

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES LÉVY-BRUHL

Images, noyaux, coimages, conoyaux dans les catégories à involution

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 11, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IMAGES, NOYAUX, COIMAGES, CONOYAUX
DANS LES CATÉGORIES À INVOLUTION

par Jacques LÉVY-BRUHL

1. Image entière.

Une catégorie E est à involution si, pour tout couple d'objets, $\text{Hom}(A, B)$ est un ensemble ordonné, de relation d'ordre $\leq$, compatible avec la multiplication, et s'il existe dans E une application $a \rightarrow a^\circ$, vérifiant les axiomes :

$$(INV-i) \quad (a^\circ)^\circ = a ;$$

$$(INV-ii) \quad (ab)^\circ = b^\circ a^\circ ;$$

$$(INV-iii) \quad a \leq b \implies a^\circ \leq b^\circ .$$

La catégorie E est de plus modulaire, si elle vérifie l'axiome

$$(M_1) \quad ab \wedge c = a(b \wedge a^\circ c) \wedge c .$$

Un endomorphisme $b = BbB$ de l'objet B est dit entier si $b \leq B$, réflexif si $B \leq b$, symétrique si $b = b^\circ$, transitif si $b^2 \leq b$, une équivalence s'il a les trois propriétés précédentes.

Soit F la classe des morphismes entiers, symétriques, idempotents de E . Le morphisme $a = BaA$ possède une image entière u , si $va = a$, $v \in F \iff u \leq v$.

Soit I une application de E dans F , vérifiant les axiomes :

$$(IM-i) \quad I(a) \in F, \quad I(a) \leq B \quad \text{si} \quad a = BaA ;$$

$$(IM-ii) \quad a \leq b \implies I(a) \leq I(b) \quad (\text{isotonie de } I) ;$$

$$(IM-iii) \quad I(ab) = I(a I(b)) ;$$

$$(IM-iv) \quad I(a) \leq I(b) \implies a \leq bb^\circ a .$$

PROPOSITION V.1.1.

(a) Toute catégorie modulaire vérifie (IM-i) à (IM-iv) en posant

$$I(a) = \text{pr}_2(a) = aa^\circ \wedge B \quad (IV.2.1)^{(1)}$$

⁽¹⁾ Les références renvoient à la numérotation de [1], et les propositions du présent exposé sont précédées du chiffre V.

(b) Un treillis possédant un élément A nul, où le produit coïncide avec $\vee$, vérifie (IM-i) à (IM-iv), en posant

$$I(a) = A, \quad \forall a.$$

S'il n'est pas modulaire, on a un exemple de catégorie non modulaire vérifiant (IM-i) à (IM-iv) (IV.1.2)

PROPOSITION V.1.2. - Dans une catégorie E vérifiant (IM-i) à (IM-iv) :

- (a) I est idempotent, $I(I(a)) = I(a)$;
- (b) $a \leq aa^\circ a$;
- (c) $I(a) a = a$;
- (d) $I(ax) \leq I(a)$;
- (e) $I(a) \leq aa^\circ \wedge B$;
- (f) Si $u \in F$, $I(u) = u$;
- (g) Si $aa^\circ \wedge B$ est idempotent, $I(a) = aa^\circ \wedge B$;
- (h) $u \in F$, $ua = a \implies I(a) \leq u$;
- (i) $a \in SD \iff I(a) = B$;
- (j) $I(a) \leq I(b) \iff a \leq bb^\circ a$;
- (k) $aa^\circ \leq bb^\circ \implies I(a) \leq I(b)$;
- (l) $a \in SG \implies I(y) \leq I(a^\circ I(ay))$;
- (m) $I(a) = i^\circ i$ (i° injection) $\implies ia \in SD$.

Démonstration.

- (a) $Ba = a \implies I(Ba) = I(B I(a)) = I(I(a))$ (IM-iii) ;
- (b) $I(a) \leq I(a) \implies a \leq aa^\circ a$ (IM-iv) ;
- (c) D'après (IM-i), $I(a) a \leq Ba = a$.
- $I(a) \leq I(I(a)) \implies a \leq I(a)I(a) a \implies a \leq I(a) a$ (IM-iii), (IM-iv), (IM-i) ;
- (d) $I(ax) = I(a I(x)) \leq I(a)$ (IM-iii), (IM-i), (IM-ii) ;
- (e) $I(I(a)) \leq I(a) \implies I(a) \leq aa^\circ I(a) \leq aa^\circ$ (IM-iv), (IM-i) et (c). Or $I(a) \leq B$, donc $I(a) \leq aa^\circ \wedge B$, s'il existe $aa^\circ \wedge B$;
- (f) $I(u) u = u$ (c), et $I(u) \leq uu^\circ$ (e), donc $I(u) \leq u$, mais
- $I(u) u \leq I(u) \implies u \leq I(u)$ (c) ;

(g) $aa^\circ \wedge B$ est entier et symétrique. S'il est de plus idempotent, on a (f)
 $I(aa^\circ \wedge B) = aa^\circ \wedge B$. Or $I(aa^\circ \wedge B) \leq I(aa^\circ) \leq I(a)$ (IM-ii) et (d), et donc
 $aa^\circ \wedge B \leq I(a)$. On a l'inclusion duale d'après (e);

(h) $I(a) = I(ua) \leq I(u) = u$ (d) et (f);

(i) $a \in SD \implies aa^\circ \wedge B = B$, qui est idempotent, donc $I(a) = B$. Réciproque-
ment $I(a) = B \implies I(a) = I(B)$, et $I(B) \leq I(a) \implies B \leq aa^\circ B$ (IM-iv) $\implies a \in SD$;

(j) $a \leq bb^\circ a \implies I(a) \leq I(bb^\circ a) \leq I(b)$ (IM-ii) et (d). La réciproque est (IM-iv);

(k) $aa^\circ \leq bb^\circ \implies aa^\circ a \leq bb^\circ a \implies a \leq aa^\circ a \leq bb^\circ a \implies I(a) \leq I(b)$ (a) et (j);

(l) $I(a^\circ I(ay)) = I(a^\circ ay)$ (IM-iii). Si $a^\circ a \geq A$, $I(y) \leq I(a^\circ ay)$ (IM-ii);

(m) $I(i) = i^\circ i$ (g) $= I(a) \leq aa^\circ$ (e) $\implies iaa^\circ i^\circ \geq ii^\circ ii^\circ = A // i \implies ia \in SD$.

Remarque. - D'après V.1.2(h), $I(a)$ est image entière de a .

PROPOSITION V.1.3. - Dans une catégorie à involution, où $\text{Hom}(A, B)$ est un $\wedge$ -
demi-treillis et où $aa^\circ \wedge B$ est idempotent, $\forall a$, les axiomes (IM-i) à (IM-iv)
sont équivalents à : $I(a) = aa^\circ \wedge B$ (V.1.2(g)), $I(a)a = a$ (V.1.2(c)) et (IM-iii).

Démonstration. - Supposons vérifiés V.1.2(c), V.1.2(g) et (IM-iii); alors $aa^\circ \wedge B$
est élément de F par hypothèse, donc on a (IM-i).

$a \leq b \implies a^\circ \leq b^\circ \implies aa^\circ \wedge B \leq bb^\circ \wedge B$ (IM-ii). Supposons $I(a) \leq I(b)$,
 $I(a) \leq I(b) \iff aa^\circ \wedge B \leq bb^\circ \wedge B \implies (aa^\circ \wedge B)a = a \leq (bb^\circ \wedge B)a \leq bb^\circ a$
(IM-iv). La réciproque résulte de V.1.2.

