ANNIE CAILLEAU

Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1966-1967), exp. n° 19, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 19

22 mai 1967

ANNEAU ASSOCIÉ À UN MODULE INJECTIF RICHE EN CO-IRRÉDUCTIBLES

par Annie CAILLEAU

L'étude suivante nous conduit à un théorème de structure pour l'anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles. Nos méthodes, inspirées de celles qu'utilisent L. LESIEUR et R. CROISOT [4], pour montrer le théorème dans le cas particulier où le module considéré est injectif et de dimension finie, nous permettent en outre de décrire l'anneau associé à certains modules remarquables.

1. Anneau associé à un module. Définitions, propriétés.

Dans tout ce qui suit, A désigne un anneau unitaire quelconque et tous les A-modules considérés sont des A-modules à gauche unitaires.

Soient M un A-module et $\mathfrak{a}$ l'anneau des endomorphismes de M ; le sous-ensemble $J(M)$ de $\mathfrak{a}$ constitué des endomorphismes φ de M dont le noyau est essentiel dans M , est un idéal bilatère de $\mathfrak{a}$. L'anneau quotient $\mathfrak{a}/J(M)$ est dit anneau associé à M , nous le noterons $S(M)$.

Nous disposons de propriétés de l'anneau associé à un module dans certains cas particuliers :

PROPOSITION 1.1. - *Soient* E *un* A-*module injectif et* $\mathfrak{B}$ *l'anneau des endomorphismes de* E ;

1° $J(E)$ *coïncide avec le radical de Jacobson de* $\mathfrak{B}$ *et* $S(E)$ *est un anneau régulier (au sens de VON NEUMANN)*.

2° *Si* $J(E)$ *est nul,* $S(E)$ *est self-injectif à droite (i. e. injectif, considéré comme module à droite sur lui-même)*.

La propriété 1° a été démontrée par UTUMI [5] et la propriété 2° par JOHNSON et WONG [3]. On trouvera également une démonstration des propriétés 1° et 2° dans [1].

En particulier, l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel est régulier et self-injectif à droite.

PROPOSITION 1.2. - *L'anneau associé à un* A-*module injectif indécomposable* E *est un corps, dit corps associé à* E .

PROPOSITION 1.3. - Soit E un A-module injectif de dimension finie :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i .$$

Désignons par $(\pi_1 , \ldots , \pi_p)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E , et pour tout $m = 1 , \ldots , p$, par k_m le nombre de sous-modules E_i de type π_m . Alors, l'anneau $S(E)$ associé à E , est un anneau semi-simple, produit de p anneaux simples, chacun d'eux étant isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension k_m sur le corps K_m associé au type π_m .

C'est le théorème 2.2 de [4].

2. Modules riches en co-irréductibles. Dimension d'un module.

Nous reprenons ici des définitions et propriétés énoncées et démontrées par J. FORT [2].

On appelle module riche en co-irréductibles, un module extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles. Il résulte immédiatement de cette définition qu'un module injectif est riche en co-irréductibles si, et seulement si, il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Nous utiliserons pour les modules riches en co-irréductibles, la notion de dimension introduite par J. FORT :

PROPOSITION 2.1. - Soient M un A-module et

$$S = \bigoplus_{i\in I} C_i , \qquad T = \bigoplus_{j\in J} K_j ,$$

deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles de M (i. e. tout sous-module co-irréductible de M rencontre S et T selon des sous-modules non nuls) ; désignons par $E(C_i)$ et $E(K_j)$ des enveloppes injectives des C_i et des K_j . Alors, il existe une bijection σ de I sur J , et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i\in I} E(C_i)$ sur $\bigoplus_{j\in J} E(K_j)$, tels que l'on ait pour tout indice i de I :

$$\varphi(E(C_i)) = E(K_{\sigma(i)}) .$$

Le cardinal de I , ne dépendant que de M , est dit dimension de M et noté $\dim M$.

N.-B. - On peut de même parler de π-dimension de M , pour un type π de sous-modules injectifs indécomposables de l'enveloppe injective de M : on appelle ainsi le cardinal d'une famille $(C_i \ , \ i \in I)$ de sous-modules co-irréductibles de M , telle que :

- pour tout i appartenant à I , $E(C_i)$ soit de type π ;
- la somme $\sum_{i\in I} C_i$ soit directe ;
- tout sous-module co-irréductible C de M dont l'enveloppe injective est de type π , coupe $\bigoplus_{i\in I} C_i$ selon un sous-module non nul.

3. Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles.

