

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE KOSKAS

Forme algébrique des théories de Stone-Gel'fand

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 12, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORME ALGÈBRIQUE DES THÉORIES DE STONE-GEL'FAND

par Maurice KOSKAS

(d'après W. SLOWIKOWSKI et W. ZAWADOWSKI) [4]

1. Introduction.

Les travaux de M. H. STONE [5] sur l'algèbre des fonctions continues d'un compact dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sur la représentation des algèbres de Boole, sont à l'origine du précédent travail.

Citons quelques résultats obtenus par STONE.

THÉOREME. - Deux espaces compacts X et Y sont homéomorphes si, et seulement si, les algèbres $C(X, \mathbb{R})$ et $C(Y, \mathbb{R})$ sont isomorphes.

THÉOREME. - Toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre des parties ouvertes et fermées d'un compact totalement discontinu.

Disons quelques mots des techniques utilisées pour établir ces théorèmes :

X étant un espace topologique compact, on montre qu'il existe une bijection entre X et l'ensemble des idéaux maximaux d'un certain anneau ($C(X, \mathbb{R})$ ou $C(X, \mathbb{C})$).

On munit ensuite l'ensemble des idéaux maximaux en question d'une certaine topologie le rendant homéomorphe à X . On a le choix entre deux points de vue (aboutissant en fait à la même topologie, ce que l'on exprime en disant que les algèbres $C(X, \mathbb{R})$ et $C(X, \mathbb{C})$ sont régulières).

Le premier point de vue, celui de GEL'FAND, est susceptible d'être généralisé aux algèbres de Banach complexes, modulo le fameux théorème de Gel'fand-Mazur. Nous renvoyons par exemple à BOURBAKI [1] et SEMADENI [3].

Le second point de vue, celui de JACOBSON et ZARISKI, peut être étendu aux anneaux commutatifs et donc à la géométrie algébrique.

C'est ce deuxième point de vue, plus algébrique, qui est exposé dans le travail [4] que nous allons décrire.

Notons pour terminer que les algèbres de fonctions continues ont fait l'objet de très nombreux travaux (voir par exemple le livre de GILMAN et JERISON [2]).

2. Demi-anneaux.

DEFINITION. - Un demi-anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition notées $+$, $\cdot$, associatives, commutatives, avec élément neutre (noté 0 et 1), telles que $\cdot$ soit distributive par rapport à $+$.

Dans tout l'exposé, la notation A désignera une demi-anneau.

Exemples de demi-anneaux.

(a) anneau commutatif unitaire.

(b) treillis avec plus grand et plus petit élément ($\vee$ étant par exemple l'addition, $\wedge$ la multiplication).

(c) E étant un ensemble quelconque, $\mathfrak{F}(E, \underline{\mathbb{R}}_+)$ ensemble des fonctions de E dans $\underline{\mathbb{R}}_+$, est un demi-anneau.

(d) T étant un espace topologique, $\mathcal{C}^+(T)$, ensemble des fonctions continues positives définies sur T , est un demi-anneau.

Notations. - Ω désigne l'ensemble des éléments inversibles de A , autrement dit

$$\Omega = \{a \in A : \exists b \in A : ab = 1\}.$$

Par exemple, Ω est réduit à un seul élément dans le cas où A est un treillis (exemple (b) donné plus haut).

Une partie $\mathcal{A}$ de A non vide est dite un idéal si :

(a) $\mathcal{A} + \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$,

(b) $\mathcal{A}A \subseteq \mathcal{A}$.

On désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A . Voici quelques exemples d'idéaux maximaux.

Lorsque $A = \mathfrak{F}(E, \underline{\mathbb{R}}_+)$ ou $A = \mathcal{C}^+(T)$ avec T compact, tout idéal maximal M de A est de la forme $M = \{f \in A : f(t) = 0\}$ où t est un élément fixé de E (ou de T) qui dépend, bien sûr, de M . Lorsque A est un demi-anneau d'ouverts (*) d'un espace T compact, ou plus généralement quasi-compact vérifiant l'axiome T_1 , les ouverts formant une base de la topologie de T , tout idéal maximal M de A est de la forme $M = \{U \in A : U \not\ni t\}$ où t est un élément fixé de T , dépendant de M .