COROLLAIRE. - Une catégorie à involution, où $\text{Hom}(A, B)$ est un $\wedge$ -demi-treillis
vérifiant (IM-iii) et les conditions $a \leq aa^\circ a$ (V.1.2(b)), $(aa^\circ \wedge B)x = aa^\circ x \wedge x$
vérifie (IM-i) à (IM-iv) avec $I(a) = aa^\circ \wedge B$.

Démonstration. - On a $(aa^\circ \wedge B)a = aa^\circ a \wedge a = a$. D'où V.1.2(c) et $aa^\circ \wedge B$
est idempotent, car

$$(aa^\circ \wedge B)(aa^\circ \wedge B) = aa^\circ(aa^\circ \wedge B) \wedge aa^\circ \wedge B = aa^\circ aa^\circ \wedge aa^\circ \wedge aa^\circ \wedge B = aa^\circ \wedge B.$$

PROPOSITION V.1.4. - Une catégorie à involution, où $\text{Hom}(A, B)$ est un $\wedge$ -demi-
treillis vérifiant les conditions $a \leq aa^\circ a$ (V.1.2(b)), $I(ax) \leq I(a)$ (V.1.2(d))
et $I(a)x = aa^\circ x \wedge x$, vérifie les axiomes (IM-i) à (IM-iv) avec $I(a) = aa^\circ \wedge B$.

Démonstration. - D'après le corollaire précédent, il suffit de prouver que (IM-iii)
est conséquence des hypothèses.

$$I(a \ I(b)) = (a(bb^0 \wedge A)a^0) \wedge B \leq abb^0a^0 \wedge B = I(ab) \quad ,$$

et

$$I(ab) = I(a \ I(b) \ b) \leq I(a \ I(b)) \quad (V.2.1(d)) \quad .$$

D'où (IM-iii).

PROPOSITION V.1.5. - Si on admet l'axiome (IM-v) : Tout morphisme entier $u = i^0i$, où i^0 est une injection, dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v), $i^0i = I(a)$ si, et seulement si, i^0E est le sous-objet minimum parmi ceux tels que $a = j^0y$, pour un certain facteur y , c'est-à-dire si i^0E est image de a .

Démonstration. - Si j^0 est une injection, $j^0ja = a \iff a = j^0(ja) = j^0y$ et $i^0E \subseteq j^0E \iff i^0 = j^0k^0$, k^0 injection (III.3.1) $\iff i^0i \leq j^0j$.

2. Noyaux entiers.

Outre les axiomes (IM-i) à (IM-iv), nous supposons que E vérifie l'axiome :

(K-i) Pour tout objet A de E , il existe dans $\text{Hom}(A, A)$ un élément minimum $w(A)$.

Remarquons que $w(A) \in F$, car $w(A) \leq w^0(A) \implies w^0(A) \leq w(A) \implies w(A) = w^0(A)$ et $w(A)^2 \leq w(A) \ A = w(A) \implies w(A)^2 = w(A)$.

Nous appellerons noyau entier de $a = BaA$, et noterons $K(a)$ le morphisme $K(a) = I(a^0 w(B))$, et désignerons par W la classe des morphismes de E , $x = Y \ x \ X$ définie par $x = Y \ x \ X \in W \iff I(x) = w(Y)$.

PROPOSITION V.2.1. - Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) et (K-i) :

$$(a) \quad ba^0a \leq b \implies a^0w(B)a \leq b^0w(C)b \implies K(a) \leq K(b) ;$$

$$(b) \quad a \in ID \implies a^0w(B)a = w(A) \implies K(a) = w(A) ;$$

$$(c) \quad a \in W, \quad b \in IG \implies ba \in W ;$$

$$(d) \quad a \in W \implies ax \in W ;$$

$$(e) \quad K(ba) = I(a^0 K(b)) ;$$

$$(f) \quad K(a) \leq K(ba) ;$$

$$(g) \quad b \in ID \implies K(ba) = K(a) ;$$

$$(h) \quad K(a) \leq K(a') \implies K(ac) \leq K(a'c) ;$$

$$(i) \quad a \leq a' \implies K(ba) \leq K(ba') ;$$

$$(j) \quad a \in IG \implies aK(a) \in W ;$$

(k) $a \in SG$, $K(a) = i^0 i$, (i^0 injection), $ay \in W \implies I(y) \leq K(a)$ et $y = i^0 x$ où x est unique.

Démonstration.

(a) Si $b = CbB$, on a $w(B) \leq ab^0 w(C)ba^0$ et donc $a^0 w(B)a \leq a^0 ab^0 w(C)ba^0 a \leq b^0 w(C)b$ et (V.1.2(k)) : $I(a^0 w(B)) \leq I(b^0 w(C))$.

(b) $a^0 a \leq A \implies Aa^0 a \leq A \implies K(a) \leq K(A)$. Mais $K(A) \leq Aw(A)A = w(A)$, et donc $K(A) = w(A)$, et $K(a) \leq w(A) \implies K(a) = w(A)$.

$$(c) \quad I(ba) = I(b I(a)) = I(b w(B)) = K(b^0) = w(B) \quad (\text{d'après (b)}) .$$

$$(d) \quad I(ax) \leq I(a) = w(B) \implies I(ax) = w(B) .$$

$$(e) \quad K(ba) = I(a^0 b^0 w(C)) = I(a^0 I(b^0 w(C))) = I(a^0 K(b)) .$$

$$(f) \quad w(B) \leq K(b) \implies I(a^0 w(B)) \leq I(a^0 K(b)) \implies K(a) \leq K(ba) .$$

$$(g) \quad \text{Si } b \in ID , \text{ d'après (e) et (b), } K(ba) = I(a^0 w(A)) = K(a) .$$

$$(h) \quad K(a) \leq K(a') \implies I(c^0 K(a)) \leq I(c^0 K(a')) \implies K(ac) \leq K(a'c) .$$

$$(i) \quad a \leq a' \implies I(a^0 K(b)) \leq I(a'^0 K(b)) \implies K(ba) \leq K(ba') .$$

(j) $I(a K(a)) = I(a I(a^0 w(B))) = I(aa^0 w(B)) = K(aa^0)$. Si, en particulier, $aa^0 \in IG$, ou si $a \in IG$, $aK(a) \in W$.

(k) Soit $I(ay) = w(B)$. D'après V.1.2(l), si $a \in SG$, on a

$$I(y) \leq I(a^0 I(ay)) = I(a^0 w(B)) = K(a) .$$

Si $K(a) = i^0 i$, $I(y) = j^0 j$, où i^0 et j^0 sont des injections, $i^0 i \geq j^0 j$ et $j^0 = i^0 m^0$, où m^0 est une injection et $y = j^0 j y = i^0 (m^0 m i y) = i^0 x$, où $x = i y$ est unique.

Nous dirons que le couple (f, g) est quasi-exact à gauche si, et seulement si, $gu \in W \implies \exists x$, tel que $u = fx$ (on n'a pas nécessairement $gf \in W$, ni l'unicité de x), et $a \notin W$ sera dit non diviseur de W à gauche si $ax \in W \implies x \in W$.

PROPOSITION V.2.2. - Soit E une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v) et (K-i), et soit E' la sous-catégorie des applications de E :

(a) La classe $W \cap E'$ est une classe permise dans E' ;

(b) Si $W \cap E'$ est une classe de morphismes nuls dans E' , soit $a' \in E'$, $K(a') = i^0 i$, on a $i^0 E' = \text{Ker } a'$;

(c) Si $a \in E$, $a \in ID \cap SG$ est non diviseur de W à gauche, et $b \in SD$ est non diviseur de W à droite.

Démonstration.

(a) résulte de V.2.1(c) et V.2.1(d)

(b) On a $a'K(a') \in W$ (V.2.1(j)), et $a'i \circ i \in W \Rightarrow a'i \circ = a'i \circ i \circ i \in W$ (V.2.1(d)), $a'y \in W \Rightarrow y = i \circ x$. Si W est une classe de morphismes nuls, $i \circ E' = \text{Ker } a'$ (dans E').

