

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

LADISLAV BERAN

Treillis sous-modulaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 13, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TREILLIS SOUS-MODULAIRES

par Ladislav BERAN

1. Introduction.

La notion de treillis sous-modulaire est apparue en théorie des treillis pour la première fois dans un article de TAMASCHKE [6]. La définition est inspirée de l'étude des treillis des sous-groupes sous-normaux d'un groupe G ayant des séries de composition de longueurs finies. Nous noterons ce treillis $\text{sn } G$.

Nous utiliserons la notation suivante : On appelle quotient a/b , le couple de deux éléments d'un treillis tels que $a \geq b$. Le quotient a/b , $a \neq b$, est dit premier si a couvre b , c'est-à-dire

$$a \geq c > b \quad \text{implique} \quad c = a ;$$

dans ce cas, nous écrirons $a > b$. Nous désignerons l'ensemble de tous les quotients premiers d'un treillis L par K_L . Si $b = a \cap d$ et $c = a \cup d$, les deux quotients a/b , c/d vérifiant cette condition sont dits transposés. S'il existe une suite finie de quotients a_j/b_j , $j = 0, 1, \dots, m$, telle que :

- 1° $a/b = a_0/b_0$ et $c/d = a_m/b_m$,
- 2° a_j/b_j et a_{j+1}/b_{j+1} soient transposés,

les quotients a/b , c/d sont dits projectifs, et on écrit $a/b \sim c/d$. S'il existe une suite finie de quotients premiers telle que les conditions 1° et 2° soient vérifiées, les quotients premiers a/b , c/d sont dits π -projectifs, et on écrit $a/b \pi c/d$. Il est clair que la π -projectivité est une relation d'équivalence sur K_L . On désigne par $\overline{a/b}$ la classe mod π déterminée par $a/b \pi K_L$, et par K_L/π l'ensemble de toutes ces classes.

1.1. Définition. - Un treillis T est dit sous-modulaire, s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

- (S) $(x \cup y > y \text{ et } x \geq p > q \geq x \cap y) \implies p/q \pi (x \cup y)/y$,
- ($\bar{S}$) $(x > x \cap y \text{ et } x \cup y \geq p > q \geq y) \implies p/q \pi x/(x \cap y)$.

Pour l'application des méthodes de la théorie des treillis à celle des groupes, le résultat suivant de TAMASCHKE [7] est important.

1.2. THÉOREME. - Le treillis des sous-groupes sous-normaux d'un groupe possédant des suites de composition finies est sous-modulaire.

La réciproque n'est pas vraie.

Afin de faciliter l'énoncé des théorèmes, faisons la convention suivante : Nous désignerons par L (ou L avec des indices), un treillis dans lequel tout segment satisfait aux conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante.

La notion de treillis sous-modulaire est une généralisation immédiate de treillis modulaire et relativement complété, au sens du théorème suivant :

1.3. THÉOREME. - Tout treillis modulaire (resp. relativement complété L) est sous-modulaire.

La réciproque de ce théorème est fausse.

1.4. Remarque. - TAMASCHKE a utilisé dans sa définition des treillis sous-modulaires le mot projectif au sens de notre π -projectif, que nous introduisons pour éviter des confusions avec la définition de projectivité au sens de BIRKHOFF.

Les treillis sous-modulaires ont été étudiés aussi par IQBALUNNISA [4]. Notons F l'ensemble de tous les "polynômes" $f(y_0, y_1, \dots, y_n)$ en y_i et $0, n$.

1.5. Définition. - D'après IQBALUNNISA, un treillis T est dit sous-modulaire, si la condition suivante est vérifiée :

$\forall a, b \in T, a \leq b, \forall f \in F, \exists m \geq 0$ tel que le segment $K = [c, d]$, déterminé par $f(a, x_1, \dots, x_n)$ et $f(b, x_1, \dots, x_n)$, soit de la forme

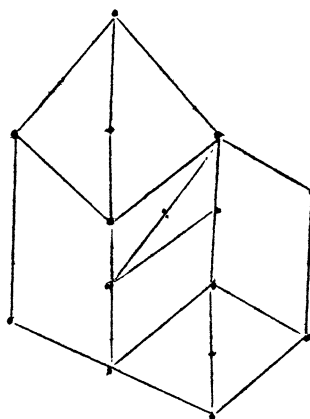
$$c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_m = d,$$

et pour chacun des segments $[c_i, c_{i+1}]$, on ait

$$c_{i+1}/c_i \sim b_i^*/a_i^*, \quad a \leq a_i^* \leq b_i^* \leq b.$$

On peut montrer que cette définition et celle de TAMASCHKE ne sont pas équivalentes, même pour des treillis ayant un nombre fini d'éléments.

