Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX

Éléments algébriques dans les adèles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 1 (1967-1968), exp. n° 4, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 4

4 décembre 1967

ÉLÉMENTS ALGÉBRIQUES DANS LES ADÈLES

par Annette DECOMPS-GUILLOUX

Le but de cet exposé est d'introduire, dans les adèles, un ensemble généralisant l'ensemble T de Salem, dans la même optique qu'a été faite la généralisation de l'ensemble S des nombres de Pisot par F. BERTRANDIAS [2]. Rappelons la définition des ensembles S et T :

S <u>est l'ensemble des entiers algébriques</u> $\theta > 1$ <u>dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle unité</u>.

T <u>est l'ensemble des entiers algébriques</u> $\tau > 1$, <u>dont tous les conjugués sont intérieurs, ou sur le cercle unité, l'un au moins étant sur le cercle unité</u>.

La définition de T entraîne qu'un élément τ de T est zéro d'un polynôme Π réciproque, de degré pair, dont tous les zéros, sauf τ et $1/\tau$, appartiennent au cercle unité.

Ces ensembles peuvent être caractérisés par des propriétés de répartition modulo 1 : θ étant un réel > 1 , l'étude de la décomposition pour un élément λ convenable non nul

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n ,$$

où u_n est un entier rationnel et où ε_n vérifie les inégalités $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, permet les caractérisations suivantes :

- L'existence d'un élément λ , tel que, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2e\theta(\theta + 1)(1 + \log \lambda)}$$

soit vérifiée, caractérise les éléments θ de la réunion des ensembles S et T (C. PISOT [7]).

- Pour un élément θ algébrique, l'existence d'un élément λ non nul, tel que la dondition

$$\lim_{n\,\infty} \varepsilon_n = 0$$

soit réalisée, ou pour un élément θ réel, l'existence d'un élément λ non nul, tel que la condition :

$$\sum_{n=1}^{N} n\varepsilon_n^2 = o(N)$$

caractérise les éléments θ de l'ensemble S (SALEM [8]).

- Pour un élément τ réel, l'existence d'un élément λ non nul, tel que la partie réelle $R[\sum \varepsilon_n x^n]$ soit bornée supérieurement dans le cercle unité (sans que $\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0$), caractérise les éléments τ de l'ensemble T (R. SALEM [8]).

Rappelons encore que si l'ensemble S est fermé, l'ensemble dérivé de l'ensemble T contient l'ensemble S , le grand problème posé par ces ensembles étant de savoir si l'ensemble dérivé de T est l'ensemble S .

1. Définitions. Notations.

Soit P l'ensemble de toutes les valuations distinctes du corps Q des rationnels ; la valuation ordinaire, représentée par 0 , sera notée $|\ |$ ou $|\ |_0$ et, p étant un nombre premier, la valuation p-adique correspondante sera notée $|\ |_p$ et normée par $|p|_p = \frac{1}{p}$.

A tout élément p de P (éventuellement $p = 0$), on associe le corps Q_p , complété du corps Q par rapport à la valuation correspondante.

Soit I un sous-ensemble fini non vide de P . Nous considèrerons toujours le cas d'un I-adèle V_I , anneau isomorphe algébriquement et topologiquement au produit $\prod_{p\in I} Q_p$ dont on note e_I l'élément unité.

Pour un élément x de V_I , on note x_p la composante appartenant à Q_p , et $|x|_p = |x_p|_p$.

Les anneaux V_I ont été étudiés par F. BERTRANDIAS dans sa thèse [2], dont nous utiliserons les notations, en particulier :

I^- désigne l'ensemble des éléments non nuls de I ;

I^+ désigne la réunion de I et de $\{0\}$;

$Z[I]$ désigne l'anneau des rationnels n'ayant en dénominateur que des facteurs premiers appartenant à I^- .