(c) $a \in ID \cap SG$, $ax \in W \Rightarrow a \circ ax \in W$ (V.2.1(c)), et comme $a \in SG$, $x \leq a \circ ax \Rightarrow I(x) \leq I(a \circ ax) \Rightarrow x \in W$. Si $b \in SD$, $yb \in W \Rightarrow ybb \circ \in W$ (V.2.1(d)) et $y \leq ybb \circ \Rightarrow I(y) \leq I(ybb \circ) \Rightarrow y \in W$.

PROPOSITION V.2.3 (Lemme des quatre faible) (Axiomes (IM-i) à (IM-iv) et (K-i)).
Soit le diagramme (Δ) :

$$(\Delta) \quad \begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D'
 \end{array}$$

où l'on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $h' \in IG$;
- (ii) d non diviseur de W à gauche ;
- (iii) (g, h) et (f', g') quasi-exacts à gauche ;
- (iv) $h'c = dh$, $f'a = bf$, $cg = g'b$ (diagramme commutatif) ;
- (v) $gf \in W$;
- (vi) a inversible à droite ;
- (vii) b monomorphisme.

Dans ces conditions, c est non diviseur de W à gauche.

Démonstration. -

$cu \in W \Rightarrow h'cu \in W$ ((i) et V.2.1(c)) $\Rightarrow dhu \in W$ (iv) $\Rightarrow hu \in W$ (ii)
 $\Rightarrow u = gv$ (iii) $\Rightarrow cu = cg v \in W \Rightarrow g'bv \in W$ (iv) $\Rightarrow bv = f't$ (iii).

Mais $t = aa't$, où a' est un inverse à droite de a . Donc

$$bv = (f'a)a't \Rightarrow bv = bfa't \text{ (iv)} \Rightarrow v = fa't \text{ (vii)}.$$

Donc $u = gfa't$ et $gf \in W$ (v) $\Rightarrow u \in W$ (V.2.1(d)).

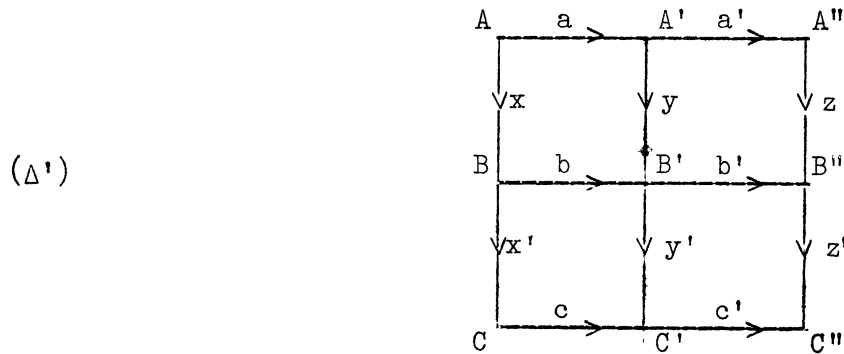
PROPOSITION V.2.4 (Lemme 3.3, avec les axiomes (IM-i) à (IM-v) et (K-i)). - Soit le diagramme (Δ') dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-v) et (K-i), où l'on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $z \in IG$;
- (ii) c non diviseur de W à gauche ;
- (iii) $(b, b'), (x, x')$ quasi-exacts à gauche ;
- (iv) $za' = b'y, cx' = y'b, bx = ya$;
- (v) y monomorphisme ;
- (vi) $y'y \in W$.

Dans ces conditions, (a, a') est quasi-exact à gauche.

Démonstration.

$a'u \in W \implies za'u \in W$ (V.2.1(c) et (i)) $\implies b'yu \in W$ (iv) $\implies yu = bv$ (iii)
 $\implies y'bv = y'yu \in W$ ((iii), (vi) et V.2.1(d)) $\implies cx'v \in W$ (iv) $\implies x'v \in W$ (ii)
 $\implies v = xt$ (iii) $\implies yu = bxt = yat$ (iv) et $u = at$ (v).



3. Coimages réflexives.

Dans une catégorie à involution E , un morphisme BaA admet une coimage réflexive q , s'il existe une équivalence maxima parmi celles qui vérifient $ar = a$, et $ar = a$, r équivalence, $\iff a \leq q$.

Cette définition est 3-duale de celle de l'image entière (V.1).

Un morphisme est dit régulier dans E , s'il vérifie $a = aa^0a$.

PROPOSITION V.3.1. - Dans une catégorie E vérifiant (IM-i) à (IM-iv), soit a un morphisme régulier :

- (a) $xa \leq a \implies xI(a) \leq aa^0$;
- (b) Si $a \in SD$, $xa \leq a \iff x \leq aa^0$;
- (c) Si $a \in SG$, a admet pour coimage a^0a ;

(d) Si a est une application, et si $a^0a = s^0s$ (s surjection), et $I(a) = i^0i$ (i^0 injection), alors ias^0 est une bijection ;

(e) L'intersection de deux morphismes réguliers est un morphisme régulier.

Démonstration.

(a) $xI(a) \leq xaa^0$ (V.1.2(e)), et $xa \leq a \implies xI(a) \leq aa^0$. Réciproquement, $xI(a) \leq aa^0 \implies xa = xI(a)a \leq aa^0a = a$.

(b) $a \in SD \iff I(a) = B$, et (a) devient $xa \leq a \iff x \leq aa^0$.

(c) Si $a \in SG$ est régulier, a^0a est une équivalence. Par suite

$$ay \leq a \iff y^0a^0 \leq a^0 \iff y^0 \leq a^0a \quad (\text{d'après (b)})$$

et si y est une équivalence, $y \leq a^0a$. On a d'ailleurs $a(a^0a) = a$.

(d) En particulier, une application est régulière et surjective à gauche. Si $a^0a = s^0s$, et $I(a) = i^0i$, on a $as^0s = a$, $s^0s = a^0a$ et $i^0ia = a$, $i^0i \leq aa^0$ (V.1.2(c) et V.1.2(e)). On en tire $ias^0sa^0i^0 = iaa^0i^0 \leq ii^0$ ($a \in IG$) et $ias^0sa^0i^0 \geq ii^0$ ($ii^0 \leq aa^0$) et $sa^0i^0ias^0 = sa^0as^0 = ss^0ss^0$, ce qui prouve que ias^0 est une bijection.

(e) Si a et b sont réguliers,

$$(a \wedge b)(a^0 \wedge b^0)(a \wedge b) \leq aa^0a \wedge bb^0b = a \wedge b.$$

d'où l'égalité (V.1.2(b)).

COROLLAIRE. - Soit une catégorie à involution E , où $\text{Hom}(A, B)$ est un $\vee$ -demi-treillis, la multiplication étant distributive par rapport à $\vee$;

(a) Si a est régulier, $a^0a \vee A$ est une équivalence et si a possède une co-image q , $a^0a \vee A \leq q$.

(b) Si a possède une coimage q , a est régulier si, et seulement si, $a^0a \leq q$.

Démonstration.

(a) Il suffit de prouver que $a^0a \vee A$ est idempotent :

$$(a^0a \vee A)(a^0a \vee A) = a^0aa^0a \vee a^0a \vee a^0a \vee A = a^0a \vee A,$$

et que $a(a^0a \vee A) \leq a$. Or $a(a^0a \vee A) = aa^0a \vee a = a$.

(b) De (a) résulte que $a^0a \leq a^0a \vee A \leq q$. Inversement si $a^0a \leq q$, on a $aa^0a \leq aq = a$, et par suite $aa^0a = a$.