Envisageons par exemple le diagramme suivant :



Il est facile de voir que :

- (1) $\text{card } K_L/\pi = 2$,
- (2) tous les quotients premiers sont projectifs.

Le treillis envisagé satisfait à la définition (1.5), mais ne satisfait pas à la définition (1.1). Remarquons que, par conséquent, le théorème 4 de [4] ne prouve pas l'équivalence des définitions d'IQBALUNNISA (1.5) et de TAMASCHKE (1.1).

Désormais, nous entendons par treillis sous-modulaires, les treillis vérifiant la définition (1.1).

Les résultats suivants seront utilisés ([6], Satz 1, et [6], Satz 5).

1.6. THÉOREME. - Le treillis L est sous-modulaire si, et seulement si, pour tout ensemble $B \subseteq K_L/\pi$, il existe une congruence κ_B telle que

$$(a > b \text{ et } a \equiv b \pmod{\kappa_B}) \iff \overline{a/b} \in B .$$

1.7. THÉOREME. - Un treillis sous-modulaire L est distributif si, et seulement si, l'ensemble

$$\underline{A} = \{p \in K_L/\pi \mid \exists a/b, \exists c/d, \overline{a/b} = \overline{c/d} = p \text{ et } b \geq c\}$$

est vide.

2. Structure et constructions des treillis sous-modulaires.

En général, les sous-treillis et les images homomorphes d'un treillis sous-modulaire ne sont pas sous-modulaires, mais l'image homomorphe d'un treillis sous-modulaire L est déjà nécessairement un treillis sous-modulaire ([6]). Pour les produits sous-directs, on peut démontrer le théorème suivant :

2.1. THÉOREME. - Tout produit sous-direct L de treillis sous-modulaires L_λ , $\lambda \in \Lambda$, est un treillis sous-modulaire.

Démonstration. - Soient κ_λ les congruences telles que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda = E \quad \text{et} \quad L/\kappa_\lambda \cong L_\lambda .$$

Supposons que $u \cap v < v$ et $u \cup v \geq p > q \geq u$, et soit $\kappa = \kappa_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \Lambda$, une des congruences ayant la propriété $p \not\equiv q \pmod{\kappa}$. Désignons par $\bar{L}$ le treillis $L/\kappa = L/\kappa_{\lambda_0}$. Comme le treillis $\bar{L}$ satisfait à la condition $(\bar{S})$ et qu'on a

$$\bar{u} \cap \bar{v} < \bar{v} \quad \text{et} \quad \bar{u} \cup \bar{v} \geq \bar{p} > \bar{q} \geq \bar{u} ,$$

nous obtenons

$$\bar{p}/\bar{q} \pi_{\bar{L}} \bar{v}/(\bar{u} \cap \bar{v}) ,$$

et il existe donc une suite

$$\bar{a}_j/\bar{b}_j \in K_{\bar{L}} , \quad j = 0 , 1 , \dots , m ,$$

telle que :

- 1° $a_0 = v$, $b_0 = u \cap v$, $\bar{a}_m/\bar{b}_m = \bar{p}/\bar{q}$,
- 2° $\bar{a}_j/\bar{b}_j$ et $\bar{a}_{j+1}/\bar{b}_{j+1}$ soient transposés.

Démontrons d'abord la proposition suivante :

(2.1.1) Si $\bar{s} < \bar{t}$, $\bar{k} < \bar{l}$, $k < l$, et

$$\bar{s} \cup \bar{l} = \bar{t} , \quad \bar{s} \cap \bar{l} = \bar{k} ,$$

alors il existe s^* , t^* tels que $\overline{s^*} = \bar{s}$, $\overline{t^*} = \bar{t}$, $s^* < t^*$, et

$$s^* \cup l = t^* , \quad s^* \cap l = k .$$

Preuve de (2.1.1). - On peut supposer que $\bar{s} \parallel \bar{l}$. Posons $s_1 = s \cup k$ et $t^* = s_1 \cup l$. On a $s_1 \parallel l$, et pour chaque élément s^* tel que $s_1 \leq s^* < t^*$, on voit sans peine que $\overline{s^*} = \bar{s}_1$. Nous avons donc

$$\overline{s^*} = \bar{s}_1 = \bar{s} \cup \bar{k} = \bar{s} ,$$

et

$$\overline{t^*} = \bar{s}_1 \cup \bar{l} = \bar{s} \cup \bar{l} = \bar{t} .$$

Enfin on a

$$t^* \geq s^* \cup l \geq s_1 \cup l = t^* ,$$

d'où $t^* = s^* \cup l$. De même, $k = s^* \cap l$.

Ce qui démontre la proposition.