Soit E un A-module injectif riche en co-irréductibles, nous savons qu'il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables:

$$\bigoplus_{i\in I} E_i \ .$$

Nous allons d'abord montrer que l'anneau $S(E)$ associé à E est isomorphe à l'anneau $S(\bigoplus_{i\in I} E_i)$ associé à $\bigoplus_{i\in I} E_i$, c'est-à-dire la propriété suivante :

THÉORÈME 3.1. - *Soit M une somme directe de A-modules injectifs indécomposables ; l'anneau associé à M est isomorphe à l'anneau associé à l'enveloppe injective E de M .*

Remarquons tout d'abord que quel que soit M , $S(M)$ se plonge dans $S(E)$: tout endomorphisme de M se prolonge en un endomorphisme de E , et si deux endomorphismes de E prolongent le même endomorphisme de M , ils diffèrent d'un élément de $J(E)$. On peut donc poser pour un endomorphisme φ de M :

$$f(\varphi) = \overline{\Phi}$$

où $\overline{\Phi}$ est la classe, modulo $J(E)$, d'un endomorphisme Φ de E prolongeant φ . On obtient ainsi un homomorphisme f de l'anneau des endomorphismes de M dans $S(E)$, dont le noyau est manifestement $J(M)$.

Supposons maintenant que M soit somme directe de sous-modules injectifs indécomposables :

$$M = \bigoplus_{i\in I} E_i \ ,$$

et montrons que f est alors surjective.

Soit Φ un endomorphisme de E, désignons par I_1 le sous-ensemble de I constitué des indices i tels que E_i ne soit pas inclus dans $\ker \Phi$. Si i appartient à I_1, il existe un élément x_i de E_i tel que $\Phi(x_i)$ ne soit pas nul. M étant essentiel dans E, on peut trouver un élément a_i de A tel que $a_i\,\Phi(x_i)$ ne soit pas nul et appartienne à M et, par suite, à une somme directe finie :

$$\bigoplus_{\ell=1}^{n} E_{j_\ell} .$$

Cette somme directe finie de modules injectifs étant elle-même injective, il existe un homomorphisme φ_i de E_i dans $\bigoplus_{\ell=1}^{n} E_{j_\ell}$ dont la restriction à $Aa_i\,x_i$ coïncide avec Φ.

Soit φ l'endomorphisme de M :

$$\varphi = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i ,$$

où les φ_i sont définis comme précédemment pour les indices i de I_1, et où les φ_i sont nuls pour les indices i n'appartenant pas à I_1, Si ψ est un endomorphisme de E prolongeant φ, on a pour tout indice i de I :

$$\ker (\psi - \Phi) \cap E_i \neq 0 ,$$

en effet, ou i appartient à I_1 et alors $\ker (\varphi - \Phi) \cap E_i$ contient $a_i\,x_i$, ou i n'appartient pas à I_1 et alors

$$\ker (\varphi - \Phi) \cap E_i = E_i .$$

Il en résulte que ψ et Φ diffèrent d'un élément de $J(E)$, et l'on a par suite :

$$f(\varphi) = \overline{\Phi} .$$

Il nous suffit dès lors de rechercher la structure de

$$S(\bigoplus_{i\in I} E_i) .$$

LEMME 3.1. - <u>L'anneau associé à une somme directe de A-modules injectifs indécomposables</u>

$$M = \bigoplus_{i\in I} E_i$$

<u>est isomorphe au produit des anneaux associés aux composantes isotypiques de $\bigoplus_{i\in I} E_i$.</u>

Soit $(\pi_\lambda \ , \ \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour tout λ appartenant à Λ désignons par I_λ l'ensemble des indices i de I tels que E_i soit de type π_λ et posons :

$$M_\lambda = \bigoplus_{i\in I_\lambda} E_i \ , \qquad \overline{M_\lambda} = \bigoplus_{i\notin I_\lambda} E_i \ ,$$

appelons enfin η_λ l'injection canonique de M_λ dans M et ξ^λ la projection de M sur M^λ parallèlement à $\overline{M_\lambda}$. Si à un endomorphisme α de M nous faisons correspondre l'élément

$$(\overline{\xi^\lambda \ \alpha\eta^\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \qquad \text{de} \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$$

($\overline{\xi^\lambda \ \alpha\eta^\lambda}$ étant la classe de $\xi^\lambda \ \alpha\eta^\lambda$ modulo $J(M_\lambda)$), nous obtenons une application θ de l'anneau $\mathfrak{A}$ des endomorphismes de M dans $\prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$.

