leqq m$.

On définirait de la même manière la <u>coimage de Sonner</u> coimzu f d'une flèche f .

Il est presque immédiat que

$$\mathrm{coimzu}\ f \times \mathrm{imzu}\ f \subset \mathrm{emstd}\ f \ .$$

On dira que $\mathcal{C}$ est une catégorie de Sonner, lorsque, $\forall\ f \in \mathrm{fl}\ \mathcal{C}$,

$$\mathrm{imzu}\ f \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathrm{coimzu}\ f \neq \emptyset \ .$$

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pointée, et f une flèche de $\mathcal{C}$. Nous poserons

$$\mathrm{imk}\ f = \mathrm{kercoker}\ f \ ,$$

$$\mathrm{coimk}\ f = \mathrm{cokerker}\ f \ .$$

Nous désignerons par monk $\mathcal{C}$ l'ensemble des flèches m de $\mathcal{C}$ pour lesquelles il existe f tel que $m \in \ker f$.

Nous désignerons par épik $\mathcal{C}$ l'ensemble des flèches e de $\mathcal{C}$ pour lesquelles il existe f tel que $e \in \operatorname{coker} f$.

On démontre que

$$m \in \text{imk } f \Rightarrow \forall\, e \in \text{épi} \text{ tel que } e \stackrel{=}{<} f \text{ , on a } (e , m) \in \text{std } f ,$$

$$e \in \text{coimk } f \Rightarrow \forall\, m \in \text{mon} \text{ tel que } f \underset{=}{\leq} m \text{ , on a } (e , m) \in \text{std } f .$$

On dira qu'une flèche f d'une catégorie est

$$\underline{\text{mistricte}} \quad \text{lorsque} \quad \left(\begin{array}{l} \text{coimk } f \neq \emptyset \text{ , imk } f \neq \emptyset \text{ , et} \\ e \in \text{coimk } f \text{ , } m \in \text{imk } f \Rightarrow (e , m) \in \text{emstd } f \end{array}\right) ,$$

$$\underline{\text{stricte}} \quad \text{lorsque} \quad \left(\begin{array}{l} \text{coimk } f \neq \emptyset \text{ , imk } f \neq \emptyset \text{ , et} \\ e \in \text{coimk } f \text{ , } m \in \text{imk } f \Rightarrow (e , m) \in \text{istd } f \end{array}\right) .$$

(La qualification de stricte pour une flèche ayant cette propriété a été introduite par YONEDA.)

PROPOSITION. - <u>Si</u> f <u>est mistricte,</u>

$$\text{imk } f = \text{imzu } f ,$$

$$\text{coimk } f = \text{coimzu } f .$$

Nous désignerons par :

mS la propriété pour une catégorie d'avoir toutes ses flèches mistrictes (SONNER qualifie d'exactes de telles catégories),

S la propriété pour une catégorie d'être <u>quasi-exacte</u> (terminologie de PUPPE et de LEICHT, alors que MITCHELL appelle exacte de telles catégories), c'est-à-dire d'avoir toutes ses flèches strictes,

Z la propriété pour une catégorie d'être "à factorisation", c'est-à-dire telle que, pour toute flèche f , $\text{dec } f \neq \emptyset$,

Zu la propriété pour une catégorie d'être "à factorisation unique", c'est-à-dire telle que, pour toute flèche f , $\text{decu } f \neq \emptyset$.

Enfin, nous désignerons par :

A la propriété pour une catégorie de pouvoir recevoir une structure additive. En d'autres termes, nous dirons que $\mathcal{C}$ a la propriété **A** , lorsqu'il existe $+$ tel que $(\mathcal{C} , +)$ est une catégorie additive, ou, ce qui est équivalent, lorsqu'il existe un foncteur H de $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}$ vers $\underline{ab}$ tel que $\text{ens } H = \mathcal{C}(,)$.

On démontre les propositions suivantes :

PROPOSITIONS.

$$\mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{If} \to \mathrm{K}, \qquad \mathrm{K} \to \mathrm{K}_0 \to \mathrm{nul},$$

$$\mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K} \to \mathrm{Paf}, \qquad \mathrm{B} \to \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{Pf}^*,$$

$$\mathrm{nul} \,\&\, \mathrm{Paf} \to \mathrm{Pf}, \qquad \mathrm{Pa} \to \mathrm{I},$$

$$\mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{Paf} \to \mathrm{K}, \qquad \mathrm{S} \to \mathrm{mS} \to \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* .$$

COROLLAIRE. - $\mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{Pa} \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K} \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{If}$.