Nous désignons par I' une application de la catégorie à involution E dans la classe des équivalences de E vérifiant les axiomes suivants ($\mathcal{I}$ -duaux de (IM-i) à (IM-iv)) :

(COIM-i) $I'(a)$ est une équivalence, $I'(BaA) \geq A$;

(COIM-ii) $a \leq b \implies I'(a) \leq I'(b)$;

(COIM-iii) $I'(ab) = I'(I'(a) b)$;

(COIM-iv) $I'(b) \leq I'(a) \implies ab^0b \leq a$, et éventuellement,

(COIM-v) Toute équivalence r est de la forme $r = s^0s$ (s surjection).

PROPOSITION V.3.2 ($\mathcal{I}$ -duale de V.1.2).

(a) $I'(I'(a)) = I'(a)$;

(b) $aa^0a \leq a$;

(c) $aI'(a) = a$;

(d) $I'(a) \leq I'(xa)$;

(e) $a^0a \vee A \leq I'(a)$;

(f) Si r est une équivalence, $I'(r) = r$;

(g) Si $a^0a \vee A$ est une équivalence, $I'(a) = a^0a \vee A$;

(h) Si r est une équivalence $ar = a \implies r \leq I'(a)$;

(i) $a \in ID \implies I'(a) = A$;

(j) $I'(a) \leq I'(b) \iff ba^0a \leq b$;

(k) $a^0a \leq b^0b \implies I'(a) \leq I'(b)$;

(l) $a \in IG \implies I'(I'(ya)a^0) \leq I'(y)$;

(m) $I'(a) = s^0s \implies as^0 \in ID$.

PROPOSITION V.3.3. - Soit E une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) :

(a) La classe des morphismes réguliers surjectifs à gauche admet des coimages (réflexives) vérifiant (COIM-i) à (COIM-iv), avec $I'(a) = a^0a$.

(b) Si E vérifie de plus (IM-v) et (COIM-v), et si E' est la sous-catégorie des applications de E , soient $a' \in E'$, $I(a') = i^0i$, $I'(a') = s^0s$, l'objet quotient Es est coimage de a' , on a $a' = i^0bs$ où b est une bijection, et si $a' = i'^0s'$ (i'^0 injection, s' surjection), on a nécessairement $i'^0E' = \text{Im}(a')$, $Es' = \text{Coim}(a')$, $i'^0i' = I(a')$, $s'^0s' = I'(a')$.

(c) Si une catégorie vérifie (IM-i) à (IM-iv) et (COIM-i) à (COIM-iv), tout morphisme est régulier.

(d) Si une catégorie vérifie (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv) et (K-i), on a $K(I'(a)) = K(a)$.

Démonstration.

(a) Soit SGR la classe des morphismes réguliers et surjectifs à gauche. Posons $I'(a) = a^\circ a$, coimage réflexive de a (V.3.1(c)). C'est une équivalence (COIM-i); $a \in \text{SGR}$, $b \in \text{SGR}$, $a \leq b \implies a^\circ a \leq b^\circ b$ (COIM-ii): $I'(I'(a) b) = b^\circ a^\circ a a^\circ b$ (en supposant ab régulier) $= b^\circ a^\circ ab = I'(ab)$ (COIM-iii), et

$$b^\circ b \leq a^\circ a \implies ab^\circ b \leq aa^\circ a = a \quad (\text{COIM-iv}).$$

(b) E_s est minimum parmi les objets quotients de la forme E_t (t surjection) tel que $a = yt$ (V.1.5)****. Si $a' \in E'$, $a' = i^\circ b s$ (V.3.1(d)), et si $a' = i'^\circ s'$ $I(a') = I(i'^\circ I(s')) = I(i'^\circ) = i'^\circ i' = i^\circ i$ ((IM-iii) et V.1.2(i)). D'où $i^\circ E = i'^\circ E$ (III.3.3). Par 3-dualité $E_s = E_{s'}$.

(c) résulte de V.1.2(b) et V.3.2(b).

(d) Soit $I'(a) = s^\circ s$. On a $K(s^\circ s) = K(s)$, car $s^\circ \in \text{ID}$ (V.2.1(g)). Mais $K(a) = K(a I'(a)) = K(as^\circ s) = K(s) = K(I'(a))$, car

$$a^\circ a \leq s^\circ s = I'(a) \implies sa^\circ as^\circ \leq ss^\circ ss^\circ = A/s \implies as^\circ \in \text{ID}.$$

PROPOSITION V.3.4. - Une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv) et aux conditions :

V.3.4(i) Tout morphisme est régulier ;

V.3.4(ii) $a^\circ ac \leq c \implies a(b \wedge c) = ab \wedge ac$,

est une catégorie modulaire.

Démonstration. - $I(ab \wedge c) \leq I(ab) \leq I(a)$ ((IM-ii) et V.1.2(d)), d'où (IM-iv) $ab \wedge c \leq aa^\circ(ab \wedge c)$, et puisque a est régulier

$$aa^\circ(ab \wedge c) \leq aa^\circ ab \wedge aa^\circ c = ab \wedge aa^\circ c.$$

Posons $a' = a$, $c' = a^\circ c$, on a

$$a'^\circ a' c' = a^\circ aa^\circ c = a^\circ c = c',$$

et par suite (V.3.4(ii)) :

$$a'(b' \wedge c') = a'b \wedge a'c' \quad \text{ou} \quad a(b \wedge a^\circ c) = ab \wedge aa^\circ c$$

et par suite $ab \wedge c \leq a(b \wedge a^\circ c)$ et E est modulaire.

Remarque. - Une catégorie modulaire vérifie (IM-i) à (IM-iv), V.1.1(a) et V.3.4(ii) d'après III.7.9. Il y a donc identité entre les catégories modulaires où tout morphisme est régulier, et les catégories vérifiant (IM-i) à (IM-iv), V.3.4(i) et V.3.4(ii).

4. Catégories bimodulaires.

Une catégorie E à involution sera dite bimodulaire si $\text{Hom}(A, B)$ est un treillis d'opérations $\wedge$ et $\vee$, et si la catégorie est modulaire et vérifie l'axiome 2-dual de M_2 (IV.1). On a donc

$$M_2 \quad (ab \wedge c) \leq (a \wedge cb^0)b \quad \text{et} \quad M_2^{***} \quad (a \vee cb^0)b \leq ab \vee c .$$

Dans une catégorie bimodulaire, à toute formule déduite des axiomes, on peut adjoindre les formules 1, 2 ou 3-duales.

PROPOSITION V.4.1. - Si E est une catégorie bimodulaire :

- (a) Tout morphisme est régulier ;
- (b) E vérifie (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), avec $I(a) = aa^0 \wedge B$, $I'(a) = a^0a \vee A$, si $a = BaA$;
- (c) Tout morphisme réflexif est une équivalence ;
- (d) $aa^0 \leq b^0b \vee B \implies (b \wedge c)a = ba \wedge ca$;
- (d^{***}) $aa^0 \geq b^0b \wedge B \implies (b \vee c)a = ba \vee ca$;
- (e) $a^0x \wedge A \leq a^0a \leq a^0x \vee A$.

Démonstration.

- (a) résulte de IV.2.1(a) et de (IV.2.1(a))^{***} ;
- (b) résulte de V.1.1 et de (V.1.1)^{***} ;
- (c) résulte de IV.2.1(h) ;
- (d) $aa^0 \leq b^0b \vee B \iff aa^0 \vee B \leq b^0b \vee B \iff I'(a^0) \leq I'(b) \iff baa^0 \leq b$ d'après (COIM-iv). On conclut d'après IV.1.9.
- (e) $a^0x \wedge A \leq a^0a \wedge A \leq a^0a$ (IV.2.1(b)). La deuxième formule est 2-duale.

