Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

JACQUELINE KLASA

Équivalences de Green dans les catégories bien filtrantes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1966-1967), exp. n° 17, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A5_0>

24 avril 1967

ÉQUIVALENCES DE GREEN
DANS LES CATÉGORIES BIEN FILTRANTES

par Jacqueline KLASA

Introduction. - Dans une thèse dirigée par D. D. MILLER en 1955, C. G. DOSS a étudié le demi-groupe des applications d'un ensemble en lui-même, du point de vue, notamment, des équivalences de Green. A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON, dans leur Traîté ([2]), ont remarqué que les mêmes propriétés se rencontrent dans le demi-groupe des endomorphismes d'un espace vectoriel, et ils ont expliqué cette analogie par l'identité des rôles joués, dans un cas, par le cardinal d'un sous-ensemble, dans l'autre, par la dimension d'un sous-espace.

En étudiant plus généralement le demi-groupe H des endomorphismes d'une algèbre abstraite quelconque, P. DUBREIL a montré que les résultats précédents subsistent sur certains sous-ensembles de H , et il a donné des conditions simples, portant sur les sous-algèbres (éventuellement images) et les équivalences (éventuellement nucléaires) pour que tel ou tel de ces résultats soit valable sur H tout entier.

En "catégorisant" les équivalences de Green (comme l'avait suggéré P. DUBREIL dans [5]), nous espérons avoir saisi l'essence des bonnes propriétés mises à jour successivement dans les travaux précédents.

I. Notions catégoriques utiles

Rappelons pour la commodité du lecteur qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de deux ensembles : $Ob(\mathcal{C})$ et $Mor(\mathcal{C})$, dont les éléments seront appelés respectivement objets et morphismes, ainsi que deux applications :

$$S : Mor(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C}) : \text{application source} ,$$

$$B : Mor(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C}) : \text{application but} .$$

L'ensemble des morphismes est muni d'une loi de composition, notée $\circ$, associative, non partout définie : le composé $\beta \circ \alpha$ existant si, et seulement si, l'on a: $S(\beta) = B(\alpha)$.

En outre, pour tout objet X , on suppose l'existence d'un morphisme I_X , identité à gauche de tous les morphismes de but X , et identité à droite de tous les morphismes de source X .

On appellera :

- Les morphismes de source et but égaux : endomorphismes ;
- Les morphismes simplifiables à gauche (resp. à droite) : monomorphismes (resp. épimorphismes) ;
- Les morphismes simplifiables à gauche et à droite : bimorphismes ;
- Les morphismes inversibles à gauche et à droite : isomorphismes.

Remarque. - Un isomorphisme est un bimorphisme, mais la réciproque est en général fausse (cas des catégories de matrices positives et markoviennes).

Nous redonnons la relation de préordre sur les classes de monomorphismes de même but (resp. épimorphismes de même source) d'après [6].

$$(\alpha < \alpha') \iff (\exists\ \beta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})\ ;\ \ \alpha = \alpha' \circ \beta)$$

$$(\text{resp.}\ \ (\alpha < \alpha') \iff (\exists\ \beta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})\ ;\ \ \alpha = \beta \circ \alpha')\ )\ .$$

Les classes de la relation d'équivalence, déduite de la relation de préordre précédente, sont appelées les sous-objets (resp. quotients).

II. Relations de Green dans une catégorie

Nous allons introduire, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, des relations d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, compatibles avec la loi de composition des morphismes. Tout d'abord, donnons quelques définitions.

DÉFINITION 1. - Un sous-ensemble I , de morphismes de $\mathcal{C}$, est appelé idéal à gauche de la catégorie $\mathcal{C}$ (resp. idéal à droite de la catégorie $\mathcal{C}$), s'il est stable pour la loi de composition à gauche (resp. à droite).

DÉFINITION 2. - Un sous-ensemble I de morphismes de $\mathcal{C}$, qui est à la fois idéal à gauche et idéal à droite de $\mathcal{C}$, est appelé idéal bilatère de $\mathcal{C}$. Les idéaux engendrés par un morphisme peuvent donc être caractérisés de la manière suivante :

- Un idéal à gauche engendré par un morphisme α est l'ensemble des morphismes β de même source que α , et admettant la factorisation suivante :

$$\beta = \beta' \circ \alpha\ .$$

- Un idéal à droite engendré par un morphisme α est l'ensemble des morphismes β de même but que α , et admettant la factorisation suivante :

$$\beta = \alpha \circ \beta' \ .$$

- Un idéal bilatère engendré par un morphisme α est l'ensemble des morphismes β admettant une factorisation suivante :

$$\beta = \beta' \circ \alpha \circ \beta'' \ .$$

On remarque que, si le morphisme α est tel que les objets $S(\alpha)$ et $B(\alpha)$ ne reçoivent ou ne laissent partir aucun morphisme autre que l'identité et α , alors tout idéal engendré par α est réduit à $\{\alpha\}$.

