Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Structure d'un anneau local artinien à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 1 (1967-1968), exp. n° 3, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 3

27 novembre 1967

STRUCTURE D'UN ANNEAU LOCAL ARTINIEN À GAUCHE

par Léonce LESIEUR

Nous avons rencontré les anneaux locaux artiniens [1] comme cas particulier d'anneaux noethériens à gauche complètement primaires, et montré que ces derniers anneaux possèdent des anneaux de fractions qui sont précisément artiniens locaux [1]. Nous allons maintenant préciser la structure d'un anneau artinien local en raisonnant par récurrence sur l'exposant n du radical D. Nous commencerons par le cas d'un corps $(n = 1)$ traité dans l'esprit du cas général, c'est-à-dire construit à partir du groupe multiplicatif des éléments inversibles.

1. Cas d'un corps $(n = 1)$.

Soit K un corps ; $K^* = K - \{0\}$ le groupe multiplicatif G des éléments non nuls de K. G possède un élément involutif $-1 = f$ qui appartient au centre de G :

$$f^2 = 1 , \quad fx = xf \qquad \forall\, x \in G .$$

Le produit fx sera noté $-x$.

Soit H l'ensemble $G - \{1\}$; considérons l'application :

$$\tau : x \longmapsto 1 - x .$$

Elle a la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1. - L'application τ de $H = G - \{1\}$ sur lui-même est une involution [2] telle que :

(1) $\tau(a^{-1}) = - a^{-1} \tau(a)$,

(2) $\tau(aa') = \tau(a) \tau[- (\tau(a))^{-1} a\tau(a')]$; $aa' \neq 1$,

(3) $\tau(b^{-1} ab) = b^{-1} \tau(a)b$, $\forall\, b \in G$.

On notera, d'après (1), que si $aa' \neq 1$, on a aussi $-(\tau(a))^{-1} a\tau(a') \neq 1$, ce qui donne un sens au deuxième membre de (2).

---

(1) Rappelons la définition : anneau artinien à gauche dans lequel les éléments non inversibles forment un idéal bilatère D. L'exposant n est le plus petit entier n tel que $D^n = 0$.

(2) c'est-à-dire : $\tau(\tau(x)) = x$.

Réciproquement, si un groupe G vérifie les conditions de la propriété 1, $G \cup \{0\}$ possède une structure de corps avec une multiplication évidente et une addition définie par :

$$g + g' = \begin{cases} g\tau(-g^{-1} g') & \text{si} \quad g' \neq -g \\ 0 & \text{si} \quad g' = -g \ . \end{cases}$$

$$x + 0 = 0 + x = x \ , \qquad \forall\, x \in G \cup \{0\} \ .$$

La vérification est laissée aux soins du lecteur.

Notons seulement que la relation (1) traduit la commutativité de l'addition, la relation (2) l'associativité de l'addition, la relation (3) la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

On a donc le théorème de structure suivant :

THÉORÈME 1. - La structure d'un corps K est donnée par

$$\text{str } K = (G \ , \ 0 \ , \ \tau)$$

où τ vérifie les conditions de la propriété 1.

Pour que K soit commutatif, il faut et il suffit que G soit abélien. Alors, la condition (3) tombe.

2. Cas $n = 2$.

Le radical D de l'anneau A est nilpotent d'exposant 2 : $D^2 = 0$, $D \neq 0$. Le groupe multiplicatif G des éléments inversibles est $G = A - D$. L'anneau quotient A/D est un corps K , et l'homomorphisme $A \longmapsto A/D$ a pour restriction sur G un homomorphisme φ du groupe multiplicatif G sur le groupe multiplicatif K^* tel que $\varphi(-1) = -1'$, 1 étant l'élément unité de G et $1'$ celui de K^* . D est muni d'une structure d'espace vectoriel à gauche de dimension finie p sur K par :

$$\begin{cases} \alpha d = ad & \text{si} \quad \alpha = \varphi(a) \ , \quad a \in G \ ; \\ 0d = 0 \ . \end{cases}$$

Soit H le noyau de φ ; c'est l'ensemble des éléments de la forme $1 - d$, où $d \in D$.

L'application

$$\tau : \ x \longmapsto 1 - x \ , \qquad x \in G - H$$

est une bijection ensembliste involutive de $G - H$ sur lui-même.

L'application

$$\sigma : y \longmapsto 1 - y , \qquad y \in H$$

est un isomorphisme du groupe multiplicatif H sur le groupe additif D .