En utilisant la proposition (2.1.1) et la proposition duale, on en déduit qu'il existe $a_{m-1}^*/b_{m-1}^* \in K_L$ tel que

$$a_{m-1}^*/b_{m-1}^* \pi v/(u \cap v)$$

et

$$\overline{a_{m-1}^*/b_{m-1}^*} = \overline{a_{m-1}}/\overline{b_{m-1}} \quad .$$

Pour achever la démonstration, il suffira d'établir que :

$$(2.1.2) \quad a_{m-1}^*/b_{m-1}^* \pi p/q \quad .$$

Or, d'après (2.1.2), on aura

$$v/(u \cap v) \pi a_{m-1}^*/b_{m-1}^* \pi p/q \quad ,$$

et donc $(\overline{S})$ sera valable dans L . Par dualité, la condition $(\underline{S})$ sera aussi valable.

Tout revient à montrer qu'on a :

(2.1.3) Soit

$$\overline{b} < \overline{a} \quad , \quad b < a \quad ,$$

$$\overline{q} < \overline{p} \quad , \quad q < p \quad ,$$

et les quotients $\overline{a}/\overline{b}$ et $\overline{p}/\overline{q}$ transposés. Alors $a/b \pi p/q$.

Démonstration de (2.1.3). - Il suffit visiblement de considérer le cas $\overline{p} \cap \overline{b} = \overline{q}$, $\overline{p} \cup \overline{b} = \overline{a}$, et $p \parallel b$. Choisissons x_1, x_2 tels que

$$b \cup q \leq x_1 < a \cup q \quad ,$$

$$q \cap a < x_2 \leq p \cap a \quad .$$

Il en résulte que

$$\overline{x}_1 = \overline{b} \quad , \quad \overline{x}_2 = \overline{p} \quad , \quad \text{et} \quad x_1 \parallel x_2 \quad ,$$

d'où on voit que les quotients

$$a/b \text{ et } (a \cup q)/x_1 \quad , \quad p/q \text{ et } x_2/(q \cap a) \quad , \quad x_2/(q \cap a) \text{ et } (a \cup q)/x_1 \quad ,$$

sont transposés. De là, la relation $a/b \pi p/q$ découle facilement.

Ce théorème admet des conséquences assez importantes.

2.2. Définition. - Un treillis sous-modulaire est dit parfaitement sous-modulaire, si $\text{card } K_L/\pi = 1$.

Il est évident que tous les treillis parfaitement sous-modulaires sont sous-directement indécomposables.

Du théorème (2.1), on peut déduire le théorème suivant :

2.3. THÉORÈME. - La classe des treillis sous-modulaires de longueur finie, coïncide avec la classe des produits sous-directs d'un nombre fini de facteurs parfaitement sous-modulaires et de longueur finie.

De la démonstration du théorème (2.1) résulte la même conclusion pour les treillis satisfaisant à la condition de quotients premiers, c'est-à-dire à la condition

$$(C_1) \quad u \cap v < u \quad \text{implique} \quad v < u \cup v.$$

Mais on peut démontrer ce résultat plus général :

2.4. THÉORÈME. - Si tout treillis T_λ , $\lambda \in \Lambda$, satisfait à la condition de quotients premiers, tout produit sous-direct de ces treillis satisfait à cette condition.

2.5. COROLLAIRE. - Si tout treillis L_i , $i = 1, 2, \dots, m$, est semi-modulaire et de longueur finie, il en est de même de tout produit sous-direct d'un nombre fini de facteurs L_i .

Le corollaire résulte du théorème (2.4) et de [5] (corollaire du théorème 51).

Par un treillis semi-modulaire, nous comprenons un treillis satisfaisant à la condition (cf. [3]) :

(S₁) Les relations $y \cap z < x < z < x \cup y$ impliquent l'existence de t tel que l'on ait

$$y \cap z < t \leq y \quad \text{et} \quad x = (x \cup t) \cap z.$$

Démonstration du théorème (2.4). - Soit T le produit sous-direct des treillis T_λ , $T_\lambda \cong T/\kappa_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda = E$. Soit $u \cap v < v$. Nous allons distinguer les deux cas suivants :

Cas I : La congruence κ_λ , $\lambda \in \Lambda$, est telle que $u \cap v \not\equiv v \pmod{\kappa_\lambda}$. Il est clair que $u \leq x < u \cup v$ entraîne $\bar{u} \leq \bar{x} \leq \bar{u} \cup \bar{v}$, d'autre part le treillis T/κ_λ vérifie la condition de quotients premiers. On a donc $u \equiv x$ ou $x \equiv u \cup v$. Mais $x \equiv u \cup v$ impliquerait

$$u \cap v \leq v \cap x \equiv (u \cup v) \cap v = v .$$

On aurait donc $v = v \cap x$ ou $u \cap v = v \cap x$, c'est-à-dire $x \geq u \cup v$ ou $u \cap v = v \cap x \equiv v$, contrairement au choix de x , ou contrairement à la relation $\bar{u} \cap \bar{v} < \bar{v}$. Par suite $u \equiv x \pmod{\kappa_\lambda}$.