(*) La loi $+$ est la réunion, la loi $\cdot$ est l'intersection.

Quelques résultats sur les idéaux maximaux. - Les résultats suivants sont élémentaires. Nous ne les démontrerons pas.

Tout idéal de A se plonge dans un idéal maximal

$$a \in \Omega \iff \forall M \in \mathfrak{M}, a \notin M.$$

$$M \in \mathfrak{M}, a \notin M \implies (M + Aa) \cup Aa \cup M = A.$$

$$M \in \mathfrak{M}, ab \in M, a \notin M \implies b \in M.$$

Définition des demi-anneaux positifs. - A est dit positif si,

$$a \in A \implies 1 + a \in \Omega.$$

Exemples : les exemples (b), (c), (d) de la page 2.

PROPOSITION 1 (un critère de positivité). - A est positif si, et seulement si,
on a

$$\forall M \in \mathfrak{M}, a + b \in M \implies a \in M.$$

Démonstration. - Supposons A positif, soient $M \in \mathfrak{M}$, $a, b \in A$ tels que $a + b \in M$. Supposons $a \notin M$. Alors, il existe $m \in M$, $z \in A$ tel que $1 = m + zx$. On a $1 + zb = m + z(a + b) \in M$. Mais $1 + zb \in \Omega$, ce qui est absurde.

Réciproquement, supposons la condition vérifiée, montrons que A est positif. Soit $a \in A$, supposons $1 + a \notin \Omega$. Il existe alors $M \in \mathfrak{M}$, tel que $1 + a \in M$, et par suite $1 \in M$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Si A est positif, alors

$$(a) \quad \forall M \in \mathfrak{M}, 0 \in M.$$

$$(b) \quad a \in \Omega \implies A + a \subseteq \Omega.$$

Jusqu'à la fin de l'exposé, A sera supposé positif.

Radical. Demi-anneaux sans radicaux.

DEFINITION. - On pose $\mathcal{R}(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$. A est dit sans radical si $\mathcal{R}(A) = \{0\}$.
Notons que dans ce cas, on a $\forall a \in A, 0a = 0$.

Exemples de demi-anneau sans radical. - $\mathfrak{S}(E, \mathbb{R}_+)$, $\mathbb{C}^+(T)$, T étant compact, le treillis des ouverts d'un espace topologique vérifiant T_1 , sont des demi-anneaux sans radical. Il en est de même d'un demi-anneau d'ouverts d'un espace topologique vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie de l'espace.

PROPOSITION 2. - Pour que A soit sans radical, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :

$$\forall a \in A, a \neq 0, \exists b \notin \Omega : a + b \in \Omega .$$

Démonstration. - Supposons A sans radical, et soit $a \in A, a \neq 0$. Il existe $M \in \mathcal{M}$, ne contenant pas a . Il existe donc aussi $m \in M, z \in A$ tel que $1 = m + za$.

On a $a + m \in \Omega$, car autrement il existerait $N \in \mathcal{M}$ tel que $a + m \in N$, et alors on aurait $a \in N, m \in N$, donc $1 \in N$, ce qui est absurde.

Réciproquement, supposons la condition réalisée. Soit $a \in A, a \neq 0$. Il existe $b \notin \Omega$ tel que $a + b \in \Omega$. Il existe $M \in \mathcal{M}$, tel que $b \in M$, et il est clair que l'on ne peut avoir $a \in M$.

C. Q. F. D.

Recouvrements. - Soient $x_1, \dots, x_n \in A$. Il est clair que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $x_1 + \dots + x_n \in \Omega$;
- (ii) $\forall M \in \mathcal{M}, \exists x_i : x_i \notin M$.

