

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

LÉONCE LESIEUR

Anneaux noethériens à gauche complètement primaires à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 1 (1967-1968), exp. n° 1, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_1_A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX NOETHÉRIENS À GAUCHE COMPLÈTEMENT PRIMAIRES À GAUCHE

par Léonce LESIEUR

1. Introduction.

DÉFINITION 1. - Un anneau A , supposé unitaire et noethérien à gauche, est dit (complètement) primaire (à gauche) si tout diviseur de zéro à droite est nilpotent :

$$ab = 0, \quad a \neq 0 \implies \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad b^n = 0.$$

PROPRIÉTÉ 1. - L'ensemble D des diviseurs de zéro à droite forme un idéal bilatère complètement premier qui coïncide avec l'ensemble des éléments nilpotents et avec le radical nilpotent $\mathcal{R}$.

On a évidemment : $\mathcal{R} \subseteq D$.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $b \in D$. Nous avons aussi $\lambda b \in D$, quel que soit $\lambda \in A$. En effet, $b\lambda$ étant diviseur de zéro à droite, est nilpotent. On a donc : $(b\lambda)^n = 0$, $(b\lambda)^{n-1} \neq 0$. En supposant $b \neq 0$ et λb régulier à droite, l'égalité $(b\lambda)^n b = 0 = b(\lambda b)^n$ entraînerait $b = 0$. Il en résulte $\lambda b \in D$. L'idéal à gauche Ab est donc un nil-idéal lorsque $b \in D$. D'après le théorème de Levitzki, Ab est aussi un idéal nilpotent, ce qui prouve $b \in \mathcal{R}$ et $D \subseteq \mathcal{R}$, d'où $D = \mathcal{R}$.

De plus, $D = \mathcal{R}$ est complètement premier, comme ensemble des diviseurs de zéro à droite :

$$xy \in D \implies y \in D \quad \text{ou} \quad x \in D$$

$$(axy = 0, \quad a \neq 0, \quad y \notin D \implies ax = 0, \quad \text{d'où} \quad x \in D).$$

COROLLAIRE 1. - L'anneau quotient A/D est intègre et noethérien à gauche. Il admet donc un corps de fractions K .

COROLLAIRE 2. - Un anneau complètement primaire à gauche est primaire à gauche au sens de [10], p. 47.

En effet, il faut montrer que la relation $aAb = 0$, $a \neq 0$, entraîne $b \in \mathcal{R}$.

Or, on a en particulier :

$$ab = 0, \quad a \neq 0$$

ce qui prouve $b \in D$, donc $b \in \mathcal{R}$.

2. Cas particulier d'un anneau co-irréductible.

Examinons le cas d'un anneau noethérien à gauche co-irréductible, c'est-à-dire tel que l'idéal nul (0) soit n -irréductible dans A :

$$x \neq 0, y \neq 0 \implies Ax \cap Ay \neq 0.$$

PROPRIÉTÉ 2. - Tout anneau noethérien à gauche co-irréductible est complètement primaire à gauche.

Soit en effet :

$$ab = 0, a \neq 0.$$

Considérons un entier n tel que :

$$0 : b^n = 0 : b^{n+1}.$$

On en déduit :

$$(0 : b) \cap Ab^n = 0,$$

et comme l'annulateur $0 : b$ n'est pas nul, on en tire $b^n = 0$. Tout diviseur de zéro à droite b est donc nilpotent, et l'anneau A est bien complètement primaire à gauche.

La propriété 1 s'applique en particulier aux anneaux co-irréductibles. On retrouve ainsi une propriété signalée dans [9], p. 401. Dans ce cas, $D = \mathcal{R}$ coïncide avec l'idéal singulier de A . La question se pose dans le cas d'un anneau complètement primaire à gauche quelconque (problème 2).

3. Cas artinien.

Désignons par D' l'ensemble des éléments réguliers à droite, par G' l'ensemble des éléments réguliers à gauche, par G l'ensemble des éléments diviseurs de zéro à gauche.

A étant noethérien complètement primaire à gauche, on a :

$$D \subseteq G, \text{ d'où } G' \subseteq D'.$$

Mais, si A est artinien, tout élément régulier à droite est inversible donc régulier à gauche, et on a $D' \subseteq G'$. Il en résulte $D' = G'$ si A est artinien complètement primaire à gauche. Dans ce cas, les éléments réguliers sont inversibles et les éléments non inversibles forment un idéal bilatère D .