Enfin, D est également un espace vectoriel à droite sur K , et l'application

$$d \longmapsto d\alpha , \qquad d \in D , \quad \alpha \in K$$

est, lorsque α est fixé, une application K-linéaire $i(\alpha)$ de l'espace vectoriel D à gauche sur K , tandis que l'application :

$$\alpha \to i(\alpha)$$

est une injection du corps K dans l'anneau $\mathfrak{L}_K(D)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel D (ou anneau de matrices carrées d'ordre p sur K) telle que

$$i(1') = e \quad \text{(endomorphisme identique)} .$$

C'est au moyen de ces différents composants que nous allons définir la structure de l'anneau $A = G \cup D$.

THÉORÈME 2. - La structure d'un anneau local artinien A d'exposant 2 est donnée par :

$$\text{str } A = (G , D , \varphi , \sigma , \tau , i)$$

avec

G = groupe multiplicatif ayant un élément -1 (élément involutif du centre de G) ;

D = espace vectoriel à gauche non nul de dimension finie sur un corps K ;
$A = G \cup D$;

φ = homomorphisme du groupe G sur le groupe multiplicatif $K^* = K - \{0\}$, tel que $\varphi(-1) = -1'$ (où $1'$ est l'élément unité de K) ;

σ = isomorphisme du groupe multiplicatif H , noyau de φ , sur le groupe additif D ;

τ = bijection ensembliste involutive de $G - H$ sur lui-même ;

i = injection du corps K dans l'anneau des endomorphismes $\mathfrak{L}_K(D)$, telle que $i(1') = e$.

Ces composants vérifient les conditions suivantes :

(1) $\varphi(\tau(a)) = 1' - \varphi(a) \quad (= \tau'(\varphi(a))$,

(2) $\tau(aa') = \tau(a)\ \tau[-(\tau(a))^{-1}\ a\tau(a')] , \quad aa' \in G - H ,$

(2') $\sigma(aa') = \varphi(\tau(a))\ \sigma[-\ (\tau(a))^{-1}\ a\tau(a')]$, $aa' \in H$,

(3) $\tau(b^{-1}\ ab) = b^{-1}\ \tau(a)b$, $a \in G - H$, $b \in G$,

(3') $\sigma(a)\ i\varphi(b) = \omega(b)\ \sigma(b^{-1}\ ab)$, $a \in H$, $b \in G$.

Les opérations sont alors définies dans $A = G \cup D$ de la façon suivante :

(a) Multiplication.

$g_1 \in G$, $g_2 \in G$, $g_1\ g_2$ = produit dans le groupe G ;

$gd = \varphi(g)d$, $d \in D$, $g \in G$;

$dg = di\omega(g)$;

$dd' = 0$, $d \in D$, $d' \in D$.

(b) Addition.

$d \in D$, $d' \in D$, $d + d'$ = somme dans l'espace vectoriel D ;

$d \in D$, $g \in G$, $g + d = d + g = g\sigma^{-1}(-\ \varphi(g^{-1})d)$;

$g \in G$, $g' \in G$, alors :

$$g + g' = \begin{cases} g\tau(-\ g^{-1}\ g') & \text{si } -\ g^{-1}\ g' \in G - H \text{ c'est-à-dire } \varphi(g) + \varphi(g') \neq 0 \\ \varphi(g)\ \sigma(-\ g^{-1}\ g) & \text{si } -\ g^{-1}\ g' \in H \text{ c'est-à-dire } \varphi(g) + \varphi(g') = 0 \ . \end{cases}$$

A possède alors une structure d'anneau local artinien à gauche d'exposant 2 . En outre, l'application Φ , définie par $\Phi(g) = \varphi(g)$ sur G et $\Phi(d) = 0$ sur D , est un homomorphisme de l'anneau A sur le corps K .

Le lecteur pourra vérifier que $A = G \cup D$ possède une structure d'anneau local artinien à gauche d'exposant 2 pour l'addition et la multiplication ainsi définies. Le théorème 2 donne donc un théorème de structure canonique pour un anneau local noethérien à gauche d'exposant 2 .