L'anneau $Z[I]e_I$ joue dans V_I un rôle analogue à celui joué dans les réels par l'anneau Z des entiers rationnels comme le montre la décomposition d'ARTIN [1] :

<u>Pour tout élément</u> x <u>de l'anneau</u> V_I , <u>il existe un élément</u> E(x) <u>de l'anneau</u> Z[I] <u>tel que la différence</u> $\varepsilon_I(x) = x - e_I\, E(x)$ <u>vérifie les inégalités suivantes</u> :

- <u>pour tout</u> p <u>de</u> I^- , $|\varepsilon_I(x)|_p \leq 1$;
- <u>si</u> 0 <u>n'appartient pas à</u> I : $a \leq -E(x) < a + 1$
  <u>si</u> 0 <u>appartient à</u> I : $a \leq \varepsilon_0(x) < a + 1$

Le choix du nombre réel a rend la décomposition unique. Nous prendrons toujours $a = -\frac{1}{2}$.

F. BERTRANDIAS a montré qu'à un élément algébrique de l'anneau V_I on peut associer un polynôme à coefficients rationnels, unitaire, appelé polynôme minimal de θ et donc un polynôme à coefficients entiers, primitif, dont on parlera dans la suite comme du polynôme associé à θ. Soit A un tel polynôme ; on peut encore faire correspondre à θ la partition (I_h) de I telle que le polynôme A se décompose en un produit

$$A(X) = \prod A_h(X)$$

où les polynômes A_h sont à coefficients entiers, irréductibles et distincts deux à deux, et où θ_p est racine de A_h si p appartient à I_h.

Les ensembles $S_I^{p'}$ sont des ensembles remarquables d'éléments algébriques.

DÉFINITION de l'ensemble $S_I^{p'}$. - $S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments θ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$, et pour lesquels il existe un polynôme à coefficients entiers rationnels A, ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A,

- pour tout p de P, les racines de A dans la clôture algébrique de Q_p (distinctes de θ_p si p appartient à I) appartiennent au disque $|x|_p \leq 1$,

- les racines de A dans la clôture algébrique de $Q_{p'}$ (distinctes de $\theta_{p'}$ si p' appartient à I) appartiennent au disque $|x|_{p'} < 1$.

THÉORÈME 1. - Soit θ un élément de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$. θ appartient à $S_I^{p'}$ si, et seulement si, il existe un élément λ inversible de V_I tel que :

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n) = 0 .$$

THÉORÈME 2. - Soit θ un élément de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$. θ appartient à $S_I^{p'}$ si, et seulement si, il existe un élément λ inversible de V_I tel que :

$$\sum_{n=1}^{N} n|\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'}^2 = o(N) .$$

Dans les deux cas λ appartient à l'anneau $Q_I[\theta]$.

2. Définition de l'ensemble S_I. Méthode de Thue.

La caractérisation de l'ensemble réunion des ensembles S et T, due à C. PISOT et rappelée au début de cet exposé, est basée sur la méthode de Thue. En utilisant cette méthode dans les I-adèles, on pouvait donc penser pouvoir caractériser un ensemble contenant, outre la réunion des ensembles $S_I^{p'}$ pour tous les p' de P, un ensemble généralisant l'ensemble de Salem. Pour montrer qu'un élément est algébrique, on lui associe en général une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ dont on montre qu'elle est le développement de Taylor d'une fraction rationnelle. La méthode de Thue s'appuie sur le principe des tiroirs, et consiste à chercher des entiers rationnels a_i tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait la relation

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_s u_{n+s} = 0 .$$

On cherche, en utilisant une majoration des coefficients a_i de la relation supposée réalisée entre les u_n, le nombre de valeurs que peut prendre une telle expression. On dénombre les systèmes possibles compte tenu de la majoration des coefficients. Si le nombre des systèmes est supérieur au nombre de valeurs que peut prendre l'expression, deux systèmes distincts donnent la même valeur, et il y a une relation linéaire et homogène, à coefficients non tous nuls entre les u_n.