Cette remarque et les considérations qui suivent justifient la définition suivante :

DEFINITION. - Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de A est dite former un recouvrement de A si,

$$\forall M \in \mathcal{M}, \exists i \in I : x_i \notin M .$$

Exemples de recouvrement. - Supposons tout d'abord que $A = \mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$ (où $A = \mathcal{C}^+(T)$, T étant compact). Une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions appartenant à A forme un recouvrement si, et seulement si,

$$\forall t \in E \text{ (ou } \forall t \in T), \exists i \in I : f_i(t) > 0 .$$

Supposons maintenant que A soit le treillis des ouverts d'un espace topologique T vérifiant T_1 . Une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de A forme un recouvrement si, et seulement si, $\bigcup_{i \in I} U_i = T$. On a la même conclusion si A est un demi-anneau d'ouverts d'un espace topologique quasi-compact, vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie.

Ces derniers exemples justifient la terminologie employée ici.

PROPOSITION 3. - Si $(x_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A , il existe un sous-recouvrement fini.

Démonstration. - Soit I l'ensemble des éléments de A qui sont des sommes d'éléments de la forme $\alpha_i x_i$, ($\alpha_i \in A$). I n'est pas un idéal (autrement, il existerait $M \in \mathcal{M}$ contenant I , donc contenant tous les x_i), donc $I = A$. Par suite, 1 s'écrit sous la forme $1 = \sum_{i \in J} \alpha_i x_i$, où J est un ensemble fini d'indices. $(x_i)_{i \in J}$ est aussi un recouvrement de A .

C. Q. F. D.

L'équivalence $\sim$. - Nous définissons sur A une relation d'équivalence, notée $\sim$, de la façon suivante : Quels que soient $a, b \in A$, on a

$$a \sim b \iff \forall M \in \mathcal{M}, \quad a \in M \iff b \in M.$$

Il est trivial de vérifier les points suivants :

$\sim$ est compatible avec les lois $+$ et $\cdot$ et permet de définir un demi-anneau quotient noté $[A]$.

$$\forall a \in A, \quad a^2 \sim a, \quad a + a \sim a.$$

$[A]$ est un treillis distributif avec plus grand et plus petit élément.

L'application canonique de A sur $[A]$, qui fait correspondre à tout $a \in A$ sa classe notée $[a]$, établit une correspondance biunivoque entre idéaux maximaux de A et idéaux maximaux de $[A]$. On a $[1] = \Omega$, $[0] = \mathcal{R}(A)$.

Exemple de ce passage à quotient. - Si T est un espace compact, et si $A = C^+(T)$, on vérifie facilement que $[A]$ s'identifie canoniquement à un demi-anneau d'ouverts de T , constituant une base de sa topologie.

PROPOSITION 4. - Les conditions suivantes sont équivalentes, si $a, b \in A$:

(i) $a \sim b$.

(ii) $[a + b + x] = [1] \implies [ab + x] = [1]$.

Démonstration.

(i) $\implies$ (ii). Supposons $a \sim b$ et $a + b + x \sim 1$. Soit $M \in \mathcal{M}$ contenant $ab + x$. On a $x \in M$, $ab \in M$, donc $x \in M$, $a \in M$, $b \in M$, ce qui est absurde.

(ii) $\implies$ (i). Soit $M \in \mathcal{M}$ avec $a \in M$, $b \notin M$. Alors $a + b \notin M$. Il existe $m \in M$, $z \in A$ tel que $1 = m + z(a + b)$. On voit que $m + a + b \in \Omega$, donc aussi

que $m + ab \in \Omega$, ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

DEFINITION. - A est dit réduit si l'équivalence $\sim$ se réduit à l'égalité.

Exemple : Un demi-anneau d'ouverts d'un espace quasi-compact vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de la topologie. Nous verrons plus loin que tout demi-anneau réduit est de ce type.

PROPOSITION 5. - Pour que A soit réduit, il faut et il suffit que A soit un treillis avec plus grand et plus petit élément, et que de plus on ait

$$(z + x + y = 1 \implies z + xy = 1) \implies x = y .$$

Démonstration.