Notons que, d'après (1), les conditions $aa' \in H$ et $-\ (\tau(a))^{-1}\ a\tau(a') \in H$ sont équivalentes, ce qui donne un sens aux deux membres de (2) dans le cas $aa' \in G - H$, et aux deux membres de (2') dans le cas $aa' \in H$. Remarquons aussi que la relation

$$\tau(a^{-1}) = -\ a^{-1}\ \tau(a) \ , \qquad a \in G - H \ , \tag{2''}$$

est une conséquence de (2') puisque $aa' = 1$ implique $\sigma(aa') = \sigma(1) = 0$, d'où $\sigma[-\ (\tau(a))^{-1}\ a(a^{-1})] = 0$ puisque $a \notin H$ implique $\omega(\tau(a)) \neq 0$. Il en résulte bien $-\ (\tau(a))^{-1}\ a\tau(a^{-1}) = 1$, ce qui est la relation (2'').

Remarquons également que la condition (3') s'écrit encore, en vertu de la défini-

tion du produit :

$$\sigma(b^{-1}\ ab) = b^{-1}\ \sigma(a)b\ .$$

Elle est donc analogue à la condition (3).

Pour la vérification des propriétés d'anneau, on constatera que les relations (2) et (2') servent à établir l'associativité de l'addition, les relations (3) et (3') la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la relation (2"), qui est conséquence de (2'), sert à établir la commutativité de l'addition. La relation (1) sert à montrer que Φ est un homomorphisme additif de A sur le corps K .

3. Cas général.

Nous avons une construction par récurrence sur n d'un anneau local A artinien à gauche d'exposant n en remarquant que l'anneau quotient $A' = A/D^{n-1}$ est local artinien à gauche d'exposant $n - 1$; il est donc connu. Le radical D est un A'-module à gauche de type fini. L'homomorphisme $\Phi : A \to A/D^{n-1}$ a pour restriction sur le groupe multiplicatif $G = A - D$ des unités de A un homomorphisme φ sur le groupe G' des unités de A' . Il a pour restriction sur D une forme linéaire ψ dont l'image est le radical D' de A' (cette forme ψ était nulle dans le cas $n = 2$). Le sous-groupe multiplicatif $H = 1 - D$ de G est l'image inverse par φ du sous-groupe $H' = 1' - D'$ de G' ; H est un sous-groupe distingué de G , mais ce n'est plus le noyau de φ comme dans le cas $n = 2$.

L'application

$$\tau : x \mapsto 1 - x , \qquad x \in G - H$$

est une bijection ensembliste involutive de $G - H$ sur lui-même.

L'application

$$\sigma : y \mapsto 1 - y , \qquad y \in H$$

est une bijection ensembliste de H sur D , mais ce n'est plus tout à fait un isomorphisme du groupe multiplicatif H sur le groupe additif de D . Elle vérifie:

$$\sigma(hh') = \sigma(h) + \varphi(h)\ \sigma(h') .$$

Enfin, D est aussi un A'-module à droite et l'application :

$$d \mapsto d\alpha , \qquad d \in D , \ \alpha \in A'$$

est, lorsque α est fixé, un A'-endomorphisme $i(\alpha)$ du module A' , tandis que l'application $i : \alpha \mapsto i(\alpha)$ est un homomorphisme de l'anneau A' dans l'anneau

$\mathfrak{L}_{A'}(D)$ des endomorphismes de D telle que $i(1') = e$ (application identique). Le théorème de structure, que nous allons énoncer maintenant, permet d'obtenir tous les anneaux locaux artiniens à gauche d'exposant n .

THÉORÈME 3. - La structure d'un anneau A local artinien à gauche d'exposant n est donnée par

$$\text{str } A = (G , D , \varphi , \psi , \sigma , \tau , i)$$

avec :

$A = G \cup D$;

G = groupe multiplicatif ayant un élément -1 (élément involutif du centre de G) ;

D = module à gauche de type fini sur un anneau local artinien à gauche A' d'exposant $n - 1$.

On a donc :

$$\text{str } A' = (G' , D' , \varphi' , \psi' , \sigma' , \tau' , i') .$$

On suppose en outre : $D'^{n-2} D \neq 0$.

φ = homomorphisme du groupe multiplicatif G sur le groupe multiplicatif G' des unités de A' , avec $\varphi(-1) = -1'$;

ψ = forme A'-linéaire sur le A'-module D dont l'image est D' ;

σ = bijection ensembliste du groupe multiplicatif H , image inverse de $H' = 1' - D'$ par φ dans G (H est donc distingué dans G), sur l'ensemble D ;

τ = bijection involutive de $G - H$ sur lui-même ;

i = homomorphisme de l'anneau A' dans l'anneau $\mathfrak{L}_{A'}(D)$ des A'-endomorphismes de D , tel que $i(1') = e$.