2.1. DÉFINITION de l'ensemble S_I. - S_I <u>est l'ensemble des éléments</u> θ <u>de</u> V_I <u>vérifiant pour tout</u> p <u>de</u> I, $|\theta|_p > 1$, <u>et pour lesquels il existe un polynôme</u> A <u>à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes</u> :

- θ <u>est racine de</u> A ;
- <u>pour tout</u> p <u>de</u> P, <u>les racines de</u> A <u>dans la clôture algébrique de</u> Q_p (<u>distinctes de</u> θ_p <u>pour</u> p <u>appartenant à</u> I) <u>appartiennent au disque</u> $|x|_p \leq 1$.

2.2. <u>Méthode de Thue appliquée aux éléments de l'ensemble</u> S_I [5].

(a) <u>Notations</u>. - On considère deux éléments θ et λ de V_I, et l'on pose, pour tout p de I^-,

$$p^{t_p} = |\theta|_p \qquad \text{et} \qquad p^{b_p} = |\lambda|_p .$$

On définit encore,

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p}$$

$$m = \prod_{p \in I^-} p^{b_p} \text{ multiplié par } \lambda_0 \text{ si } 0 \text{ appartient à } I .$$

On suppose λ_0 et θ_0 tous deux positifs.

(b) Enoncé du THÉORÈME. - Soit θ un élément de l'anneau V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que θ appartienne à l'ensemble S_I est qu'il existe un élément λ de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\lambda|_p > 1$ tel que l'on ait, pour tout entier $n \geqslant 0$:

- si 0 n'appartient pas à I :

$$|E(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{q^2\, e(1 + \log m)}, \tag{A}$$

- si 0 appartient à I :

$$|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{2eq^2\, \theta_0(\theta_0 + 1)(1 + \log m)}. \tag{A'}$$

(c) Démonstration de la condition suffisante. - Soit $u_n = E(\lambda\theta^n)$. On se propose de trouver des entiers rationnels $a_0, \dots, a_s$, bornés par a en valeur absolue, tels que l'on ait, pour tout entier n :

$$V_n = a_0\, u_n + a_1\, u_{n+1} + \dots + a_s\, u_{n+s} = 0 .$$

En notant

$\frac{1}{v}$ une borne supérieure pour $|u_n|$ si $0 \notin I$

$\frac{1}{\psi}$ une borne supérieure pour $|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)|$ si $0 \in I$

on montre successivement les points suivants :

(α) Les conditions $V_0 = 0$ et $v > (s+1)aq$ si 0 n'appartient pas à I (resp. $\psi > (1 + \theta_0)(s+1)aq$ si 0 appartient à I), entraînent, pour tout entier $n \geqslant 0$ $V_n = 0$.

Cette démonstration est basée sur le fait que, V_n, étant un élément de l'anneau $Z[I]$, l'inégalité

$$|V_n| \prod_{p \in I^-} |V_{n+1}|_p < 1$$

entraîne $V_n = 0$. La différence des formulations, suivant que 0 n'appartient pas ou appartient à I, provenant de la différence des majorations de $|V_n|$ dans les deux cas.

(β) On montre alors que, quel que soit l'entier $s \geqslant 1$, on peut trouver des entiers $a_0, \dots, a_s$ tels que $V_0 = 0$ si les conditions suivantes sont réalisées :

$a \geqslant qm^{1/s} - 1$ si 0 n'appartient pas à I,

$a \geqslant 2q\theta_0\, m^{1/s} - 1$ si 0 appartient à I.

Cette partie de la démonstration s'appuie sur le principe des tiroirs.

(γ) En prenant l'entier s , défini par les inégalités

$$s - 1 \leqslant \log m < s ,$$

et l'entier a par les inégalités

$$a < qm^{1/s} \leqslant a + 1 , \text{ si } 0 \text{ n'appartient pas à } I ,$$

$$a < 2q\theta_0 \, m^{1/s} \leqslant a + 1 , \text{ si } 0 \text{ appartient à } I ,$$

on peut réaliser $V_0 = 0$, et les inégalités (A) ou (A') entraînent alors les inégalités de (α), et donc, pour tout entier n , $V_n = 0$.