PROPOSITION.

$$\begin{array}{ll|ll} \mathrm{Lf} & \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{Paf} & \mathrm{L} & \rightleftarrows \mathrm{P} \,\&\, \mathrm{Pa} \\ & \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K} & & \rightleftarrows \mathrm{P} \,\&\, \mathrm{K} \\ & \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{If} & & \rightleftarrows \mathrm{P} \,\&\, \mathrm{I} , \end{array}$$

$$\mathrm{N} \,\&\, \mathrm{N}^* \,\&\, \mathrm{Z} \to \mathrm{K}_0 , \mathrm{K}_0^* ,$$

$$\mathrm{N} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \to \mathrm{If} .$$

COROLLAIRE. - $\mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{N} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \rightleftarrows \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{N} \,\&\, \mathrm{K} \,\&\, \mathrm{K}_0^*$,

$$\mathrm{N} \,\&\, \mathrm{K} \,\&\, \mathrm{K}_0^* \to \mathrm{Z} .$$

Par définition, une catégorie est <u>additive, au sens de Grothendieck</u>, si elle possède l'une des propriétés équivalentes :

$$\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Pf} \rightleftarrows \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Pf}^* \rightleftarrows \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Bf} .$$

Une catégorie est <u>quasi-exacte</u>, si elle possède l'une des propriétés équivalentes:

$$\mathrm{S} \rightleftarrows \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \,\&\, \mathrm{D} \,\&\, \mathrm{Z} \rightleftarrows \mathrm{N} \,\&\, \mathrm{N}^* \,\&\, \mathrm{Z} .$$

Une catégorie est <u>exacte, au sens de Buchsbaum</u>, si elle possède la propriété $\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{S}$.

Une catégorie est <u>préabélienne</u>, si elle a la propriété :

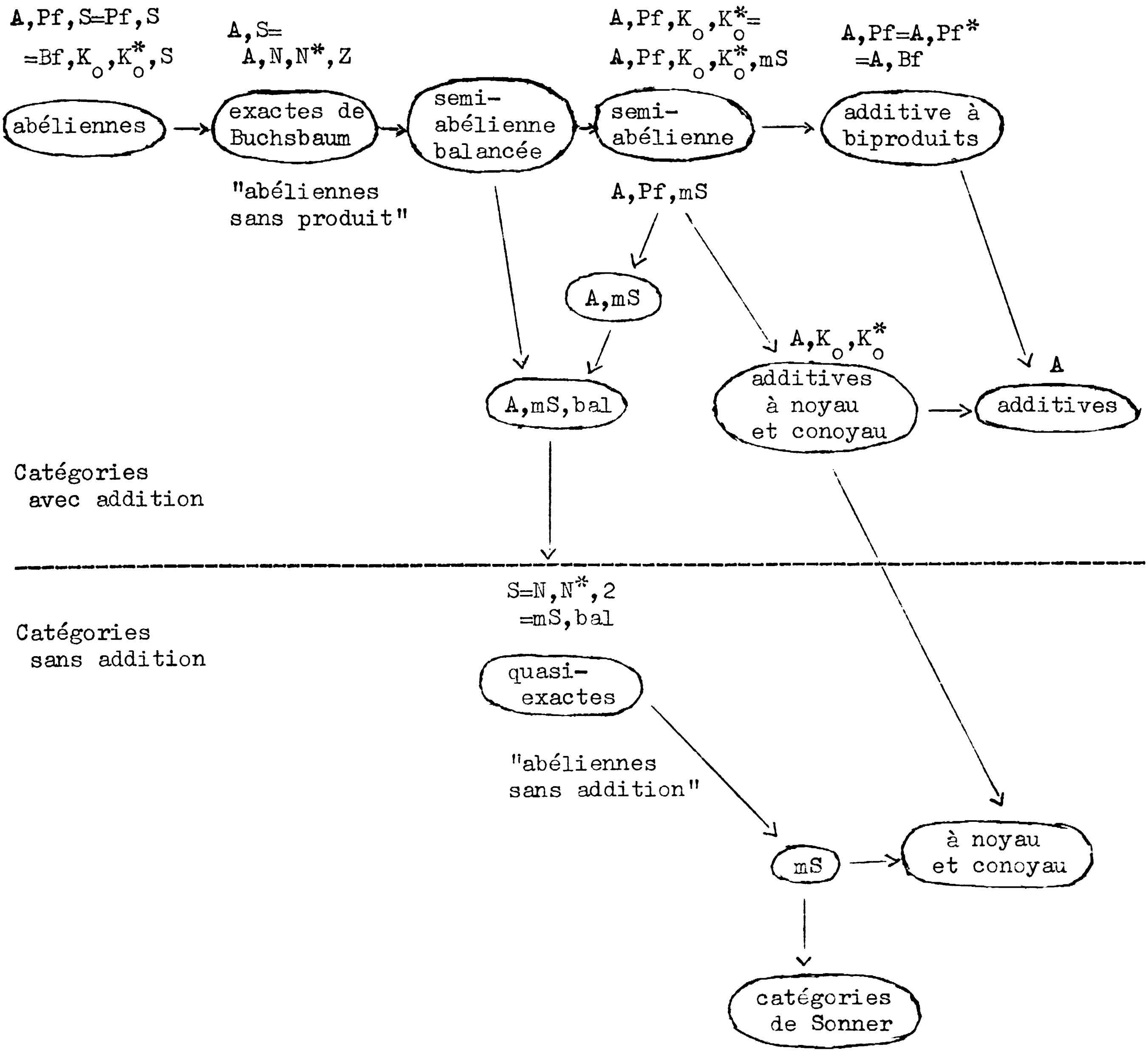
$$\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \,\&\, \mathrm{mS} .$$