Cas II : La congruence κ_λ , $\lambda \in \Lambda$, est telle que $u \cap v \equiv v \pmod{\kappa_\lambda}$. Donc $u \equiv u \cup v$, et $u \equiv x \pmod{\kappa_\lambda}$.

L'examen de ces deux cas prouve que :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall u \leq x < u \cup v, \quad x \equiv u \pmod{\kappa_\lambda} .$$

Comme $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda = E$, on a $x = u$. C'est ce qu'affirme le théorème.

Le théorème suivant montre la complication de structure des treillis sous-modulaires déjà dans le cas des treillis parfaitement sous-modulaires :

2.6. THÉORÈME. - Tout treillis T peut être plongé dans un treillis S parfaitement sous-modulaire relativement atomique.

Nous disons qu'un treillis est relativement atomique (au sens de G. SZÁSZ [5], p. 158), s'il vérifie cette condition :

(C) Tout segment $[a, b]$ est atomique.

Démonstration du théorème (2.6). - Prouvons d'abord l'assertion suivante :

(2.6.1) Si $\text{card } M \geq 2$, alors le treillis $z(M)$ des partitions de l'ensemble M est tel que $\text{card } K_{z(M)}/\pi = 1$.

Soient z_1, z_2 deux partitions telles que $z_1 < z_2$. Une des classes de la partition z_2 , disons M_1'' , est la réunion $M_0' \cup M_1'$ de deux classes de la partition z_1 , et toutes les autres classes sont égales. Choisissons $m_0 \in M_0'$ et $m_1 \in M_1'$, et déterminons z_3 comme la partition où toutes les classes ont un seul élément sauf la classe (m_0, m_1) . Nous utiliserons la notation $z_3 = (m_0, m_1)$ en omettant les classes ayant un seul élément. Nous désignerons par i (resp. v) l'élément universel (resp. l'élément nul) dans le treillis $z(M)$. Il est clair que :

$$(a) \quad z_2/z_1 \pi z_3/v .$$

Soit $v < z_4$ et $v < z_5$, $z_4 = (m, p)$, $z_5 = (m, q)$, $z_6 = (M \setminus m)$. Alors on a :

$$(b) \quad i/z_6 \pi z_4/v \text{ et } i/z_6 \pi z_5/v .$$

Soit enfin

$$v < z_7 = (a, b),$$

$$v < z_8 = (c, d).$$

Notons $z_9 = (a, c) > v$. Vu l'assertion (b), il existe z_6^* (resp. z_6^{**}) tel que

$$i/z_6^* \pi z_7/v \quad \text{et} \quad i/z_6^* \pi z_9/v$$

(resp.

$$i/z_6^{**} \pi z_8/v \quad \text{et} \quad i/z_6^{**} \pi z_9/v).$$

Donc :

$$(c) \quad z_7/v \pi z_8/v.$$

D'après (a), (b), (c), on vérifie facilement que tous les quotients premiers dans $z(M)$ sont π -projectifs. Ce qui démontre (2.6.1).

D'après le théorème de WHITMAN, tout treillis est isomorphiquement plongeable dans le treillis des partitions d'un certain ensemble. D'où le théorème.

3. Principe de π -stabilité dans les treillis sous-modulaires.

Désignons par $\underline{\underline{A}}'$ le complément de l'ensemble $\underline{\underline{A}}$ du théorème (1.7),

$$\underline{\underline{A}}' = K_L/\pi \setminus \underline{\underline{A}},$$

et considérons, en utilisant le théorème (1.6), deux congruences $\kappa_{\underline{\underline{A}}}$ et $\kappa_{\underline{\underline{A}}'}$, telles que

$$(a > b, \quad a \equiv b \pmod{\kappa_{\underline{\underline{A}}}}) \iff \bar{a}/\bar{b} \in \underline{\underline{A}},$$

$$(a > b, \quad a \equiv b \pmod{\kappa_{\underline{\underline{A}}'}}) \iff \bar{a}/\bar{b} \in \underline{\underline{A}}'.$$

Avec ces définitions, nous sommes capables d'introduire le "reflet" d'un treillis sous-modulaire, la notion fondamentale pour la caractérisation de distributivité, de modularité, et d'autres propriétés des treillis sous-modulaires. Les théorèmes qui suivront après les définitions nécessaires présentent donc une solution du problème que m'a posé Vl. KORÁNEK : Caractériser les treillis sn G possédant des propriétés spéciales.

3.1. Définition. - On appelle reflet d'un treillis sous-modulaire L , le treillis $L/\kappa_{\underline{\underline{A}}'}$, et l'on note $Ref L$. De même, on appelle coreflet de L , le treillis $L/\kappa_{\underline{\underline{A}}}$.