DEFINITION 2. - On appelle anneau local un anneau tel que l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal bilatère.

Nous avons donc établi que tout anneau artinien complètement primaire à gauche est local.

Réciproquement, supposons A local et artinien à gauche. Comme A est local, l'ensemble des éléments non inversibles est l'idéal propre maximum D de A ; il coïncide avec le radical de Jacobson, qui est nilpotent puisque A est artinien à gauche. On a : $ab = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow b \in D$ (car l'hypothèse $b \notin D$ entraînerait b inversible et $a = 0$) et par suite b est nilpotent. L'anneau A est donc complètement primaire à gauche (et aussi à droite, par le même raisonnement).

PROPRIÉTÉ 3. - Il y a équivalence entre les deux propriétés :

- (α) A est artinien à gauche complètement primaire à gauche ;
- (β) A est artinien à gauche local.

Chacune de ces propriétés entraîne, pour l'anneau, d'être complètement primaire à droite.

4. Anneau de fractions d'un anneau noethérien à gauche primaire.

Dans la suite, nous dirons, sauf mention contraire, anneau primaire A au lieu de anneau complètement primaire à gauche A .

Les éléments de $S = D'$ forment un demi-groupe multiplicatif. En vue de construire un anneau de fractions de A par rapport à S , nous allons utiliser la condition de régularité de SMALL [11] pour les anneaux noethériens à gauche.

PROPRIÉTÉ 4. - L'anneau A , supposé noethérien à gauche et primaire, vérifie la condition de régularité (généralisée) :

- (R) Tout élément régulier modulo le radical $\mathcal{R}$ est régulier à droite dans A .

En effet, comme on a $\mathcal{R} = D$ et que A/D est intègre, les éléments $a \in A$ qui sont réguliers modulo D sont ceux qui n'appartiennent pas à D , c'est-à-dire les éléments réguliers à droite dans A .

Remarquons que la condition de régularité généralisée est la réciproque d'une propriété qui est vraie dans tout anneau noethérien à gauche A : tout élément régulier à droite dans A est régulier modulo le radical $\mathcal{R}$. (DJABALI, [5]).

La condition de régularité généralisée (R) entraîne, comme dans [11], les propriétés suivantes :

THÉOREME 1. - La condition (C) des multiples communs est vérifiée dans A pour la partie multiplicative $S = D'$.

- (C) $\forall s \in D', a \in A, \exists s' \in D', a' \in A$ tels que $a's = s'a$.

THEOREME 2. - L'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe $s \in D'$ avec $sx = 0$ forme un idéal bilatère I de l'anneau A .

Ce résultat est une conséquence de la condition (C). En effet, on a :

$$x \in I \implies xu \in I \quad \text{puisque} \quad sxu = 0 ;$$

$$x \in I \implies vx \in I ,$$

car la condition (C) entraîne $a's = s'v$, d'où :

$$s'vx = a'sx = 0 , \quad \text{et} \quad vx \in I .$$

$$x \in I \quad \text{et} \quad x' \in I \implies x - x' \in I ,$$

car

$$sx = 0 , \quad s'x' = 0 \implies \sigma = s_1 s' = as \in S ,$$

d'où :

$$\sigma(x - x') = 0 \quad \text{et} \quad x - x' \in I .$$

I est bien un idéal bilatère de l'anneau A .

On a évidemment $I \subseteq D$. Si A est commutatif, on a $I = 0$. Nous verrons plus loin un exemple pour lequel $I \neq 0$. Dans ce cas, la partie multiplicative S possède des éléments non réguliers à gauche. Mais la condition (C) étant vérifiée dans l'anneau A lui-même, on se trouve dans un cas simple étudié dans [8] où l'anneau de fractions existe. (Le cas le plus général, pour les anneaux et les demi-groupes, a été étudié par P. LEFEBVRE [6] et [7].) Dans notre cas particulier, où la condition de régularité (généralisée) est vérifiée, la théorie de Small (généralisée) donne le résultat suivant :

THEOREME 3. - L'anneau A admet un anneau de fractions par rapport à la partie multiplicative $S = D'$; cet anneau de fractions A_S est l'anneau total de fractions de A/I , et il est artinien.