1° θ <u>est un homomorphisme d'anneaux</u> : il est évident que pour tout couple $(\alpha_1 \ , \ \alpha_2)$ d'éléments de $\mathfrak{A}$, on a :

$$\theta(\alpha_1 + \alpha_2) = \theta(\alpha_1) + \theta(\alpha_2) \ .$$

Pour montrer l'égalité :

$$\theta(\alpha_1 . \alpha_2) = \theta(\alpha_1) . \theta(\alpha_2) \ ,$$

on est amené à montrer que l'on a, pour tout λ appartenant à Λ :

$$\overline{\xi^\lambda \ \alpha_1 \ \xi^\lambda \ \alpha_2 \ \eta^\lambda} = \overline{\xi^\lambda \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \eta^\lambda} \ ,$$

soit

$$\overline{\xi^\lambda \ \alpha_1(\xi^\lambda \ \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda} = 0 \ .$$

Or l'homomorphisme $(\xi^\lambda \ \alpha_2 - \alpha_2)$ envoie M_λ dans $\overline{M_\lambda}$. Si

$$\ker \ (\xi^\lambda \ \alpha_2 - \alpha_2) \cap M_\lambda$$

n'était pas essentiel dans M_λ , il existerait un indice i de I_λ vérifiant

$$\ker \ (\xi^\lambda \ \alpha_2 - \alpha_2) \cap E_i = 0 \ ,$$

et M_λ et $\overline{M_\lambda}$ admettraient alors des sous-modules injectifs indécomposables isomorphes, ce qui est impossible (en vertu, par exemple de la proposition 2 de [2] :

Soient un A-module M et $\bigoplus_{i\in I} X_i$ une somme directe de sous-modules de M, si Y est un sous-module de M vérifiant

$$Y \cap (\bigoplus_{i\in I} X_i) \neq 0 ,$$

il existe un sous-module non nul de l'un des X_i isomorphe à un sous-module de Y). $\ker (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda$ est donc essentiel dans M^λ, il en est évidemment de même de $\ker \xi^\lambda \alpha_1(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda$, par suite on a bien

$$\overline{\xi^\lambda \alpha_1(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda} = 0 .$$

2° θ <u>est surjectif</u> : si $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un élément de $\prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$, l'endomorphisme α de M :

$$\alpha = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \eta^\lambda \alpha_\lambda , \qquad \text{où pour tout } \lambda , \ \overline{\alpha_\lambda} = a_\lambda ,$$

est tel que $\theta(\alpha)$ soit égal à $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

3° $\ker \theta = J(M)$: on vérifie immédiatement l'inclusion : $J(M) \subseteq \ker \theta$.

Supposons que l'on puisse trouver un élément α de $\ker \theta$ n'appartenant pas à $J(M)$. Pour un tel élément on peut trouver un indice i de I vérifiant :

$$\ker \alpha \cap E_i = 0 .$$

Si λ est l'élément de Λ tel que i appartienne à I_λ, on a, $\theta(\alpha)$ étant nul,

$$\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0 .$$

$\alpha(E_i)$ est donc un sous-module injectif indécomposable de M de type π_λ ($\ker \alpha \cap E_i = 0$), rencontrant $\overline{M_\lambda}$ ($\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0$) ceci est impossible d'après la proposition 2 de [2], rappelée précédemment.

Il nous reste à étudier l'anneau associé à chaque composante isotypique de $\bigoplus_{i\in I} E_i$, c'est-à-dire à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes :

THÉORÈME 3.2. - <u>L'anneau associé à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes</u> :

$$M = \bigoplus_{i\in I} E_i ,$$

<u>est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension</u> ;

$$\dim M = \operatorname{card} I ,$$

<u>sur le corps associé au type des</u> E_i .

Remarquons tout d'abord que les propriétés pour $S(M)$ d'être régulier et self-injectif à droite, résulteront de l'isomorphisme entre $S(M)$ et l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel qui possède lui-même ces propriétés (cf. proposition 1.1).

Soit F un A-module injectif indécomposable isomorphe aux A-modules E_i et soit K le corps associé à F ; désignons par V l'espace vectoriel à droite sur K engendré par une famille quelconque $(e_i)_{i\in I}$ indexée par I :

$$V = \bigoplus_{i\in I} e_i K$$

Pour tout indice i de I , nous choisissons un isomorphisme φ_i de F sur E_i , et nous désignons par ξ_i la projection de M sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$.

Soit α un endomorphisme de M , et i un indice de I , les indices j de I pour lesquels $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha\varphi_i}$ n'est pas nul, sont en nombre fini : en effet, fixons-nous un élément non nul x de E_i ; si $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha\varphi_i}$ n'est pas nul, on a

$$\ker \xi_j \alpha \cap E_i = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \xi_j \alpha(x) \neq 0 ,$$

or, l'ensemble des indices j pour lesquels $\xi_j \alpha(x)$ n'est pas nul est fini.