On vérifie facilement le lemme suivant :

3.2. LEMME.

$$\begin{aligned} \text{Ref}(\text{Ref } L) &\cong \text{Ref } L, & \text{Ref}(\text{Coref } L) &\cong \underline{1}, \\ \text{Coref}(\text{Ref } L) &\cong \underline{1}, & \text{Coref}(\text{Coref } L) &\cong \text{Coref } L, \end{aligned}$$

1 étant le treillis ayant un seul élément.

3.3. Définition. - Une classe C des treillis est dite π -stable si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

$$(L \in C \text{ et } L \text{ est sous-modulaire}) \iff \text{Ref } L \in C.$$

Autrement dit : Nous allons voir que la classe des treillis semi-modulaires possédant un élément universel est π -stable. Cela signifie que, pour un treillis sous-modulaire L ayant un élément universel, on peut déjà déduire de la semi-modularité de l'image homomorphe $\text{Ref } L$, qu'il en est de même du treillis L .

Rappelons les définitions de deux classes de treillis introduites par IQBALJUNNISA [4].

3.4. Définition. - On appelle treillis supermodulaire (supermodular lattice) d'ordre $n \geq 3$, un treillis vérifiant pour tous les éléments $x, y_1, \dots, y_n \in T$ la relation

$$(I) \quad \bigcap_{i=1}^n (x \cup y_i) = x \cup \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n z_{ij} \right),$$

$z_{ij} = x \cup y_j$ pour $i = j$, et $z_{ij} = y_j$ pour $i \neq j$.

On appelle treillis légèrement modulaire (slightly modular lattice) d'ordre $n \geq 2$, un treillis T vérifiant pour tous les éléments $x, y_1, \dots, y_n \in T$ l'identité

$$(II) \quad \bigcap_{i=1}^n (x \cup y_i) = x \cup \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n z_{ij} \right),$$

$z_{ij} = y_j$ pour $j = i$, et $z_{ij} = x \cup y_j$ pour $i \neq j$.

On peut démontrer le théorème suivant :

3.5. THÉORÈME. - La classe des treillis :

- (i) distributifs, est π -stable,
- (ii) modulaires, est π -stable,
- (iii) semi-modulaires possédant un élément universel, est π -stable,
- (iv) supermodulaires, est π -stable,

- (v) légèrement modulaires, est π -stable,
 (vi) relativement complémentés, n'est pas π -stable.

Démonstration du théorème (3.5).

(i) et (ii) : Pour $a \geq b$, on définit

$$\Pi(a, b) = \{q \in K_L/\pi \mid \exists p < q, b \geq q > p \geq a, \overline{q/p} = q\}$$

(cf. [8]). Supposons que, dans un treillis sous-modulaire L , soit vérifiée la relation suivante :

$$g = (a \cup b) \cap (a \cup c) > a \cup (b \cap c) = d.$$

On a

$$\begin{aligned} \Pi(g, d) &\subseteq \Pi(d \cup c, d) = \Pi(c, c \cap d) \subseteq \Pi(c, b \cap c) \\ &= \Pi(c, g \cap c) \cup \Pi(g \cap c, b \cap c) \\ &= \Pi(a \cup c, g) \cup \Pi((a \cup b) \cap c, b \cap c) \\ &\subseteq \Pi(a \cup c, g) \cup \Pi(a \cup b, b) \\ &= \Pi(a \cup c, g) \cup \Pi(a, a \cap b). \end{aligned}$$

De la relation $a \leq d < g$, on déduit

$$\Pi(g, d) \subseteq \underline{A},$$

et pour les images $\tilde{g}, \tilde{d}$ des éléments g, d dans le treillis $\tilde{L} = \text{Ref } L$, on a donc $\tilde{g} > \tilde{d}$.

En conséquence, le reflet d'un treillis non distributif (resp. non modulaire) n'est pas distributif (resp. modulaire).

La réciproque est évidente.

Remarque. - En utilisant le théorème (1.7), on vérifie sans peine que le reflet d'un treillis sous-modulaire L est le treillis à un élément si, et seulement si, L est distributif.

(iii) :

1° Soit L semi-modulaire et $1 \in L$. Par suite L satisfait à la condition de chaîne ascendante, et d'après [2] est le treillis $\text{Ref } L$ semi-modulaire.