(δ) On montre alors facilement que θ appartient à l'ensemble S_I .

(d) Démonstration de la condition nécessaire. - Cette démonstration consiste en la recherche à partir d'un élément θ de S_I d'un élément λ de l'anneau $Q_I[\theta]$ tel que l'inégalité (A) (resp. (A')) soit vérifiée et repose sur l'existence, montrée par F. BERTRANDIAS, dans tout anneau $Q_I[\theta]$ d'éléments de l'ensemble $S_I^{p'}$ ayant le degré de l'anneau.

Soient θ un élément de degré s de l'ensemble S_I , (I_h) la partition de I associée. On considère un élément μ de l'anneau $Q_I[\theta]$, appartenant à l'ensemble $S_I^{p'}$ (pour $p' \in I^+$), et dont on note μ_h la composante dans les divers corps $Q_{I_h}[\theta_{I_h}]$, pour tous les éléments I_h de la partition de I .

En appelant λ l'élément de composantes $\mu_h^{\nu_h}$, où ν_h est un entier positif, et en notant

$$\lambda^{(2)} , \ldots , \lambda^{(s)} \text{ les conjugués de } \lambda \text{ dans } V_I ,$$

$$\theta^{(2)} , \ldots , \theta^{(s)} \text{ les conjugués de } \theta \text{ dans } V_I ,$$

l'expression $\lambda\theta^n + \lambda^{(2)} \theta^{(2)n} + \ldots + \lambda^{(s)} \theta^{(s)n}$ prend ses valeurs dans l'anneau $Z[I]$, et l'on peut choisir un système d'entiers $\nu_1 , \ldots , \nu_m$ tels que cette expression représente le terme principal u_n de la décomposition d'Artin de $\lambda\theta^n$ et que l'inégalité (A) ou (A') soit vérifiée, ce qui est toujours possible car les zéros complexes du polynôme dont μ est racine sont tous inférieurs à 1 en module.

(e) La condition (A) (resp. (A')) porte sur la composante réelle, on peut avoir des expressions analogues portant sur une composante p-adique ou sur un produit de composantes.

3. Partition de l'ensemble S_I .

3.1. Cette partition est basée sur l'étude de la répartition dans le plan complexe des zéros des polynômes A , associés aux éléments de l'ensemble S_I et sur la remarque qu'un polynôme à coefficients réels, irréductible, ayant un zéro sur le cercle unité, a nécessairement un second zéro imaginaire conjugué du précédent sur ce cercle, et est donc réciproque.

Soient θ un élément de l'ensemble S_I , I_h la partition de I correspondante ; le polynôme A se décompose en un produit

$$A(x) = \prod A_h(x) ,$$

où les polynômes A_h sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, deux à deux distincts, et tels que θ_p est racine de A_h si p appartient à I_h .

Dans le cas où le polynôme A a, dans C , au moins un zéro sur le cercle unité (ce zéro étant différent de ± 1), l'un au moins des polynômes A_h a un zéro dans C sur le cercle unité. Soit B_h un tel polynôme, (nous réservons la dénomination A_h à ceux des polynômes intervenant dans la décomposition du polynôme A dont tous les zéros sont intérieurs dans C au cercle unité) ; un polynôme B_h est donc réciproque, et tous ses zéros (sauf θ_0 et $1/\theta_0$ si 0 appartient à I_h) appartiennent au cercle unité.

Donc la décomposition $A(x) = \prod A_h(x)$ présente l'un ou l'autre des aspects suivants :

(1) la décomposition ne fait intervenir que des polynômes A_h ;

(2) la décomposition fait intervenir à la fois des polynômes A_h et B_h ;

(3) la décomposition ne fait intervenir que des polynômes B_h .

Si la décomposition est de la première forme, l'élément θ appartient à S_I^0 ; nous appellerons Σ_I^0 l'ensemble des éléments θ de S_I pour lesquels le polynôme A a une décomposition de la forme (2), et T_I ceux des éléments de S_I pour lesquels le polynômes A a une décomposition de la forme (3).