Exemple. - Tout treillis modulaire à élément minimum, où l'union $\vee$ coïncide avec le produit, est une catégorie bimodulaire.

PROPOSITION V.4.2. - Toute catégorie à involution vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), et aux conditions V.4.1(d) et V.4.1(d^{***}) est bimodulaire.

Démonstration. - $aa^0 \leq b^0b \vee B \iff b \geq baa^0$. Si on a V.4.1(d), E est modulaire, d'après V.3.4, puisque tout morphisme est régulier, donc bimodulaire par dualité si V.4.1(d^{***}) est vérifiée.

5. Conoyaux réflexifs.

Dans une catégorie vérifiant (COIM-i) à (COIM-iv), on peut définir une notion 3-duale de la notion de noyau entier, en supposant vérifié l'axiome :

(COK-i) Pour tout objet A de E, il existe dans $\text{Hom}(A, A)$ un élément maximum $W(A)$ qui est nécessairement une équivalence.

Le conoyau réflexif de $a = BaA$ sera alors l'équivalence dans B, $K'(a)$ définie par $K'(a) = I'(W(A) a^0)$.

PROPOSITION V.5.1 (certaines propriétés 3-duales de V.2.1).

(a) $b \leq aa^0b \implies bW(B)b^0 \leq aW(A)a^0 \implies K'(b) \leq K'(a)$, et si E vérifie (IM-i) à (IM-iv), $I(a) \leq I(b) \implies K'(a) \leq K'(b)$;

(b) $a \in \text{SD} \iff K'(a) = W(B)$;

(c) $K'(ab) = I'(K'(b) a^0)$;

(d) $K'(ab) \leq K'(a)$;

(e) $b \in \text{SD} \implies K'(ab) = K'(a)$;

(f) $K'(b) \leq K'(b') \implies K'(ab) \leq K'(ab')$;

(g) $a \leq a' \implies K'(ab) \leq K'(a'b)$.

PROPOSITION V.5.2. - Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i) et (COK-i) :

(a) $K'(I(a)) = K'(a)$;

(a^{***}) $K(I'(a)) = K(a)$;

(b) $I(a) = I(a W(A))$, $I'(a) = I'(W(B) a)$;

(c) Si u est entier symétrique idempotent, $uW(A)u$ est idempotent ;

(c^{***}) Si q est une équivalence, $qW(A)q$ est idempotent ;

(d) Si q est une équivalence $q \leq K'(K(q))$ et $I'(a) \leq K'(K(a))$;

(d^{***}) Si u est entier, symétrique, idempotent $K(K'(u)) \leq u$ et $K(K'(a)) \leq I(a)$.

Démonstration. - (a) et (a^{***}) résultent de V.3.3(d) ;

(b) $a \leq a(W(A))$ entraîne $I(a) \leq I(aW(A))$, l'inclusion 2-duale résulte de V.1.2(d). La deuxième égalité est 3-duale ;

(c) Formons $p = uW(A)uW(A)u$, alors $u \leq A \implies p \leq uW(A)u$, et

$$A \leq W(A) \implies u^3 W(A)u = uW(A)u \leq p ;$$

(d) On a

$$K'K(q) = K'(I(qW(A))) = K'(qW(A)) \quad (\text{d'après (a)}) ,$$

et

$$K'K(q) = I'(W(A)w(A)q) \geq I'(w(A)q) = I'(q) \quad (\text{d'après (b)}) .$$

Si q est une équivalence $I'(q) = q$ et $q \leq K'K(q)$. Si a est un élément quelconque, et $I'(a) = q$, on a $I'(a) \leq K'KI'(a) = K'K(a)$ d'après (a).

PROPOSITION V.5.3.

(a) Dans une catégorie vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (K-i), (COK-i), (COIM-i) à (COIM-iv), les trois axiomes (K-ii), (K-ii'), (K-ii'') sont équivalents :

(K-ii) Si q et r sont deux équivalences, $K(q) \leq K(r) \implies q \leq r$;

(K-ii') $K(a) \leq K(b) \iff I'(a) \leq I'(b)$;

(K-ii'') $K(a) \leq K(b) \iff ba^0a \leq b$.

(b) Il existe des catégories bimodulaires (donc vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i) et (COK-i)) ne vérifiant pas (K-ii).

Démonstration.

(a) (K-ii') $\iff$ (K-ii'') (V.3.2(j)) ;

(K-ii) $\implies$ (K-ii') : Supposons (K-ii) et $K(a) \leq K(b) \iff K(I'(a)) \leq K(I'(b))$ (V.5.2(a^{***})) $\implies I'(a) \leq I'(b)$ (K-ii) .

(K-ii') $\implies$ (K-ii) : Si q et r sont deux équivalences dans A ,

$$K(q) \leq K(r) \implies I'(q) = q \leq I'(r) = r .$$

(b) Supposons que le treillis modulaire de l'exemple V.4.1 possède un élément universel u , son élément nul étant A . On a $I(a) = A = K(a)$, $\forall a$. On a $I'(a) = a$ et $K'(a) = u$, $\forall a$, et l'axiome (K-ii) n'est pas vérifié.

PROPOSITION V.5.4. - Soit une catégorie à involution vérifiant (IM-i) à (IM-iv), (COIM-i) à (COIM-iv), (K-i), (K-ii), (COK-i), ainsi que les axiomes :

(K-iii) Pour tout morphisme entier u , symétrique, idempotent, il existe une équivalence q telle que $K(q) = u$.

(COK-iii) Pour toute équivalence q , il existe un entier, symétrique, idempotent u , tel que $q = K'(u)$.

(a) $u = K(q) \iff q = K'(u)$ (u entier, symétrique, idempotent, q équivalence) ;

(b) $\forall a \in E, I(a) = KK'(a), I'(a) = K'K(a)$;

(c) $K'(a) \leq K'(b) \iff I(a) \leq I(b) \iff a \leq bb^\circ a$ (COK-ii) ;

(d) $W(A) = W(A)w(A)W(A)$ et $w(A) = w(A)W(A)w(A)$; $A = KW(A) = K'w(A)$;

(e) $W(A) = W(A)aW(A)$ et $w(A) = W(A)aw(A)$, $\forall a = AaA$;

(f) Le produit désignant la composition des fonctions, on a $I = KK'$, $I' = K'K$, $K'I = K'KK' = K'$, $KI' = KK'K$, $I^2 = I$, $I'^2 = I'$.

Démonstration.

(a) $u = K(q) \implies KK'u \leq u$ (V.5.2(d)) $\implies KK'u \leq K(q) \implies K'u \leq q$ (K-ii).
Mais $q \leq K'Kq$ (V.5.2(d)) $\implies q \leq K'u$. Donc $q = K'u$.

Réciproquement, si $q = K'u$ et $u = Kr$ d'après (K-iii) (r équivalence), on a d'après ce qui précède $r = K'u = q$. Donc $u = Kq$.

(b) D'après (a), $u = KK'u$, $q = K'Kq$. Si $a \in E$ et $q = I'a$, $u = Ia$, on a $Ia = KK'Ia = KK'a$ (V.5.2(a)) et $I'a = K'K(I'a) = K'Ka$ (V.5.2(a)***).

(c) $K'a \leq K'b \iff K'Ia \leq K'Ib$ (V.5.2(a)). Posons $K'Ia = q$, $K'Ib = r$, $Ia = u$, $Ib = v$. On a $u = Kq$, $v = Kr$ d'après (a), et $q \leq r \iff Kq \leq Kr$ d'après (K-ii), donc $K'a \leq K'b \iff Ia \leq Ib \iff a \leq bb^\circ a$ (V.1.2(j)).