2° Soit L un treillis qui n'est pas semi-modulaire. Donc

$$\exists x, y, z, y \cap z < x < z < x \cup y, \quad \forall y \cap z < t \leq y, x < z \cap (x \cup t) \leq z.$$

On a

$$\begin{aligned}\Pi(x \cup t, z \cap (x \cup t)) &= \Pi((z \cap (x \cup t)) \cup t, z \cap (x \cup t)) \\ &= \Pi(t, y \cap z) = \Pi(t, t \cap x) = \Pi(x \cup t, x),\end{aligned}$$

d'où

$$\Pi(z \cap (x \cup t), x) \subseteq \underline{A},$$

et

$$\underline{A} \cap \Pi(t, y \cap z) \neq \emptyset.$$

De même

$$\Pi(x, y \cap z) = \Pi(x \cup t, t) = \Pi((x \cup t) \cap z, y \cap z),$$

d'où

$$\Pi(x, y \cap z) \cap \underline{A} \neq \emptyset.$$

Dans le treillis $\tilde{L} = \text{Ref } L$, on a donc les relations

$$\tilde{y} \cap \tilde{z} < \tilde{x} < \tilde{z} < \tilde{x} \cup \tilde{y},$$

et

$$\tilde{x} < \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}) \leq \tilde{z}.$$

Si le treillis $\text{Ref } L$ était semi-modulaire, il existerait un élément $\tilde{t}^* \in \tilde{L}$ tel que

$$\tilde{y} \cap \tilde{z} < \tilde{t}^* \leq \tilde{y} \quad \text{et} \quad \tilde{x} = \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}^*).$$

Pour $t = y \cap (t^* \cup (y \cap z))$, on aurait donc

$$y \cap z < t \leq y, \quad \tilde{t} = \tilde{t}^*,$$

et

$$\tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}) = \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}^*) = \tilde{x},$$

ce qui est contradictoire avec

$$\tilde{x} < \tilde{z} \cap (\tilde{x} \cup \tilde{t}).$$

Le treillis $\text{Ref } L$ n'est donc pas semi-modulaire.

(iv) : Soit L un treillis sous-modulaire qui n'est pas supermodulaire. Si L n'est pas modulaire, alors $\text{Ref } L$ n'est pas modulaire, et $\text{Ref } L$ n'est pas super-modulaire. Supposons L modulaire ; alors il existe $x_1, y_1, \dots, y_n$ tels que

$$g = \bigcap_{i=1}^n (x \cup y_i) > x \cup \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n z_{ij} \right) = d.$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

(iv.1) Quel que soit $q/p \in K_L$, $y_1 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n \leq p < q \leq y_n$, il existe s, t tels que :

- 1° $t/s \pi q/p$,
- 2° $s \geq g$ ou $t \leq d$.

En effet, définissons par récurrence

$$\begin{aligned} r_0 &= y_n, \\ r_j &= r_{j-1} \cap y_j, \quad j = 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

et

$$r_{n-1} = r_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}).$$

En utilisant la modularité du treillis L , on obtient

$$(x \cup y_j) \cap (y_j \cup r_{j-1}) = y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})].$$

On a

$$\begin{aligned} \Pi(r_{j-1}, r_j) &= \Pi(y_j \cup r_{j-1}, y_j) = \Pi(y_j \cup r_{j-1}, y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]) \\ &\quad \cup \Pi(y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})], y_j). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} (y_j \cup r_{j-1})/[y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]] &\pi (y_j \cup r_{j-1})/((x \cup y_j) \cap (y_j \cup r_{j-1})) \\ &\pi ((x \cup y_j) \cup (y_j \cup r_{j-1}))/ (x \cup y_j), \end{aligned}$$

et qu'on a

$$[y_j \cup [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]]/y_j \pi [x \cap (y_j \cup r_{j-1})]/(y_j \cap x \cap (y_j \cup r_{j-1})),$$

on voit que

$$\Pi(r_{j-1}, r_j) = \Pi(x \cup y_j \cup r_{j-1}, x \cup y_j) \cup \Pi(x \cap (y_j \cup r_{j-1}), y_j \cap x).$$

Ceci entraîne aussitôt :

$$\forall p < q, \quad r_j \leq p < q \leq r_{j-1}, \quad \exists s < t,$$

tels que $t/s \pi q/p$, et $s \geq g$ (le cas où $\bar{t}/s \in \Pi(x \cup y_j \cup r_{j-1}, x \cup y_j)$), ou $t \leq d$ (le cas où $\bar{t}/s \in \Pi(x \cap (y_j \cup r_{j-1}), y_j \cap x)$). On a

$$r_{n-2}/r_{n-1} = r_{n-2}/(r_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1})) \pi (r_{n-2} \cup (x \cup y_{n-1}))/ (x \cup y_{n-1}),$$

et donc

$$\Pi(r_{n-2}, r_{n-1}) = \Pi(r_{n-1} \cup (x \cup y_{n-1}), x \cup y_{n-1}).$$

Ceci donne, compte tenu de ce que $x \cup y_{n-1} \geq g$, la même conclusion pour le quotient r_{n-2}/r_{n-1} . Finalement

$$\prod(y_n, y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n) = \prod(r_0, r_n) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \prod(r_{j-1}, r_j),$$

d'où (iv.1).