Nécessité : Supposons que $z + x + y = 1 \implies z + xy = 1$. La proposition précédente entraîne $x \sim y$, donc $x = y$.

Suffisance : On voit que $\Omega = \{1\}$. Soient alors $x, y \in A$ avec $x \sim y$. Supposons que $z + x + y = 1$. D'après la précédente proposition, on a aussi $z + xy = 1$. Donc $x = y$.

C. Q. F. D.

On montrera aisément à l'aide de la précédente proposition la proposition suivante.

PROPOSITION 6. - Toute algèbre de Boole est un demi-anneau réduit.

3. Topologie de Zariski.

On va munir $\mathcal{M}$ d'une topologie. Pour tout $x \in A$, on pose

$$\Gamma_x = \{M \in \mathcal{M} : x \notin M\} .$$

Les résultats suivants sont évidents si $x, y \in A$:

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_x \cap \Gamma_y .$$

$$\Gamma_{x+y} = \Gamma_x \cup \Gamma_y .$$

$$\Gamma_x = \mathcal{M} \iff x \in \Omega .$$

$$\Gamma_x = \emptyset \iff x \in \mathcal{R}(A) .$$

$$\Gamma_x = \Gamma_y \iff x \sim y .$$

PROPOSITION 7. - Les Γ_x ($x \in A$) constituent une base d'une topologie quasi-compacte sur $\mathcal{M}$, vérifiant T_1 .

Démonstration. - Soit $M \in \mathcal{M}$. On a $\mathcal{M} - \{M\} = \bigcup_{x \in M} \Gamma_x$. $\{M\}$ est fermé. T_1 est donc vérifié.

Par ailleurs, dire que $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$ équivaut à dire que $(x_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A . D'après la proposition 3, on peut en extraire un recouvrement fini $(x_i)_{i \in J}$, et on a $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in J} \Gamma_{x_i}$.

C. Q. F. D.

Exemple. - Soit T un espace quasi-compact vérifiant T_1 , et supposons que A soit un demi-anneau d'ouverts de T , constituant une base de sa topologie.

On sait que tout $M \in \mathcal{M}$ est de la forme

$$M = \{U \in A : U \not\ni t\} \quad \text{où } t \in T.$$

On définit ainsi une bijection φ de $\mathcal{M}$ sur T , $M \mapsto t$. Il est facile de voir que lorsque l'on munit $\mathcal{M}$ de la topologie définie plus haut, φ est un homéomorphisme.

Revenons à la situation générale. La proposition suivante est évidente.

PROPOSITION 8. - Tout demi-anneau réduit A est isomorphe à un demi-anneau d'ouverts d'un espace quasi-compact vérifiant T_1 , les ouverts formant une base de sa topologie.

Démonstration. - L'espace quasi-compact est $\mathcal{M}$, l'isomorphisme est l'application $x \in A \mapsto \Gamma_x$.

Venons en au théorème de Stone [5].

THÉORÈME 9. - Toute algèbre de Boole A est isomorphe à l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace compact totalement discontinu.

Démonstration. - A étant réduit, on peut appliquer la précédente proposition. Chaque Γ_x est ouvert mais aussi fermé, car on a $\mathcal{M} - \Gamma_x = \Gamma_{x'}$, où x' est le complément de x .

On déduit de là aisément que $\mathcal{M}$ est séparé (donc compact), et est totalement discontinu. Enfin, tout ouvert fermé de $\mathcal{M}$ est réunion finie de Γ_x ($x \in A$), d'après BOREL-LEBESGUE, donc est aussi de la forme Γ_x .

C. Q. F. D.

4. Homomorphismes.

DÉFINITION. - A et A' étant deux demi-anneaux, on appelle homomorphisme de A dans A' une application F de A dans A' telle que

$$\forall x, y \in A, \quad F(x + y) = F(x) + F(y), \quad F(xy) = F(x) F(y),$$

$$F(x) \in \Omega' \implies x \in \Omega.$$

Exemple : l'application canonique de A sur [A].

Le lemme suivant est évident.