DÉFINITION 3. - L'anneau A_S s'appelle l'anneau des fractions de A . A_S vérifie la propriété importante suivante :

THEOREME 4. - L'anneau de fractions d'un anneau noethérien à gauche primaire est artinien local.

Le fait que A_S soit artinien résulte de la théorie de Small (théorème 3). Montrons qu'il est primaire. Remarquons d'abord que l'anneau quotient A/I est primaire et que son radical est D (modulo I). En effet, l'égalité $\alpha\beta = 0$,

$\alpha \neq 0$, dans A/I , équivaut, pour les représentants a et b dans A , à :

$$sab = 0, \quad sa \neq 0.$$

Il en résulte $b \in D$, et b , donc β , est nilpotent. De plus, dans A/I , les éléments réguliers à droite sont réguliers à gauche car $\alpha\beta = 0$, avec $a \notin D$, entraîne $sab = 0$ avec $sa \notin D$, donc $b \in I$ et $\beta = 0$. On voit de même que A/I est primaire à droite car $\alpha\beta = 0$, avec $\beta \neq 0$, entraîne $sab = 0$ avec $a \in D$ (sinon $b \in I$ et $\beta = 0$) ; d'où a et α sont nilpotents.

Cela posé, pour démontrer que l'anneau de fractions A_S est primaire, il suffit de montrer qu'il est local (propriété 3). Or, les éléments non inversibles sont ceux de l'ensemble $\gamma^{-1}\delta$, avec $\gamma \notin D \pmod{I}$ et $\delta \in D \pmod{I}$; en effet, si $\gamma^{-1}\delta$ est inversible, δ est régulier à droite et inversement. L'ensemble $\{\gamma^{-1}\delta\}$ forme un idéal bilatère ce qui prouve que l'anneau de fractions est local.

Remarque. - Il existe un anneau total de fractions d'un anneau primaire lorsque tout élément régulier à droite est régulier à gauche. On a dans ce cas $D = G$, c'est-à-dire $I = 0$. On peut se demander si la réciproque est vraie (problème 3).

5. Longueur d'un anneau noethérien à gauche primaire.

La propriété pour l'anneau A_S d'être artinien à gauche entraîne l'égalité des longueurs des chaînes maximales d'idéaux à gauche allant de 0 à A_S , et cette longueur est finie. Nous allons l'interpréter en termes d'idéaux de l'anneau A . Posons $\bar{A} = A/I$. Si $\mathfrak{A}$ est un idéal à gauche de A_S , sa restriction $r(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap \bar{A}$ est un idéal à gauche de $\bar{A}$, qui est identifié à un idéal à gauche de A contenant I .

Cet idéal Q est D -primaire à droite au sens de la définition suivante :

DEFINITION 4. - Q est un idéal à gauche D -primaire à droite de l'anneau A si on a la propriété :

$$ab \in Q, \quad b \notin Q \implies a \in D.$$

$Q = r(\mathfrak{A})$ est bien D -primaire à droite car l'hypothèse $a \notin D$ entraîne a inversible dans A_S et $b \in a^{-1}Q \subseteq Q$.

Inversement, si Q est un idéal à gauche de A contenant I , son extension $e(Q)$, qui est l'idéal engendré par Q dans A_S , est formée des éléments $c^{-1}q$ où q décrit Q , $c \in S$. Si Q est D -primaire à droite, on a $r(e(Q)) = Q$ car $c^{-1}q = q' \in A$; on en tire $q = cq'$ et $q' \in Q$ puisque $c \notin D$ et Q est D -primaire à droite. Il y a donc bijection croissante entre les idéaux à gauche

D-primaires à droite de A et les idéaux à gauche de A_S par :

$$Q \mapsto e(Q) .$$

Cette application est injective d'après ce qui précède ; elle est surjective car, pour tout idéal à gauche I de A_S , on a :

$$I = e(r(I)) .$$

Remarquons que tout idéal à gauche Q , D-primaire à droite de A , contient I car

$$sx = 0 \in Q, \quad s \notin D \implies x \in Q .$$

Remarquons aussi que I est D-primaire à droite puisque :

$$ab \in I, \quad b \notin I \implies sab = 0, \quad \text{d'où } a \in D$$

(sinon $sa \notin D$ et $b \in I$).