On voit que

$$\begin{aligned} \prod(g, d) &\subseteq \prod(y_n \cup d, d) = \prod(y_n, y_n \cap d) \\ &\subseteq \prod(y_n, y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_{n-2} \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n). \end{aligned}$$

Vu l'assertion (iv.1), on a

$$\prod(g, d) \subseteq \underline{\underline{A}},$$

par suite

$$\tilde{g} > \tilde{d},$$

et le treillis $\text{Ref } L$ n'est pas supermodulaire.

(v) : Soit L un treillis sous-modulaire qui n'est pas légèrement modulaire. Donc, il existe $x, y_1, \dots, y_n$ vérifiant la relation

$$g = \bigcap_{i=1}^n (x \cup y_i) > x \cup \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n z_{ij} \right) = d.$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

(v.1) Quel que soit $q/p \in K_L$, $(x \cup y_1) \cap (x \cup y_2) \cap \dots \cap (x \cup y_n) \cap y_n \leq p < q \leq y_n$, il existe s, t tels que

$$t/s \pi q/p \quad \text{et} \quad s \geq g.$$

Posons par récurrence

$$\begin{aligned} \rho_0 &= y_n, \\ \rho_j &= \rho_{j-1} \cap (x \cup y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

On a

$$\rho_{j-1}/\rho_j = \rho_{j-1}/(\rho_{j-1} \cap (x \cup y_j)) \pi ((x \cup y_j) \cup \rho_{j-1})/(x \cup y_j),$$

donc

$$\prod(\rho_{j-1}, \rho_j) = \prod(x \cup y_j \cup \rho_{j-1}, x \cup y_j),$$

d'où la proposition (v.1).

D'après la proposition (v.1) appliquée aux relations

$$\begin{aligned} \Pi(g, d) &\subseteq \Pi(y_n \cup p, p) = \Pi(y_n, y_n \cap p) \\ &\subseteq \Pi(y_n, (x \cup y_1) \cap (x \cup y_2) \cap \dots \cap (x \cup y_{n-1}) \cap y_n), \end{aligned}$$

on voit que

$$\Pi(g, d) \subseteq \underline{\underline{A}}.$$

Il en résulte que $\text{Ref } L$ n'est pas légèrement modulaire.

C. Q. F. D.

De (3.5), découle immédiatement cette "traduction" en théorie des groupes :

3.6. THÉORÈME. - Soit G un groupe ayant une suite de composition de longueur finie, et soit C une des classes (i)-(v). Pour que $\text{sn } G$ soit un treillis de classe C , il faut et il suffit que

$$\text{Ref } G = \text{Ref}(\text{sn } G) \in C.$$

Passons au cas général. On a le lemme suivant :

3.7. LEMME. - Si C est une classe primitive de treillis qui n'est pas absolument dégénérée, tout treillis distributif appartient à cette classe.

Pour la démonstration du lemme, il suffit de démontrer l'assertion suivante :

Soit $\mathcal{O}$ la classe primitive de treillis distributifs. Les relations identiques

$$(1) \quad w_\lambda = w'_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda,$$

sont des conséquences de la distributivité, ou la classe primitive de treillis distributifs vérifiant les relations (1) est absolument dégénérée.

Preuve. - Notons $\mathcal{U}$ la classe primitive de treillis distributifs vérifiant les relations (1), et supposons que $\mathcal{U}$ ne soit pas absolument dégénérée. Désignons par $F_{\mathcal{U}}$ le treillis libre de la classe $\mathcal{U}$ avec l'ensemble $\{x_\mu\}_{\mu \in M}$ des générateurs libres. Soit

$$(2) \quad w_{\lambda_0} = w'_{\lambda_0}, \quad \lambda_0 \in \Lambda,$$

une des relations identiques.

$F_{\mathcal{U}}$ étant distributif, il résulte de [1] (p. 60, lemma 3) que la relation (2) est équivalente à une relation de la forme

$$(3) \quad \bigcup_{h=1}^r \left[\bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)} \right] = \bigcup_{h'=1}^{r'} \left[\bigcap_{k=1}^{n'(h')} x_{i'(h',k)} \right].$$

On a

$$(4) \quad (x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p \geq x_{i_1} \cap x_{i_2} \cap \dots \cap x_{i_q}, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1) \\ \Rightarrow (\forall 1 \leq j \leq p, \exists i_k, x_j = x_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq q).$$

En effet, supposons que x_1 ne soit pas un des éléments x_{i_k} . Choisissons $v, w \in F_{\mathcal{A}}$ tels que $v < w$, et posons

$$x_1 = v, \quad x_2 = \dots = x_p = x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_q} = w.$$

Il en résulte

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p = v \geq w = x_{i_1} \cap \dots \cap x_{i_q} > v.$$

Cette contradiction montre que l'assertion (4) est vraie.