LEMME. - Soient A et A' deux demi-anneaux positifs, F un homomorphisme de A sur A'. On a, si $M \in \mathcal{M}$, $M' \in \mathcal{M}'$:

$$F(M) \in \mathcal{M}' ; \quad F^{-1}(M') \in \mathcal{M} ; \quad F^{-1}(F(M)) = M ; \quad FF^{-1}(M') = M'.$$

L'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$, $M \in \mathcal{M} \mapsto F(M)$ est une bijection de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ notée f_F .

THÉOREME 10. - Soient A et A' deux demi-anneaux positifs et F un homomorphisme de A sur A'. L'application f_F est un homéomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ (munis des topologies définies dans le précédent paragraphe).

Démonstration. - On a en effet immédiatement, si $x \in A$ et si $x' = F(x)$

$$f_F(\Gamma_x) = \Gamma_{x'}.$$

Donnons quelques applications de ce théorème.

(A) Soit T un espace compact, et $A = C^+(T)$. Nous avons vu que [A] s'identifie à un demi-anneau d'ouverts de T, constituant une base de la topologie de T. Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des idéaux maximaux de [A], muni de sa topologie. Puisqu'il existe un homomorphisme de A sur [A], $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont homéomorphes. Par ailleurs on a vu page 7 que $\mathcal{M}'$ est homéomorphe à T. Donc $\mathcal{M}$ est homéomorphe à T.

(B) Soient T et T' deux espaces compacts, $A = C^+(T)$, $A' = C^+(T')$, F un homomorphisme de A' sur A.

Soient $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}$ les ensemble d'idéaux maximaux de A' et de A, munis de leurs topologies habituelles.

On vient de voir que $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) est homéomorphe à T (resp. T'). Mais d'après le théorème 10, $\mathcal{M}$ est homéomorphe à $\mathcal{M}'$. Donc il existe un homéomorphisme φ de T sur T'. On montre aisément que si F est un isomorphisme conservant les

fonctions constantes, on a

$$\forall f' \in C^+(T') , \quad F(f') = f' \circ \varphi .$$

En particulier, s'il existe un isomorphisme de l'algèbre $C(T' , \mathbb{R})$ sur l'algèbre $C(T , \mathbb{R})$, il induit un isomorphisme conservant les fonctions constantes de $C^+(T')$ sur $C^+(T)$, et donc les conclusions précédentes sont valables.

Même résultat s'il existe un isomorphisme d'algèbre de $C(T' , \mathbb{C})$ sur $C(T , \mathbb{C})$.

On retrouve des résultats connus de STONE [5].

(C) Soient T et T' des espace quasi-compacts vérifiant T_1 . Soit A (resp. A') un demi-anneau d'ouverts de T (resp. de T') formant une base de sa topologie.

Supposons qu'il existe un homomorphisme F de A sur A' . On voit ici encore, par les mêmes méthodes, qu'il existe un homéomorphisme φ de T sur T' , et on voit facilement que l'on a

$$\forall U \in A , \quad F(U) = \varphi(U) .$$

En particulier, si les treillis des ouverts de T et T' sont isomorphes, T et T' sont homéomorphes. Ceci est encore un résultat de STONE [5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - **E**léments de mathématiques. Théories spectrales. Chapitres 1 et 2 : Algèbres normées. Groupes localement compacts commutatifs. - Paris, Hermann, 1967 (Actualités scientifiques et industrielles, 1332 ; Bourbaki, 32).
- [2] GILLMAN (Leonard) and JERISON (Meyer). - Rings of continuous functions. - Princeton, Toronto, London [etc.], D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).
- [3] SEMADENI (Zbigniew). - Spaces of continuous functions on compact sets, Adv. in Math., t. 1, 1965, fasc. 3, p. 320-382.
- [4] SŁOWIKOWSKI (W.) and ZAWADOWSKI (W.). - A generalisation of maximal ideals method of Stone and Gel'fand, Fund. Math., Warszawa, t. 52, 1955, p. 215-231.
- [5] STONE (M. H.). - Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 375-481.