Par contre 0 n'est pas D-primaire à droite sauf si $I = 0$.

Le fait que A_S soit artinien entraîne donc la propriété suivante :

THEOREME 5. - Dans un anneau A noethérien à gauche primaire, toute chaîne maximale d'idéaux à gauche primaires à droite allant de I à A est finie et toutes ces chaînes ont la même longueur.

DEFINITION 5. - Cette longueur commune s'appelle la longueur de l'anneau primaire A .

6. Condition de co-irréductibilité.

Revenons au cas particulier d'un anneau co-irréductible (paragraphe 2) en étudiant les conditions nécessaires, et si possible suffisantes, pour qu'un anneau noethérien à gauche primaire soit co-irréductible.

(α) Condition nécessaire. - Considérons les idéaux D-primaires à droite Y et leur trace sur l'idéal $0 : D$. Ces traces forment des idéaux à gauche vérifiant la condition de chaîne finie.

PROPRIÉTÉ 5. - Si A est co-irréductible, il n'existe aucun idéal à gauche Y , D-primaire à droite, vérifiant :

$$(1) \quad 0 \subsetneq Y \cap (0 : D) \subsetneq 0 : D .$$

En effet, soit Y , D-primaire à droite, et $x \in 0 : D$, $x \notin Y$. Considérons l'idéal à gauche $Y : x$. On a :

$$u \in Y : x \implies ux \in Y$$

et, comme $x \notin Y$, il en résulte $u \in D$, d'où $ux \in Dx = 0$. On en déduit :

$$Y : x = 0 : x$$

et, par suite :

$$0 = Y \cap Ax$$

ce qui est impossible avec $Y \neq 0$.

(β) Condition suffisante : cas $I = 0$. - Supposons maintenant $I = 0$, c'est-à-dire l'anneau A noethérien à gauche et complètement primaire à gauche et à droite.

Dans ce cas, l'idéal $0 : D$ est D -primaire à droite. En effet, soit

$$ab \in 0 : D, \quad a \notin D.$$

On a donc $Dab = 0$. Si $d \in D$, la condition (C) du théorème 1, appliquée à d et a , donne :

$$sd = ua \quad \text{avec } u \in D \text{ puisque } ua \in D \text{ et } a \notin D.$$

On en déduit $sdb = uab \in Dab = 0$. Comme $I = 0$, cela entraîne $db = 0$, donc $Db = 0$ et $b \in 0 : D$.

L'idéal $0 : D$ étant D -primaire à droite, et l'intersection de deux idéaux à gauche D -primaires à droite étant D -primaire à droite, la condition (1) exprime qu'il n'existe aucun idéal D -primaire à droite strictement inclus entre 0 et $0 : D$. Montrons que cette condition est suffisante. Si 0 était α -irréductible, il le serait dans $0 : D$; en effet,

$$X \cap 0 = D : 0 \implies X = 0$$

car soit $D^k X = 0$ et $D^{k-1} X \neq 0$. On a :

$$D(D^{k-1} X) = 0, \quad \text{d'où } D^{k-1} \subset (0 : D) \cap X = 0,$$

ce qui est impossible pour $X \neq 0$.

On peut donc supposer, en cas de réductibilité :

$$Y \neq 0, \quad 0 = Ax \cap Y, \quad 0 \subset Ax \subseteq 0 : D.$$

Prenons Y maximal pour cette propriété, (complément relatif de Ax), et montrons que Y est D -primaire à droite. En effet, soit :

$$ab \in Y, \quad b \notin Y, \quad a \notin D.$$

On a :

$$(Y + Ab) \cap Ax \neq 0,$$

d'où

$$y + \lambda b = \mu x \neq 0 .$$

Appliquons la condition (C) à a et λ :

$$ta = s\lambda , \quad s \notin D .$$

On en déduit :

$$sy + s\lambda b = sy + tab = s\mu x \in Y$$

c'est-à-dire $s\mu x \in Y \cap Ax = 0$.

Il en résulte $\mu x = 0$ puisque $I = 0$. On arrive à une contradiction, et Y est bien D -primaire. Alors $Y \cap (0 : D)$ est D -primaire compris entre 0 et $0 : D$ puisque l'égalité à 0 entraîne $Y = 0$ et l'égalité à $0 : D$ entraîne :

$$0 = Ax \cap (0 : D) = Ax .$$

THÉOREME 6. - Pour qu'un anneau noethérien à gauche, complètement primaire à gauche et à droite, soit co-irréductible, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun idéal à gauche D -primaire à droite compris entre 0 et $0 : D$.