(d) D'après (K-ii) et (a), il existe $K'A$ tel que $A = KK'A$. Mais si u est entier, symétrique, idempotent, $u \leq A \iff K'u = q \leq K'A$, et par suite $K'A$ est une équivalence maxima $K'A = W(A)$, et $K(W(A)) = A$.

On a $A = KW(A) = I(W(A)w(A)) \leq W(A)w(A)W(A)$ (V.1.2(e)), et par suite $W(A)A \leq W^2(A)w(A)W(A) \implies W(A) \leq W(A)w(A)W(A) \implies W(A) = W(A)w(A)W(A)$. Par 3-dualité, on a $A = K'w(A)$, $w(A) = w(A)W(A)w(A)$.

(e) $W(A) = W(A)w(A)W(A)$ et $w(A) \leq a \implies W(A) \leq W(A)aW(A) \implies W(A)aW(A) = W(A)$.

(f) résulte de V.5.4(b), V.5.2(a), V.1.2(c) et V.3.2(a).

Remarque. - On peut comparer avec les résultats correspondants sur les catégories exactes.

6. Immersion dans une catégorie modulaire.

Soit E' une catégorie vérifiant les conditions suivantes :

- (i) E' a des limites projectives finies ;
- (ii) Tout morphisme $a \in E'$ peut s'écrire sous la forme $a = me$, où m est un monomorphisme, e un épimorphisme, où $mE' = \text{Im}(a)$ et $E'e = \text{Coim}(a)$ sont déterminés de manière unique ;
- (iii) Si $f_1 \bar{\wedge} f_2 = f_1 \ell_1 = f_2 \ell_2$ est un produit fibré, et si f_1 est un épimorphisme, ℓ_2 est un épimorphisme ;
- (iv) E' est balancée.

Remarque. - La catégorie des ensembles, des groupes, une catégorie abélienne vérifient (i), (ii), (iii), (iv).

On appelle relation de E' tout sous-objet d'un produit direct $A \times B$. Si $r = (A \times B)mE'$, où m est un monomorphisme, et si p et p' sont les projections de $A \times B$ dans A et dans B , et si $pm = u$, $p'm = v$, $m = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, nous poserons

$$r^o = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} E' ,$$

et r^o est sous-objet de $B \times A$. On a

$$(INV-i) \quad (r^o)^o = r ;$$

$$(INV-iii) \quad r \subseteq s \implies r^o \subseteq s^o \quad (III.1) .$$

Si $r = (A \times B)mE'$, $s = (B \times C)nE'$, nous poserons par définition :

$$(1) \quad sr = (nE')(mE') = \text{Im}(q(A \times n) \bar{\wedge} (m \times C))E' ,$$

où q est la projection de $A \times B \times C$ dans $A \times C$, et où

$$A \times n = (A \times B \times C)(A \times n)(A \times Y) , \quad m \times C = (A \times B \times C)(m \times C)(X \times C)$$

sont les monomorphismes produits directs. Le produit sr défini par (1) est sous-objet de $A \times C$, donc une relation de E' .

PROPOSITION V.6.1. - Soit E' vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) :

- (a) Si r est un sous-objet de $A \times B$ et s un sous-objet de $B \times C$, on a
- (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in sr \iff \exists e \text{ épimorphisme, et } z \text{ tels que } \begin{pmatrix} x^e \\ z \end{pmatrix} \in r \text{ et } \begin{pmatrix} z \\ ye \end{pmatrix} \in s .$

avec $x = AxX$, $y = CyX$, $z = BzX$, $e = XeX'$.

(b) Les relations de E' forment une catégorie modulaire E de produit défini par (1). Les objets de E sont de la forme $\binom{A}{A}E'$ où A est un objet de E' ; $r = \binom{a}{b}E' \in E$ est injectif à gauche, si, et seulement si, a est un monomorphisme, et surjectif à gauche si, et seulement si, a est un épimorphisme.

(c) Il existe un foncteur f bijectif (pleinement fidèle) de E' sur la sous-catégorie E'' des applications de E , défini par

$$f(a) = \binom{A}{a}E' \quad (A \text{ source de } a).$$

Démonstration.

(a) Soit $sr = wE'$ défini par (1), et soit $\binom{x}{y} \in sr$. Alors, il existe z tel que $\binom{x}{y} = wz$, et si $r = mE'$, $s = nE'$, on a par définition $w = \text{Im}(qw')$, avec $w' = (m \times C) \bar{\wedge} (A \times n)$. Donc $qw' = we'$, où $e' = \text{Coim}(qw')$ est un épimorphisme (ii). Soit le produit fibré $z \bar{\wedge} e' = e'z = ze$, de z et e' . D'après (iii), e est un épimorphisme. Si, sous forme matricielle $m = (A \times B)\binom{a}{b}$, $n = (B \times C)\binom{c}{d}$, $w'z' = (A \times B \times C)\binom{a'}{b'}X'$, on a $w'z'E' \subseteq w'E' \subseteq (m \times C)E'$ et $\binom{a'}{b'}E' \subseteq \binom{a}{b}E' = r$, et de même $\binom{b'}{c'}E' \subseteq \binom{c}{d}E' = s$. Mais

$$\binom{a'}{c'} = qw'z' = we'z' = wze = \binom{x}{y}e \implies a' = xe, \quad c' = ye,$$

et il existe $z = b'$ tel que $\binom{xe}{z} \in r$ et $\binom{z}{ye} \in s$.

Réciproquement, supposons $\binom{xe}{z} \in r$, $\binom{z}{ye} \in s$. Alors $\binom{xe}{z}E' \in (m \times C)E'$, et de même $\binom{xe}{z}E' \subseteq (A \times n)E'$. Donc $\binom{xe}{z}E' \subseteq w'E'$, et par suite il existe z' , $\binom{xe}{z} = w'z'$, et $\binom{xe}{ye} = qw'z' = we'z' \implies \binom{xe}{ye}E' = \binom{x}{y}eE' \subseteq wE' = sr \implies \binom{x}{y} \in sr$.

On peut faire le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X' & & \xrightarrow{z'} & & A \times B \times C \\ \downarrow \vee e & & & \downarrow \vee e' & \downarrow \vee q \\ X & & \xrightarrow{z} & & A \times C \\ & & & & \downarrow \vee w \\ & & & & A \times C \end{array}$$

(b) En vertu de (a), le raisonnement est analogue à celui fait pour les relations binaires. On utilise que les épimorphismes forment une partie stable de E' , et que $\binom{xe}{ye} \in r \iff \binom{x}{y} \in r$; si e, e', e'' sont des épimorphismes :

(α) Associativité : $\binom{x}{y} \in t(sr) \iff \exists e, z, \binom{xe}{z} \in sr \text{ et } \binom{z}{ye} \in t$

$\Leftrightarrow \exists e, z, e', z', \begin{pmatrix} xee' \\ z' \end{pmatrix} \in r \text{ et } \begin{pmatrix} z' \\ ze' \end{pmatrix} \in s, \text{ et } \begin{pmatrix} ze' \\ yee' \end{pmatrix} \in t \Rightarrow \begin{pmatrix} z' \\ yee' \end{pmatrix} \in ts$
 et $\begin{pmatrix} xee' \\ z' \end{pmatrix} \in r \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (ts)r \Rightarrow t(sr) \subseteq (ts)r$. De même $(ts)r \subseteq t(sr)$.

(β) Élément neutre : Si $r = (A \times B)_{mE'}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'}$ $\Leftrightarrow \exists e, z$,
 $\begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au \\ Au \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z \\ ye \end{pmatrix} \in r \Rightarrow z = Au = xe \Rightarrow \begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix} \in r \Rightarrow r \subseteq r \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'}$.