3.2. DÉFINITION de l'ensemble Σ_I^0 . - Σ_I^0 <u>est l'ensembles des éléments</u> σ <u>de</u> V_I , <u>vérifiant pour tout</u> p <u>de</u> I , $|\sigma|_p > 1$, <u>et pour lesquels il existe un polynôme</u> A <u>à coefficients rationnels ayant les propriétés suivantes</u> :

- σ <u>est racine de</u> A ;

- <u>pour tout</u> p <u>de</u> P , <u>les racines de</u> A <u>dans la clôture algébrique de</u> Q_p , <u>appartiennent au disque</u> $|x|_p \leq 1$, <u>sauf</u> θ_p <u>si</u> p <u>appartient à</u> I ;

- le polynôme A est dans l'anneau $Z[X]$ le produit de deux polynômes

$$A(X) = A'(X)\ B'(X)$$

où, dans $\mathbb{C}$, les zéros du polynôme A' (sauf éventuellement σ_0) sont tous intérieurs au cercle unité, et ceux du polynôme réciproque et de degré pair B', appartiennent tous (sauf éventuellement σ_0 et $1/\sigma_0$, dans ce cas B' est au moins de degré 4) au cercle unité.

3.3. DÉFINITION de l'ensemble T_I. - T_I est l'ensemble des éléments τ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\tau|_p > 1$, et pour lesquels il existe un polynôme B à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes :

- τ est racine de B ;
- B est un polynôme réciproque qui a une expression de la forme

$$B(X) = qX^{2s} + q_1\ X^{2s-1} + \ldots + q_1\ X + q$$

où $q = \prod_{p \in I^-} |\tau|_p$ et, pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$, et dont tous les zéros dans C, appartiennent au cercle unité (sauf τ_0 et $1/\tau_0$ si 0 appartient à I, on suppose dans ce cas que le polynôme B_{h_0} irréductible, et dont τ_0 est racine, est au moins de degré 4.

3.4. Remarques. - Soit σ un élément de Σ_I^0, racine d'un polynôme A,

$$A(X) = A'(X)\ B'(X)\ ,$$

pour tout p de I, σ_p est racine de A' ou de B'. Soient I_1 l'ensemble des éléments p de (I_h) tels que

$$\sigma_p \text{ est racine du polynôme } A'\ ,$$

et I_2 l'ensemble des éléments p de (I_h) tels que

$$\sigma_p \text{ est racine du polynôme } B'\ .$$

L'élément σ appartient à l'ensemble $S_{I_1}^0 \times T_{I_2}$; réciproquement, un élément de cet ensemble est un élément de Σ_I^0 et l'on peut considérer Σ_I^0 comme isomorphe à la réunion des ensembles produits $S_J^0 \times T_K$, pour tous les couples J et K de sous-ensembles non vides J et K de I dont l'intersection est vide et la réunion est l'ensemble I.

4. Caractérisations des ensembles S_I^0 , Σ_I^0 et T_I .

Le but de ce paragraphe est de caractériser les trois sous-ensembles qui forment la partition de l'ensemble S_I .

Dans certains cas, nous donnerons une caractérisation directe d'un ensemble d'éléments de l'anneau V_I , dans d'autres au contraire, il s'agira de la caractérisation d'un sous-ensemble de l'ensemble S_I .

La démonstration de la condition suffisante est très différente dans les deux cas ; dans le premier en effet, le point principal est de montrer que l'élément est algébrique, et la démonstration fait appel à un critère de rationnalité de certaines séries entières ; dans le second, on suppose au contraire l'élément algébrique, et la démonstration beaucoup plus rapide revient à montrer que l'élément n'appartient pas aux autres sous-ensembles disjoints de l'ensemble S_I .

Les deux théorèmes (théorèmes 1 et 2 du paragraphe 1) fournissent un exemple des deux types de démonstration, et caractérisent l'ensemble S_I^0 .