Remarque. - Dans le cas $I = 0$, on peut vérifier que l'idéal nul est isotypique.

PROPRIÉTÉ 6. - Si A est noethérien à gauche complètement primaire à gauche et à droite, 0 est idéal isotypique.

En effet, si 0 est α -irréductible, la propriété est vérifiée ([10], p. 103). Sinon, soit :

$$0 = Ax \cap Ay , \quad x \neq 0 , \quad y \neq 0 .$$

On a nécessairement $x \in D$, $y \in D$ et on peut supposer $x \in 0 : D$, $y \in 0 : D$ (démonstration du théorème 6). On en déduit :

$$0 : x = 0 : y = D$$

car l'hypothèse $0 : x \supset D$ est contredite par la condition $I = 0$. Donc une des propriétés caractéristiques de l'isotypie est vérifiée ([10], p. 103). Il en résulte en particulier que 0 est tertiaire à droite. Cela pose, dans le cas général I quelconque, certains problèmes (problèmes 4 et 5).

7. Exemples.

1° Anneau noethérien à gauche co-irréductible dans lequel $I \neq 0$. - Soient A' un anneau intègre commutatif noethérien, et P un idéal premier non nul de A'

tel que A' soit injecté dans A'/P (existence assurée par l'appendice). On a donc :

$$i : A' \hookrightarrow A'/P .$$

Soit φ l'homomorphisme canonique $\varphi : A' \rightarrow A'/P$.

A'/P est un A' -module à gauche monogène $D = A' e$. On considère le A' -module à gauche :

$$A = A' \times A'/P$$

avec la loi de multiplication :

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha i(b) + \varphi(a)\beta) .$$

On obtient un anneau noethérien à gauche co-irréductible dans lequel $I = D$ est formé des éléments $(0, \beta)$. L'ensemble G des diviseurs de zéro à gauche est formé des éléments (p, α) , $p \in P$. On a bien $D \subsetneq G$. L'anneau de fractions de A est l'anneau total de fractions de $A/I = A/D$; c'est donc le corps des fractions de l'anneau intègre A/D .

2° Anneau noethérien à gauche complètement primaire à gauche dans lequel $0 : D \subseteq I$ et qui n'est pas co-irréductible. - Soient $A' = \mathbb{R}[X]$, et $\mathbb{R}$ le corps des réels. Considérons l'idéal :

$$H = A'(X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = A'(X^2 + 1) \cap A'(X^2 + X + 1) .$$

On a pour l'anneau quotient le composé direct :

$$A'/H \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \oplus \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1) ,$$

d'où $A'/H \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Il existe une injection i de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$ avec conservation de l'élément unité. Il en résulte une injection $\dot{i}$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ par $\dot{i}(f) = (i(f), i(f))$, qui conserve l'élément unité. Donc il existe une injection I' de A' dans A'/H . Comme l'idéal H n'est pas $\cap$ -irréductible, A'/H n'est pas co-irréductible, et l'anneau $A = A' \times A'/H$, construit comme à l'exemple 1°, n'est pas co-irréductible. De plus, les éléments $\dot{i}(f) \neq 0$ ne sont pas diviseurs de zéro dans A'/H , car si $f \neq 0$, les deux composantes de $\dot{i}(f)$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ sont différentes de zéro. L'anneau A est noethérien à gauche complètement primaire à gauche ; il vérifie $0 : D \subseteq I$ et n'est pas co-irréductible.

Cet exemple montre l'intérêt du problème 5.