On peut donc considérer l'application η de l'anneau $\mathfrak{A}$ et des endomorphismes de M dans l'anneau $\mathfrak{L}$ des endomorphismes de V définie par :

$$\eta(\alpha).(e_i) = \sum_{j\in I} e_j.\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha\varphi_i} .$$

1° η <u>est un homomorphisme d'anneaux</u> : on a pour tout couple (α_1 , α_2) d'éléments de $\mathfrak{A}$:

$$\eta(\alpha_1 + \alpha_2) = \eta(\alpha_1) + \eta(\alpha_2) .$$

D'autre part,

$$\eta(\alpha_2).\eta(\alpha_1)(e_i) = \sum_{k\in I} e_k \sum_{p\in I} \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i}$$

$$\eta(\alpha_2.\alpha_1)(e_i) = \sum_{k\in I} e_k \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i} .$$

Désignons par I_1 l'ensemble des indices p de I vérifiant :

$$\ker \xi_p \alpha_1 \cap E_i = 0 .$$

Si x est un élément de E_i vérifiant $\alpha_1(x) \neq 0$, on peut trouver un élément a de A tel que $a\alpha_1(x)$ ne soit pas nul et soit égal à $\sum_{p\in I_1} \xi_p \alpha_1(ax)$, ax est alors un élément non nul de $\ker (\alpha_1 - \sum_{p\in I_1} \xi_p \alpha_1)$. On a donc,

$$\ker (\alpha_1 - \sum_{p\in I_1} \xi_p \alpha_1) \cap E_i \neq 0$$

et par suite :

$$\sum_{p\in I_1} \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i}$$

ce qui donne, compte tenu de la définition de I_1 :

$$\sum_{p\in I} \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \xi_p \alpha_1 \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1} \xi_k \alpha_2 \alpha_1 \varphi_i} .$$

Remarque. - La démonstration précédente suppose que I_1 n'est pas vide;; il est trivial que la conclusion subsiste dans le cas où I_1 est vide.

2° η est surjectif : soit ρ un élément de $\mathfrak{L}$. Posons

$$\rho(e_i) = \sum_{j\in I} e_j \overline{\rho_i^j} .$$

L'endomorphisme de M :

$$\alpha = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i ,$$

avec pour tout i de I :

$$\alpha_i = \left(\sum_{k\in I} \omega_k \, \rho_i^k\right)\varphi_i^{-1} ,$$

est tel que son image par α soit ρ .

3° $\ker \eta = J(M)$: on montre immédiatement qu'un élément α de $\mathfrak{A}$ est annulé par η si, et seulement si, l'on a pour tout couple d'indices (i , j) :

$$\ker \xi_j \, \alpha \cap E_i \neq 0 .$$

Ceci est évidemment vérifié par les éléments de $J(M)$. D'autre part, si α n'appartient pas à $J(M)$, il existe un indice i de I tel que l'on ait

$$\ker \alpha \cap E_i = 0 ;$$

pour un élément non nul x de E_i , on peut écrire :

$$\alpha(x) = \xi_{j_1} \alpha(x) + \ldots + \xi_{j_n} \alpha(x) ,$$

de l'hypothèse $\ker \alpha \cap E_i = 0$, on déduit qu'il existe un indice j parmi $j_1 , \ldots , j_n$, tel que $\ker \xi_{j_p} \alpha \cap E_i$ ne soit pas essentiel dans E_i , c'est-à-dire tel que $\ker \xi_{j_p} \alpha \cap E_i$ ne soit pas nul. Ceci prouve que α n'est pas annulé par η .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de structure, dont le théorème 2.2 de [4] apparaît comme cas particulier.

THÉORÈME 3.3. - Soit E un A-module riche en co-irréductibles (resp. somme directe de A-modules injectifs indécomposables) et soit $(\pi_\lambda , \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E ; l'anneau $S(E)$ associé à E est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau produit $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{L}_\lambda$, où pour tout λ , $\mathfrak{L}_\lambda$ est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel sur le corps associé au type π_λ , dont la dimension est égale à la π_λ-dimension de E .

$S(E)$ est régulier et self-injectif à droite en tant que produit d'anneaux possédant ces propriétés. Pour montrer qu'un anneau

$$L = \prod_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$$

produit d'anneaux self-injectifs à droite (resp. à gauche) est lui-même self-injectif à droite (resp. à gauche), on peut montrer que pour tout λ , L_λ est un L-module à droite (resp. à gauche) injectif ; L , produit de L-modules injectifs, est alors un L-module injectif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. der Math., t. 15, 1964, p. 166-174.

[2] FORT (Jacques). - Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 20, 1966/67, 21 p. (multigr.).

[3] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Self-injective rings, Canad. math. Bull., t. 2, 1959, p. 167-173.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 42, 1963, p. 367-407.

[5] UTUMI (Yuzo). - On a theorem on modular lattices, Proc. Japan Acad., t. 35, 1959, p. 16-21.