Pour l'ensemble Σ_I^0 , nous le caractériserons comme sous-ensemble de l'ensemble S_I , au contraire, nous donnerons de l'ensemble T_I une caractérisation directe.

4.1. Caractérisation du sous-ensemble Σ_I^0 de S_I [6].

– On montre facilement le théorème suivant, qui exprime que, pour un sous-ensemble I_1 de I , σ_{I_1} appartient à $S_{I_1}^0$.

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un élément σ de l'ensemble S_I appartienne au sous-ensemble Σ_I^0 , est qu'il existe un élément λ de l'anneau $Q_I[\sigma]$ et un sous-ensemble non vide I_1 de I , tel que la composante λ_{I_1} de λ étant inversible, on ait, dans la décomposition d'Artin de λ_{I_1} , $\sigma_{I_1}^n$ dans l'anneau V_{I_1} :

– *si* 0 *n'appartient pas à* I_1 :

(b)
$$\lim_{n\infty} E_{I_1}(\lambda_{I_1}\ \theta_{I_1}^n) = 0 ,$$

– *si* 0 *appartient à* I_1 :

(b')
$$\lim_{n\infty} \eta_0(\lambda_{I_1}\ \theta_{I_1}^n) = 0 ,$$

en supposant que les conditions :

- si 0 n'appartient pas à I_1 ,

(a) $$\lim_{n\infty} E(\lambda\theta^n) = 0 \ ;$$

- si 0 appartient à I_1 ,

(a') $$\lim_{n\infty} \varepsilon_0(\lambda\theta^n) = 0$$

ne sont pas réalisées.

Les conditions restrictives (non (a)) et (non (a')) expriment que l'élément θ n'appartient pas à l'ensemble S_I^0 .

4.2. Caractérisation de l'ensemble T_I [6]. - L'analogie entre l'ensemble T_I et l'ensemble T de Salem apparaît dans leurs définitions respectives, nous allons la préciser par la démonstration d'un théorème qui généralise, pour l'ensemble T_I , la caractérisation de Salem rappelée au début de cet exposé.

(a) Enoncé du THÉORÈME. - Soit τ un élément de l'anneau V_I vérifiant, pou tout p de I , $|\tau|_p > 1$; la condition nécessaire et suffisante pour que τ appartienne à l'ensemble T_I est qu'il existe un élément λ inversible de V_I , et un nombre réel M tels que l'on ait, pour $|x| < 1$,

- si 0 n'appartient pas à I :

(C) $$R[\sum_0^\infty E(\lambda\tau^n)\ x^n] \geq M \ ;$$

- si 0 appartient à I :

(C') $$R(\sum_0^\infty \varepsilon_0(\lambda\tau^n)\ x^n) \leq M$$

en supposant, en outre, que les conditions suivantes :

d'une part, l'égalité,

- si 0 n'appartient pas à I :

(a) $$\lim_{n\infty} E(\lambda\tau^n) = 0 \ ;$$

- si 0 appartient à I :

(a') $$\lim_{n\infty} \varepsilon_0(\lambda\tau^n) = 0 \ ,$$

et d'autre part, l'existence d'un sous-ensemble I_1 de I non vide et inclus strictement dans I tel que l'on ait,

- si 0 n'appartient pas à I_1 :

(b) $$\lim_{n\infty} E_{I_1}(\lambda_{I_1} \tau_{I_1}^{n}) = 0 ;$$

- si 0 appartient à I_1 :

(b') $$\lim_{n\infty} \eta_0(\lambda_{I_1} \tau_{I_1}^{n})$$

ne sont pas réalisées.

Comme dans le domaine réel pour montrer que la condition est suffisante, le point principal de la démonstration est de prouver que, si l'on pose $E(\lambda\theta^n) = u_n$, la série $\sum u_n X^n$ représente une fraction rationnelle, tandis que la démonstration de la condition nécessaire repose sur l'existence déjà évoquée, d'éléments des ensembles $S_1^{p'}$ dans tout anneau d'éléments algébriques.