Inversement, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \Rightarrow x = av, y = bv$, et il existe $z = av$,
 $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av \\ av \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'}$ et $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av \\ bv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} v \in r$, et $r \subseteq r \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'}$. De même, on prouve
 $\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}_{E'} r = r$.

(γ) Compatibilité de la relation d'ordre : Supposons $r \subseteq r'$, et soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in sr$.
 Alors, il existe z et e , $\begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} \in r$, donc $\begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} \in r'$ et $\begin{pmatrix} z \\ ye \end{pmatrix} \in s$; donc
 $sr \subseteq sr'$.

(δ) Axiome (INV-ii) : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (sr)^o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in sr \Leftrightarrow \exists z, e, \begin{pmatrix} ye \\ z \end{pmatrix} \in r$
 et $\begin{pmatrix} z \\ xe \end{pmatrix} \in s \Leftrightarrow \begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} \in s^o$ et $\begin{pmatrix} z \\ ye \end{pmatrix} \in r^o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r^o s^o$.

(ϵ) Modularité : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in sr \wedge t \Rightarrow \exists e, z, \begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} \in r$ et $\begin{pmatrix} z \\ ye \end{pmatrix} \in s$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix} \in t$ et $\begin{pmatrix} ye \\ z \end{pmatrix} \in s^o \Rightarrow \begin{pmatrix} xe \\ z \end{pmatrix} \in s^o t \wedge r \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in s(r \wedge s^o t)$.

(θ) Si $r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{E'}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un monomorphisme. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in rr^o \Rightarrow \exists z, e$ tels
 que $xe = bu, z = au = av, ye = bv$; $r \in IG \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow xe = ye$. Donc
 $r \in IG \Leftrightarrow (au = av \Rightarrow bu = bv) \Leftrightarrow (au = av \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} v)$
 $\Leftrightarrow (au = av \Rightarrow u = v, \text{ car } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est un monomorphisme})$. Donc $r \in IG$ si, et
 seulement si, a est un monomorphisme.

(φ) $r \in SD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'} \subseteq rr^o \Leftrightarrow e = bu = bv, z = au = av$. Si b est
 un épimorphisme, il suffit de prendre $u = v$ neutres, $b = e, z = a$ et $r \in SD$.
 Si $r \in SD, e = bu, e$ épimorphisme $\Rightarrow b$ épimorphisme. Donc $r \in SD$ est
 équivalent à b épimorphisme.

(c) Comme $\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}$ est un monomorphisme, $f(a) = \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}_{E'}$ est une relation, et comme
 A est un monomorphisme et un épimorphisme, d'après (b), $f(a)$ est une application
 de E . Montrons que f est un foncteur :

$f(A) = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}_{E'}$ est neutre dans E . Si $f(a) = \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}_{E'}$, $f(b) = \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix}_{E'}$. On a
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f(b)f(a) \Leftrightarrow \exists e \text{ et } z, xe = Au, z = au, z = Bv, ye = bv$
 $\Leftrightarrow xe = u, ye = bau \Leftrightarrow \begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ bau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ ba \end{pmatrix} u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A \\ ba \end{pmatrix}_{E'} = f(ba)$.
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}_{E'} = \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}_{E'} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}_A \Rightarrow u = A \Rightarrow a = b$.
 Donc f est injectif, et si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{E'}$ est une application de E , a est un épi-
 morphisme et un monomorphisme, donc un isomorphisme (iv) et par suite

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{E'} = \begin{pmatrix} aa^{-1} \\ bb^{-1} \end{pmatrix}_{E'} = \begin{pmatrix} C \\ ba^{-1} \end{pmatrix}_{E'}$$

où C est la source de ba^{-1} et $(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})_{E'} = f(ab^{-1})$, et donc f est surjectif.

PROPOSITION V.6.2. - Soit E' une catégorie vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) de V.6.1, E la catégorie modulaire de ses relations et $r = (\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})_{E'} \in E$:

(a) On a $I(r) = (\begin{smallmatrix} \text{Im } b \\ \text{Im } b \end{smallmatrix})_{E'}$

(b) E vérifie l'axiome (COK-i), avec $W((\begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix})_{E'}) = (\begin{smallmatrix} p \\ p' \end{smallmatrix})_{E'}$, où p et p' sont les projections de $A \times A$ dans A .

(c) Si E' a un objet nul 0 , E vérifie (K-i), avec $w((\begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix})_{E'}) = (\begin{smallmatrix} 0(A, 0) \\ 0(A, 0) \end{smallmatrix})_{E'}$ et si E' admet des noyaux, $K(r) = (\begin{smallmatrix} a \text{ Ker } b \\ a \text{ Ker } b \end{smallmatrix})_{E'}$.

(d) On suppose que $\text{Hom}(A, B)$ dans E' soit muni d'une structure de groupe additif, non nécessairement commutatif, le produit étant distributif à gauche par rapport à l'addition (en particulier E' peut être additive) : on a $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in r$ et $(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}) \in r \implies (\begin{smallmatrix} x - x' \\ y - y' \end{smallmatrix}) \in r$.

(e) On suppose que E' est une catégorie abélienne :

(α) E est bimodulaire ;

(β) $I'(r) = (\begin{smallmatrix} a \text{ Ker } b \\ 0 \end{smallmatrix})_{E'} \vee (\begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix})_{E'}$;

(γ) $K'(r) = (\begin{smallmatrix} \text{Im } b \\ 0 \end{smallmatrix})_{E'} \vee (\begin{smallmatrix} B \\ B \end{smallmatrix})_{E'}$;

(δ) E vérifie les axiomes (K-ii), (K-iii).

Démonstration.

(a) $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in rr^0 \wedge (\begin{smallmatrix} B \\ B \end{smallmatrix})_{E'} \implies \exists e, xe = bu, ye = bv$ (V.6.1(b-ε)) et $bu = bv$.
Donc $(\begin{smallmatrix} xe \\ ye \end{smallmatrix}) \in (\begin{smallmatrix} b \\ b \end{smallmatrix})_{E'} \implies (\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in (\begin{smallmatrix} \text{Im } b \\ \text{Im } b \end{smallmatrix})_{E'}$ (ii).

Réciproquement, $(\begin{smallmatrix} \text{Im } b \\ \text{Im } b \end{smallmatrix}) \in (\begin{smallmatrix} B \\ B \end{smallmatrix})_{E'}$, et il existe $e' = \text{Coim}(b)$, tel que $(\text{Im } b)e' = b$, $(\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}) \in r^0$, et $(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}) \in r$. Donc $(\begin{smallmatrix} \text{Im } b \\ \text{Im } b \end{smallmatrix}) \in rr^0$.

(b) Si m est un monomorphisme de but $A \times A$, $m = (\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \implies x = pm, y = p'm$ et $m = (\begin{smallmatrix} p \\ p' \end{smallmatrix})m \implies m \in (\begin{smallmatrix} p \\ p' \end{smallmatrix})_{E'}$, et $(\begin{smallmatrix} p \\ p' \end{smallmatrix})$ est un monomorphisme en vertu de la définition du produit direct, et on vérifie immédiatement que $(\begin{smallmatrix} p \\ p' \end{smallmatrix})_{E'}$ est une équivalence dans $A \times A$.