APPENDICE

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes, il existe une injection de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$, donc dans $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

Soit B une base de transcendance de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, donc de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ puisque $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$. Cette base B est infinie et a même la puissance du continu ([1], chap. 5, § 5, exercice 2). Il existe donc une correspondance biunivoque entre B et une partie $P \subsetneq B$, donc un $\mathbb{Q}$ -isomorphisme σ_1 entre le corps $\mathbb{Q}(B)$ et le corps $\mathbb{Q}(P)$. Cet isomorphisme peut être étendu à un $\mathbb{Q}$ -isomorphisme σ entre $\mathbb{C}$ (qui est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(B)$ dans $\mathbb{C}$) et la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}(P)}$ de $\mathbb{Q}(P)$ dans $\mathbb{C}$. Or, si $\xi \in B - P$, on a $\xi \notin \overline{\mathbb{Q}(P)}$, car si ξ était algébrique sur $\mathbb{Q}(P)$, B ne serait pas une base de transcendance de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$. Soit donc :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sigma} \overline{\mathbb{Q}(P)} = \mathbb{C}'.$$

Considérons la restriction de σ à $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Elle définit une injection i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}'$, avec pour image $\mathbb{R}' \subset \mathbb{C}' \subset \mathbb{C}$. Cette injection i peut être étendue à une injection de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}'[\xi]$ par la relation :

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \rightarrow a'_0 \xi^n + \dots + a'_n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a'_i \in \mathbb{R}',$$

car $a'_0 \xi^n + \dots + a'_n = 0 \Rightarrow a'_0 = \dots = a'_n = 0$ puisque ξ est transcendant sur $\mathbb{C}'$, donc sur $\mathbb{R}'$; de $a'_0 = \dots = a'_n = 0$, on déduit $a_0 = \dots = a_n = 0$ et $f(X) = 0$. En résumé, nous avons bien une injection de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1. - L'injection i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ne peut se faire dans $\mathbb{R}$, car autrement ce serait l'identité et une surjection ([2], chap. 4, § 3, exercice 3). On aurait alors pour σ un $\mathbb{R}$ -isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur une partie C' , ce qui n'est pas possible ([8], chap. 8, § 1, exercice 4).

Remarque 2. - L'injection i de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ ne peut être surjective. Soient en effet :

$$\sigma = A \mapsto A/P, \quad \varphi = A \mapsto A/P.$$

A anneau noethérien commutatif, P idéal premier non nul de A , σ isomorphisme de A sur A/P , et φ homomorphisme canonique de A sur A/P . Formons la suite d'idéaux de A :

$$0 \subset P \subset P_1 = \varphi^{-1} \sigma(P) \subset P_2 = \varphi^{-1} \sigma(P_1) \subset \dots$$

Cette suite est infinie strictement croissante, ce qui contredit l'hypothèse A noethérien.

PROBLÈMES

Problème 1. - Un anneau complètement primaire à gauche est-il primaire à droite ?
On sait qu'il est primaire à gauche d'après le corollaire 2 de la propriété 1.

Problème 2. - Etudier l'idéal singulier J d'un anneau complètement primaire à gauche. On a nécessairement : $I \subseteq J \subseteq D$.

Problème 3. - Soit A un anneau noethérien à gauche primaire admettant un anneau total de fractions. A-t-on $D = G$, c'est-à-dire $I = 0$?

Problème 4. - Soit A un anneau noethérien à gauche complètement primaire ; 0 est-il tertiaire à droite ? est-il isotypique ?

Problème 5. - Etudier des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit co-irréductible. (La condition nécessaire de la propriété 5 exige, puisque $I \neq 0$, $I \supseteq 0 : D$; une autre condition nécessaire est l'isotypie, ou au moins la tertiariété à droite, qui ne sont pas alors des conséquences immédiates des autres hypothèses.)

Problème 6. - Un anneau tertiaire à droite vérifie-t-il la condition de régularité généralisée ? Même question pour un anneau isotypique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 4 et 5, 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11).
- [2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 3 et 4, 3e édition. - Paris, Hermann, 1960 (Act. scient. et ind., 1143 ; Bourbaki, 3).
- [3] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 5 à 8. - Paris, Hermann, 1947 (Act. scient. et ind., 1029 ; Bourbaki, 5).
- [4] DJABALI (M.). - Anneaux de fractions artiniens, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 7, 8 p.
- [5] DJABALI (M.). - Sur les nil-demi-groupes et les éléments réguliers d'un anneau noethérien à gauche, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 493-495.
- [6] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes de fractions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 329-332.
- [7] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes de fractions, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 21e année, 1967/68.
- [8] LESIEUR (Léonce). - Anneaux de fractions. Cours de 3e cycle professé à la Faculté des Sciences d'Orsay en 1965.

- [9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407.
 - [10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).
 - [11] SMALL (L.). - Orders in artinian rings, J. of algebra, t. 4, 1966, p. 13-41.
-