(b) Condition suffisante. - On peut lier, dans le domaine réel, la démonstration du théorème de Salem au critère de rationnalité des séries entières à coefficients entiers, qui montre que , si la fonction associée est à caractéristique bornée dans le cercle unité, c'est une fraction rationnelle ; ce résultat, dû à CANTOR [3], peut s'étendre aux séries entières à coefficients dans l'anneau $Z[I]$, en ajoutant une condition relative aux valuations p-adiques des éléments u_n pour tous les p de I^- ; en effet, la condition de Cantor exprime que la limite du déterminant de Hankel d_n de la série est nulle, il suffit donc de montrer que, pour tout p de I^- , la valeur absolue $|d_n|_p$ est bornée, on aura ainsi le théorème suivant :

Soit $\sum u_n X^n$ une série entière à coefficients dans l'anneau $Z[I]$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) dans C , la somme de la série $\sum_0^\infty u_n x^n$ est prolongeable en une fonction $f(x)$ à caractéristique bornée dans le cercle unité ;

(2) pour tout p de I^- , il existe un polynôme B_p à coefficients dans une extension K_p de Q_p tels que les coefficients $v_n^{(p)}$ de la série produit de B_p par la série $\sum_0^\infty u_n X^n$ vérifient, pour tout entier $n \geq 0$,

$$|v_n^{(p)}|_p \leq p^{m_p}$$

la série $\sum u_n X^n$ représente une fraction rationnelle.

Les conditions (2) entraînent en effet que, pour tout p de I, la valeur absolue $|d_n|_p$ est bornée, et permet donc de réaliser l'inégalité

$$|d_n| \prod |d_n|_p < 1$$

qui implique, d_n appartenant à l'anneau $Z[I]$,

$$d_n = 0 .$$

Ce critère étant établi, il est alors facile de montrer que la série $\sum u_n X^n$, associée à τ, représente une fraction rationnelle. Les conditions (non (a)) ou (non (a')) et (non (b)) ou (non (b')) entraînent que τ est un élément de l'ensemble T_I.

(c) Condition nécessaire. - Soient τ un élément de l'ensemble T_I, et B le polynôme associé de degré $2s$.

On note, pour tout p de I,

$$\tau_p , \frac{1}{\tau_p} , \alpha_p^{(i)} , \alpha_p^{(i)-1} , \qquad i = 2 , \ldots , s ,$$

les zéros du polynôme B dans la clôture algébrique de Q_p, et si 0 n'appartient pas à I :

$$\alpha_0^{(i)} , \alpha_0^{(i)-1} , \qquad i = 1 , \ldots , s ,$$

les zéros du polynôme B dans $\underset{\sim}{C}$.

On pose, égal à σ, l'élément de composantes $\tau_p + \tau_p^{-1}$, pour tout p de I, et l'on construit un élément θ de l'intersection des ensembles $S_1^{p'}$ (pour p' appartenant à I^+) s'écrivant

$$\theta = A_1 \sigma^{s-1} + A_2 \sigma^{s-2} + \ldots + A_s$$

où les A_i sont des entiers rationnels.

Le problème est alors de déterminer λ sous la forme

$$\lambda = \theta^{2h} \quad \text{où } h \text{ est un entier rationnel,}$$

de telle sorte que la condition (C) ou (C') soit réalisée.

En notant

$$\gamma_0^{(1)} , \ldots , \gamma_0^{(s)} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I$$

$$(\text{resp. } \lambda_0 \gamma_0^{(2)} , \ldots , \gamma_0^{(s)} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I) ,$$

les zéros réels du polynôme à coefficients entiers rationnels dont λ est racine, l'expression, pour tout p de I :

$$\lambda_p[\tau_p^n + \tau_p^{-n}] + \sum_{i=2}^{s} \gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n} + \alpha^{(i)-n}]$$

représente un élément v_n de l'anneau $Z[I]$ égal, dans le cas où 0 n'appartient pas à I, à