Une catégorie sera dite <u>semiabélienne</u>, si elle possède l'une des propriétés équivalentes :

$$\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \rightleftarrows \mathrm{Bf} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \rightleftarrows \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{Pf} \,\&\, \mathrm{K}_0 \,\&\, \mathrm{K}_0^* \,\&\, \mathrm{mS} .$$

Enfin, tout le monde s'accorde pour qualifier d'abélienne une catégorie possédant l'une des propriétés équivalentes :

$$\mathbf{A} \;\&\; \mathrm{Pf} \;\&\; \mathrm{S} \rightleftarrows \mathrm{Pf} \;\&\; \mathrm{S} \rightleftarrows \mathrm{Bf} \;\&\; \mathrm{K}_0 \;\&\; \mathrm{K}_0^* \;\&\; \mathrm{S} \rightleftarrows \mathrm{Pf} \;\&\; \mathrm{K} \;\&\; \mathrm{K}_0^* \;\&\; \mathrm{N} \;\&\; \mathrm{N}^*$$
$$\rightleftarrows \mathrm{Pf}^* \;\&\; \mathrm{K}_0 \;\&\; \mathrm{K}_0^* \;\&\; \mathrm{N} \;\&\; \mathrm{N}^* \rightleftarrows \mathrm{Lf} \;\&\; \mathrm{Lf}^* \;\&\; \mathrm{N} \;\&\; \mathrm{N}^* \rightleftarrows \mathrm{Pf}^* \;\&\; \mathrm{S} \,.$$



2e partie

Analyse d'un mémoire de DROZD [2]

Ce mémoire expose les modifications techniques à apporter pour que la machinerie homologique sur des catégories abéliennes [3] puisse encore fonctionner dans des catégories semiabéliennes.

L'utilité d'une telle généralisation provient de l'existence, dans divers domaines de l'algèbre (et à l'intérieur de l'algèbre homologique elle-même), de catégories non abéliennes, mais semiabéliennes. Ainsi :

- Les modules gradués sur un anneau gradué constituent une catégorie semiabélienne contenant assez d'objets injectifs et projectifs ;
- Les anneaux filtrés sur un anneau filtré constituent une catégorie semiabélienne contenant assez d'objets injectifs et projectifs ;
- La catégorie de représentation au sens de ROJTER [4] est un couple de catégories semiabéliennes contenant assez d'objets injectifs et projectifs, avec une dualité fixée entre elles.

(Texte reçu le 10 décembre 1970)

Jacques RIGUET
Prof. Fac. Sc. Limoges
6 rue des Ecoles
75 - PARIS 05

---

(2) DROZD (Ju. A.). - Algèbres homologiques dans les catégories semiabéliennes [en russe, avec sommaire en anglais], Algebra i matematičeskaja Logika, p. 37-43. - Kiev, Izdat. Kiev. Univ., 1966.

(3) qui fait l'objet des chapitres II à VI de :
CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

(4) ROJTER (A. V.). - Sur une catégorie de représentation [en russe], Ukrainskij mat. Ž., t. 15, 1963, p. 448-452.