(c) $(\begin{smallmatrix} 0(A, 0) \\ 0(A, 0) \end{smallmatrix})$ est un monomorphisme de but $A \times A$, car $0(A, 0)u$ n'existe que si u est un morphisme nul, et $(\begin{smallmatrix} 0(A, 0) \\ 0(A, 0) \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} AxX \\ AyX \end{smallmatrix})(\begin{smallmatrix} 0(X, 0) \end{smallmatrix}) \forall (\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$, montre que $(\begin{smallmatrix} 0(A, 0) \\ 0(A, 0) \end{smallmatrix})_{E'} = w$ est minimum parmi les sous-objets de $A \times A$. On vérifie que c'est un morphisme entier, symétrique, idempotent (K-i). Supposons que E' admette des noyaux, $(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in r^0 w \implies \exists e$ et $z, xe = 0, z = 0, z = bu$,

$ye = au$. Donc $u = (\text{Ker } b)v$. Mais $a \text{ Ker } b$ est un monomorphisme, car
 $(a \text{ Ker } b)t = (a \text{ Ker } b)t' \implies \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\text{Ker } b)t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\text{Ker } b)t' \implies t = t'$, car
 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{Ker } b$ est un monomorphisme, et par suite $r^0 w \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} E'$, et inversement
 $\begin{pmatrix} 0 \\ b \text{ Ker } b \end{pmatrix} \in w$ et $\begin{pmatrix} b \text{ Ker } b \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} \in r^0 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} \in r^0 w$. Donc $r^0 w = \begin{pmatrix} 0 \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} E'$
et par suite, $(a), K(r) = I(r^0 w) = \begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} E'$.

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \implies x = at, y = bt; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in r \implies x' = at', y' = bt'$. Donc

$$x - x' = a(t - t'), y - y' = b(t - t') \implies \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(t - t') \in r.$$

(e) Soient $(r, s, t) \in E^3$, avec $r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} E'$, $s = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} E'$, $t = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} E'$. Le treillis des sous-objets de $A \times B$ est modulaire.

(α) Supposons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (r \vee ts^0)s$. D'après V.6.1, il existe e, e', z tels que $xe = cu, z = du, ze' = au' + h, yee' = bu' + k$, avec $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in ts^0$. Donc il existe e'' et z' tels que $he'' = du'', z' = cu'' = fu''', ke'' = gu'''$. Mais $ze'e'' = au'e'' + du'' = du'e'' \implies ze'e'' - du'' = d(ue'e'' - u'') = au'e''$ (1).

On a aussi $c(ue'e'' - u'') = cue'e'' - fu''' = xee'e'' - fu'''$ et $yee'e'' - gu''' = bu'e''$. Donc $\begin{pmatrix} xee'e'' - fu''' \\ yee'e'' - gu''' \end{pmatrix} \in rs$, car il existe $z'' = d(ue'e'' - u'') = au'e''$, tel que $\begin{pmatrix} xee'e'' - fu''' \\ z'' \end{pmatrix} \in s$ et $\begin{pmatrix} yee'e'' - gu''' \\ z'' \end{pmatrix} \in r$. Donc $\begin{pmatrix} xee'e'' \\ yee'e'' \end{pmatrix} \in rs \vee t$.

(β) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I'(r) = r^0 r \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E' \implies \exists e, e'$ tels que $\begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$, avec $x'e' = au, z = bu = bu', y'e' = au'$. Donc

$$\begin{pmatrix} x'e' \\ y'e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - au' \\ au' - au' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} au' \\ au' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u - u') \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Mais $b(u - u') = 0 \implies (u - u') = (\text{Ker } b)v$, et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E'$.

Réciproquement, $z = b \text{ Ker } b = b.0 = 0$, $\begin{pmatrix} b.0 \\ a.0 \end{pmatrix} \in r^0$ et $\begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ b \text{ Ker } b \end{pmatrix} \in r$ entraînent $\begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ 0 \end{pmatrix} \in r^0 r$, et $\begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E' \subseteq I'(r)$.

(γ) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Wr^0 \iff \exists e, z$ tels que $xe = bu, z = au = pv, ye = p'v$. D'après la définition du produit direct $z = pv, ye = p'v$ est réalisé $\forall (z, y)$. Donc y est arbitraire et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} (\text{Im } b)p \\ p' \end{pmatrix} E'$.

Réciproquement, $\begin{pmatrix} (\text{Im } b)p \\ p' \end{pmatrix} \in Wr^0$ car $\text{Coim } b : p = x$ est un épimorphisme, et $\text{Coim } b = px$, $\begin{pmatrix} (\text{Im } b)px \\ a \end{pmatrix} \in r^0$, et $\begin{pmatrix} a \\ p, x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix} y \in W$. Donc $Wr^0 = \begin{pmatrix} (\text{Im } b)p \\ p' \end{pmatrix} E'$ et, (a), $K'(r) = I'(Wr^0) = \begin{pmatrix} (\text{Im } b)p \text{ Ker } p' \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} E' = \begin{pmatrix} \text{Im } b \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} E'$.

(δ) On déduit de (β) et (γ) si $s = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} E' \in E$:

$$\begin{aligned} K(r) \subseteq K(s) &\iff \begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ a \text{ Ker } b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} c \text{ Ker } d \\ c \text{ Ker } d \end{pmatrix} E' \iff a \text{ Ker } b \in (c \text{ Ker } d) E' \\ \implies \begin{pmatrix} a \text{ Ker } b \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E' = I'(r) \subseteq \begin{pmatrix} c \text{ Ker } d \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E' = I'(s) \implies sr^0r \subseteq s \\ \implies K(r) \subseteq K(s) \text{ ce qui établit (K-ii'')} \text{ (V.2.1(a), V.3.2(j) et V.5.3)}. \end{aligned}$$

On a $KK'(r) = K(\begin{pmatrix} \text{Im } b \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E')$. Tout élément de $K'(r)$ se présente sous la forme $\begin{pmatrix} (\text{Im } b)x + y \\ y \end{pmatrix}$, et comme x et y sont arbitraires, on peut poser $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix} z$, et le monomorphisme qui engendre $K'(r)$ est $\begin{pmatrix} (\text{Im } b)p + p' \\ p' \end{pmatrix}$ et par suite, on a

$$KK'(r) = \left(\begin{pmatrix} (\text{Im } b)p + p' \\ (\text{Im } b)p + p' \end{pmatrix} \text{Ker } p' \right) E' = \begin{pmatrix} \text{Im } b \\ \text{Im } b \end{pmatrix} E' = I(r).$$

Si r est entier, symétrique, idempotent, $I(r) = r$, et $r = K(K'(r)) = K(I'K'(r))$, où $I'K'(r)$ est une équivalence (V.5.2(a^{***})), ce qui vérifie l'axiome (K-iii).

Remarques. - On peut vérifier que $K'(r)$ et $I'(r)$ sont des équivalences. Si m est un monomorphisme, $r = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} E' \vee \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} E'$ est bien symétrique, car $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \implies xe = mh + k, ye = k \iff xe = xe, ye = -mh + xe$, et $\begin{pmatrix} ye \\ xe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} (-h) + \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} xe \in r$, ce qui prouve que r est bien symétrique (cf. V.4.1(c)).

On peut montrer que les axiomes (IM-i) à (IM-iv), (K-i) et (K-ii'') sont suffisants pour définir de manière satisfaisante une homologie. L'axiome (K-ii'') qui n'est pas vérifié dans la catégorie E des relations binaires, par exemple, est admis d'emblée par PUPPE [4], et MAC-LANE [3] part, de même, de l'hypothèse que tous les morphismes de E sont réguliers, ce qui restreint également le champ d'application de la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LÉVY-BRUHL (Jacques). - Demi-groupes et catégories à involution, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 19e année, 1965/66, n° 9, 48 p.
- [2] LÉVY-BRUHL (Jacques). - Sur les notions d'image, noyau, coimage, conoyau, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 262, 1966, p. 1381-1384.
- [3] MACLANE (Saunders). - An algebra of additive relations, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 1043-1051.
- [4] PUPPE (Dieter). - Korrespondenzen in abelschen Kategorien, Math. Annalen, t. 148, 1962, p. 1-30.