Ces composantes doivent vérifier les propriétés suivantes :

(1) $\varphi(\tau(g)) = 1' - \varphi(g)$ $[= \tau'(\varphi(g))]$, $g \in G - H$;

(1') $\psi(\sigma(h)) = 1' - \varphi(h)$ $[= \sigma'(\varphi(h))]$, $h \in H$;

(2) $\tau(aa') = \tau(a)\, \tau[- (\tau(a))^{-1} a\tau(a')]$, $aa' \in G - H$;

(2') $\sigma(aa') = \varphi(\tau(a))\, \sigma[- (\tau(a))^{-1} a\tau(a')]$, $aa' \in H$;

(3) $\tau(b^{-1} ab) = b^{-1} \tau(a) b$, $a \in G - H$, $b \in G$;

(3') $\sigma(a)\, i\varphi(b) = \varphi(b)\, \sigma(b^{-1} ab)$, $a \in H$, $b \in G$;

(4) $\sigma(hh') = \sigma(h) + \omega(h)\,\sigma(h')$, $h \in H$, $h' \in H$;

(5) $\psi(d)d' = di(\psi(d'))$, $d \in D$, $d' \in D'$.

Les opérations sont alors définies dans $A = G \cup D$ de la façon suivante :

(a) Multiplication.

$g_1 \in G$, $g_2 \in G$, $g_1 g_2$ = produit dans le groupe G ;

$gd = \varphi(g)d$, $d \in D$, $g \in G$;

$dg = di\varphi(g)$, $d \in D$, $g \in G$;

$dd' = \psi(d)d' = di(\psi(d'))$, $d \in D$, $d' \in D$.

(b) Addition.

$d \in D$, $d' \in D$, $d + d'$ = somme dans le A'-module D ;

$d \in D$, $g \in G$, $g + d = d + g = g\sigma^{-1}(-\omega(g^{-1})d)$;

$g \in G$, $g' \in G$, alors :

$$g + g' = \begin{cases} g\tau(-g^{-1}g') & \text{si } -g^{-1}g' \in G - H \text{ , c'est-à-dire } \omega(g) + \varphi(g') \notin D' \\ \varphi(g)\,\sigma(-g^{-1}g') & \text{si } -g^{-1}g' \in H \text{ , c'est-à-dire } \omega(g) + \varphi(g') \in D' \end{cases}$$

A possède alors une structure d'anneau local artinien à gauche d'exposant n . De plus, l'application Φ , définie par $\Phi(g) = \varphi(g)$ sur G et $\Phi(d) = \psi(d)$ sur D , est un homomorphisme de l'anneau A sur l'anneau A' .

Le théorème 3 est bien un théorème de structure, en ce sens qu'il satisfait aux trois conditions suivantes :

1° tout anneau local artinien à gauche d'exposant n est susceptible de la construction indiquée par le théorème ;

2° tout ensemble obtenu par cette construction est un anneau local artinien à gauche d'exposant n ;

3° la construction est canonique, car les composants $(G , D , \varphi , \psi , \sigma , \tau , i)$, qui figurent dans la construction, sont uniques pour un anneau donné.

Nous laissons ces vérifications aux soins du lecteur. Nous remarquons seulement les liens suivants :

(2) et (2') ⟹ associativité de l'addition.

(3) et (3') ⟹ distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

(5) ⟹ associativité de la multiplication.

(1) et (1') ⟹ l'application Φ , définie par φ et ψ , est un homomorphisme de l'anneau A sur l'anneau A' .

La relation

$$(2'') \qquad \tau(a^{-1}) = - a^{-1} \tau(a) , \qquad a \in G - H ,$$

conséquence de (2'), sert à établir la commutativité de l'addition.

4. Cas commutatif.

n = 1 : Le corps K doit être commutatif (voir théorème 1).

n = 2 : str A = (G , D , φ , σ , τ , i) .

Le groupe G doit être abélien. Le corps K doit être commutatif, car $K^* = K - \{0\}$ est l'image homomorphe de A par Φ .