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_0^{(i)}[\alpha_0^{(i)n} + \alpha_0^{(i)-n}] .$$

En prenant pour n_0 le plus petit entier tel que, pour tout p de I^-,

$$|\lambda_p \tau_p^{-n}|_p < 1 ;$$

et si 0 appartient à I :

$$|\lambda_0 \tau_0^{-n}| < \frac{1}{4} ,$$

et, en choisissant l'entier h de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_0^{(i)} < \frac{1}{4} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I ,$$

$$\sum_{i=2}^{s} \gamma_0^{(i)} < \frac{1}{8} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I$$

v_n représente pour $n > n_0$ la partie principale de la décomposition d'Artin de $\lambda\tau^n$.

Les propriétés de la transformation conforme permettent alors d'obtenir les relations (C) ou (C') grâce aux égalités :

$$|\alpha_0^{(i)}| = 1 \quad i = 1 , \dots , s \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I$$

$$|\alpha_0^{(i)}| = 1 \quad i = 2 , \dots , s \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I$$

5. Eléments limites de l'ensemble T_I.

L'analogie entre l'ensemble T et l'ensemble T_I peut être précisée encore par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Tout élément de l'ensemble S_I^0 est limite d'éléments de l'ensemble T_I.

Soient θ un élément de S_I^0 et P le polynôme associé à θ. On forme la suite des polynômes R_m :

$$R_m(X) = P(X)X^m + Q(X) ,$$

où le polynôme Q est le polynôme réciproque du polynôme P s'il est distinct de P.

On montre facilement les points suivants :

(α) <u>le polynôme</u> R_m <u>a un zéro</u> τ_m <u>qui appartient à</u> T_I. – L'étude des zéros de R_m se fait :

– pour tout p de I^-, dans la clôture algébrique de Q_p grâce au polygone de Newton du polynôme ;

– dans C, en considérant le polynôme $R_{m,\lambda}$,

$$R_{m,\lambda}(X) = X^m P(X) + \lambda Q(X) ,$$

et en faisant tendre λ vers 1.

(β) <u>la limite de la suite</u> τ_m <u>est</u> θ. – On étudie l'expression $P(\tau_m)$ pour tout p de I dans Q_p,

$$P(\tau_m) = q(\tau_m - \theta) \prod (\tau_m - \theta_p^{(i)}) = - \frac{Q(\tau_m)}{\tau_m^m}$$

où $\theta_p^{(i)}$, $i = 2, \ldots, s$, désignent les autres zéros de P dans Q_p, et l'on montre que $|\tau_m - \theta|_p$ est majoré en valeur absolue par une quantité qui tend vers zéro ; le cas où 0 appartient à I, se traite en particulier.

Dans le cas où les polynômes P et Q ne sont pas distincts, c'est-à-dire dans le cas où 0 appartient à I, et où le polynôme P est du 2e degré et de la forme

$$P(X) = qX^2 + q_1 X + q ,$$

on introduit, comme dans le domaine réel, le polynôme de Čebyšev T_m de degré m, et l'on forme la suite des polynômes S_m

$$S_m(X) = T_m(X)(qX + q_1) - q ,$$

on montre alors que le polynôme S_m a un zéro α_m tel que

$$\lim_{m \infty} \alpha_m = -\frac{q_1}{q} ,$$

et en effectuant le changement de variable défini par $X = Y + \frac{1}{Y}$, on obtient, à partir de la suite α_m , une suite τ_m définie par

$$\alpha_m = \tau_m + \tau_m^{-1} ,$$

d'éléments de l'ensemble T_I dont la limite est θ dans V_I .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. New York and Princeton University, 1950/51 (multigraphié).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CANTOR (David G.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.

[4] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

[5] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Répartition modulo 1 de $\lambda\alpha^n$ dans les adèles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 5 , 14 p.

[6] DECOMPS-GUILLOUX (Annette). - Nombres de Salem dans les I-adèles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 3, 21 p.

[7] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.

[8] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.