De même, on a :

(5) Quel que soit h , $h \geq 1$, la relation

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p \cap \left\{ \bigcup_{\ell=1}^h \bigcap_{d=1}^{f(\ell)} x_{i(\ell,d)} \right\},$$

où

$$\forall \ell = 1, \dots, h, \quad \forall d = 1, \dots, f(\ell), \quad i(\ell, d) \notin \{1, 2, \dots, p\},$$

n'est pas valable dans $F_{\mathcal{A}}$.

Enfin nous avons :

(6) L'élément $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p$ est $\cup$ -irréductible.

Sinon, on pourrait l'exprimer sous la forme

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p = \bigcup_{\bar{\ell}=1}^{\bar{h}} \bigcap_{\bar{d}=1}^{\bar{f}(\bar{\ell})} x_{\bar{i}(\bar{\ell}, \bar{d})},$$

et d'après (4),

$$\forall \bar{\ell}, \quad \bigcap_{\bar{d}=1}^{\bar{f}(\bar{\ell})} x_{\bar{i}(\bar{\ell}, \bar{d})} = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p \cap (x_{j_1} \cap x_{j_2} \cap \dots \cap x_{j_b}),$$

$$b \geq 0, \quad j_i = j_i(i, \bar{\ell}),$$

où

$$\forall 1 \leq a \leq b, \quad j_a \notin \{1, 2, \dots, p\}.$$

Mais $F_{\mathcal{A}}$ étant distributif, on obtiendrait

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_p \cap \left\{ \bigcup_{\ell=1}^h \bigcap_{d=1}^{f(\ell)} x_{i(\ell,d)} \right\} ,$$

où

$$\forall \ell = 1, \dots, h, \quad \forall d = 1, \dots, f(\ell), \quad i(\ell, d) \notin \{1, 2, \dots, p\} ,$$

en contradiction avec (5).

Comme $F_{\mathcal{A}}$ est distributif, et que tout élément de la forme $\bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)}$ est $\cup$ -irréductible, on en déduit, d'après [1] (p. 58, corollary), que, après une éventuelle permutation des indices, (3) est équivalent aux relations

$$r = r' ,$$

et

$$\forall h, \quad \exists h', \quad \bigcap_{k=1}^{n(h)} x_{i(h,k)} = \bigcap_{k=1}^{n'(h')} x_{i'(h',k)} .$$

Ces relations sont équivalentes, d'après (4), aux relations de la forme

$$x_{\kappa} = x_{\kappa} , \quad \kappa \in K .$$

La distributivité du treillis $F_{\mathcal{A}}$ entraîne, par conséquent, la relation (2).

Le lemme est démontré.

Ce lemme permet d'établir le théorème généralisant le théorème (3.5) :

3.8. THÉOREME. - Toute classe primitive de treillis $\mathcal{C}$ qui n'est pas absolument dégénérée est π -stable.

Démonstration. - Soit L un treillis sous-modulaire, et $\text{Ref } L \in \mathcal{C}$. D'après le lemme (3.2), on a $\text{Ref}(\text{Coref } L) = \underline{1}$, et le reflet du treillis sous-modulaire $\text{Coref } L$ est distributif, d'où $\text{Coref } L$ est distributif, et le lemme (3.7) montre que $\text{Coref } L \in \mathcal{C}$. D'autre part, il est facile de voir que L est le produit sous-direct des treillis $\text{Ref } L$ et $\text{Coref } L$, donc $L \in \mathcal{C}$.

La réciproque est évidente.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF (Garreth). - Lattice theory. 3e édition. - Providence, American mathematical Society, 1967 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 25).
 - [2] CROISOT (Robert). - Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 68, 1951, p. 203-265 (Thèse Sc. math. Paris, 1951).
 - [3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).
 - [4] IQBALUNNISA. - On types of lattices, Fund. Math., Warszawa, t. 59, 1966, p. 97-102.
 - [5] SZÁSZ (Gabor). - Einführung in die Verbandstheorie. - Budapest, Akadémiai Kiadó, 1962.
 - [6] TAMASCHKE (Olaf). - Submodulare Verbände, Math. Z., t. 74, 1960, p. 186-190.
 - [7] TAMASCHKE (Olaf). - Die Kongruenzrelationen im Verband der zugänglichen Subnormalteiler, Math. Z., t. 75, 1961, p. 115-126.
 - [8] TAMASCHKE (Olaf). - Verbandstheoretische Methoden in der Theorie der subnormalen Untergruppen, Arch. der Math., t. 13, 1962, p. 313-330.
-