La relation gd = dg ($g \in G$, $d \in D$) donne $\varphi(g)d = di\varphi(g)$, ce qui prouve que l'injection i du corps commutatif K dans l'anneau $\mathfrak{L}_K(D)$ fait correspondre à K l'anneau des homothéties de D (isomorphe à l'anneau des matrices scalaires). D'où le théorème suivant :

THÉORÈME 2'. - Dans le cas commutatif avec n = 2 , le théorème 2 de structure se réduit à :

$$\text{str A} = (G , d , \varphi , \sigma , \tau) ,$$

où G est un groupe abélien, D un espace vectoriel sur un corps commutatif K , et φ , σ , τ ayant les propriétés du théorème 2.

On traite de la même façon le cas général commutatif.

THÉORÈME 3'. - Dans le cas commutatif (n quelconque), le théorème 3 de structure se réduit à :

$$\text{str A} = (G , D , \varphi , \psi , \sigma , \tau) ,$$

où G est un groupe abélien, D un A'-module à gauche de type fini sur un anneau commutatif A' local noethérien d'exposant n - 1 , φ , ψ , σ et τ ayant les propriétés du théorème 3.

5. Exemples.

1° K étant un corps commutatif, l'anneau quotient $K[X]/(X^2)$ est un anneau local noethérien d'exposant 2. On a, en appelant ξ la classe de X :

$$A = \{\alpha + \beta\xi\} ; \quad \xi^2 = 0 ; \quad \alpha , \beta \in K .$$

L'espace vectoriel D est égal à $K\xi$.

Le groupe multiplicatif G est formé des éléments $\alpha + \beta\xi$, $\alpha \neq 0$; le sous-groupe H est $\{1 + \beta\xi\}$. Les applications composantes sont :

$$\varphi : \alpha + \beta\xi \longmapsto \alpha \neq 0 ;$$

$$\sigma : 1 - \beta\xi \longmapsto \beta\xi ;$$

$$\tau : \alpha - \beta\xi , \ \alpha \neq 1 \longmapsto 1 - \alpha + \beta\xi .$$

Dans cet exemple, A est un espace vectoriel sur K . Même dans le cas commutatif, il y a des exemples où il n'en est pas ainsi : anneaux locaux qui ne sont pas d'égale caractéristique (cf. [2]).

2° Anneau non commutatif artinien (co-irréductible) local d'exposant 2 .

Soit $A = \underset{\sim}{C}^2 = (a , \alpha)$ avec sa structure de groupe abélien et, pour la multiplication :

$$(a , \alpha)(b , \beta) = (ab , \alpha\overline{b} + a\beta) , \qquad (\ \overline{b}\ \text{étant le conjugué de}\ b\ ),$$

ou, en posant $e = (0 , 1)$:

$$(a + \alpha e)(b + \beta e) = ab + (\alpha\overline{b} + a\beta)e .$$

On a $D = \underset{\sim}{C}e$.

Le groupe multiplicatif G est formé des éléments $a + \alpha e$, $a \neq 0$; le sous-groupe H est $\{1 + \alpha e\}$. Les applications du théorème de structure sont :

$$\varphi : a + \alpha e \longmapsto a \neq 0 ;$$

$$\sigma : 1 - be \longmapsto be ;$$

$$\tau : a - be , \ a \neq 1 \longmapsto 1 - a + be .$$

Les exemples 1° et 2° montrent que les conditions du théorème de structure ne sont pas incompatibles.

6. Problèmes.

1° Etudier l'indépendance des axiomes (1), (2), (3) dans la propriété 1 qui définit un corps. Problème analogue pour les axiomes de définition d'un anneau local artinien à gauche quelconque (chaque axiome étant lié aux propriétés de distributivité, d'associativité, etc., il suffit probablement de prendre des exemples se rapportant à l'indépendance de ces propriétés).

2° Donner d'autres exemples d'anneaux locaux artiniens à gauche, non commutatifs (cf. les exemples donnés pour les anneaux noethériens à gauche complètement primaires [1] avec la simplification donnée par $I = 0$: un anneau local artinien à gauche est primaire à droite et à gauche).

3° Etudier les A-modules à gauche D de type fini, A étant un anneau local artinien à gauche, l'anneau $\mathfrak{L}_A(D)$ des A-endomorphismes de D , les homomorphismes i de A dans $\mathfrak{L}_A(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LESIEUR (Léonce). - Anneaux noethériens à gauche complètement primaires à gauche, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 21e année, 1967/68, n° 1, 12 p.

[2] ZARISKI (Oscar) and SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra. Vol. 2. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).