Dans le cas particulier d'une catégorie $\mathcal{C}$ où les objets sont "isolés", c'est-à-dire qu'il n'existe aucun morphisme α tel que l'on ait

$$S(\alpha) \neq B(\alpha) \ ,$$

chaque idéal de $\mathcal{C}$ engendré par un morphisme α est un sous-demi-groupe de celui des endomorphismes de l'objet

$$S(\alpha) = B(\alpha) \ .$$

On remarque de suite que l'on peut exprimer l'équivalence, au sens de [7], de deux monomorphismes de même but α et α' de la façon suivante : α est équivalent à α' , si, et seulement si, les idéaux à droite de $\mathcal{C}$, engendrés par α et α' , sont égaux.

Dualement, étant donnés deux épimorphismes α et α' de même source, on peut dire : α est équivalent à α' , si, et seulement si, les idéaux à gauche de $\mathcal{C}$ engendrés par α et α' sont égaux.

Maintenant, nous allons donner les relations de Green généralisées à l'ensemble $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, pour toute catégorie $\mathcal{C}$.

1. Définition des relations de Green.

(i) Deux morphismes de $\mathcal{C}$ sont dits $\mathcal{R}$-équivalents (resp. $\mathcal{L}$-équivalents), s'ils engendrent le même idéal à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{C}$.

On remarque que ces relations sont compatibles avec la loi de composition à gauche (resp. à droite).

(ii) Deux morphismes α et β de $\mathcal{C}$ sont dits $\mathcal{D}$-équivalents, s'il existe un morphisme γ tel que α et γ soient $\mathcal{L}$-équivalents (ce qui sera noté $\alpha \mathcal{L} \gamma$), et tel que γ et β soient $\mathcal{R}$-équivalents (ce qui sera noté $\gamma \mathcal{R} \beta$).

La relation d'équivalence $\mathcal{D}$ est donc la composée de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{L}$. On remarque l'égalité

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} \ .$$

Or, lorsque deux relations d'équivalence commutent, leur composée est leur borne supérieure pour la relation d'ordre de l'inclusion définie sur les classes d'équivalence.

(iii) Deux morphismes de $\mathcal{C}$ sont $\mathcal{K}$-équivalents, s'ils sont à la fois $\mathcal{L}$- et $\mathcal{R}$-équivalents.

On remarque que $\mathcal{K}$ est la borne inférieure des relations d'équivalence $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$.

(iv) Deux morphismes de $\mathcal{C}$ sont dits $\mathcal{J}$-équivalents, s'ils engendrent le même idéal bilatère de $\mathcal{C}$.

2. Propriétés des relations de Green.

Nous allons indiquer les propriétés des relations de Green définies sur une catégorie $\mathcal{C}$.

1° $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$. - Soient α et β deux morphismes $\mathcal{D}$-équivalents. Il existe donc un morphisme γ tel que α et γ engendrent le même idéal à gauche de $\mathcal{C}$, γ et β engendrent le même idéal à droite de $\mathcal{C}$. Les idéaux bilatères engendrés par γ , α et β sont alors égaux.

2° Une $\mathcal{L}$-classe et une $\mathcal{R}$-classe se coupent si, et seulement si, elles se trouvent dans une même $\mathcal{D}$-classe. - En effet, soient L_α et R_β les deux classes étudiées. Si L_α et R_β ne sont pas disjointes, cela signifie qu'il existe un morphisme γ vérifiant :

$$(\alpha \,\mathcal{L}\, \gamma) \quad \text{et} \quad (\gamma \,\mathcal{R}\, \beta) \ .$$

Puisque α et β sont alors $\mathcal{D}$-équivalents, ainsi que tout couple d'éléments de L_α et R_β , les classes L_α et R_β se trouvent dans une même $\mathcal{D}$-classe.

Réciproquement, si deux classes L_α et R_β se trouvent dans une même $\mathcal{D}$-classe, il existe un morphisme γ tel que l'on ait

$$(\alpha \,\mathcal{L}\, \gamma) \quad \text{et} \quad (\gamma \,\mathcal{R}\, \beta) \ .$$

Donc, l'intersection des deux classes est non vide.

3° Les $\mathcal{L}$-classes (resp. les $\mathcal{R}$-classes), contenues dans une même $\mathcal{D}$-classe, sont équipotentes. - Ceci est une généralisation d'un lemme de Green.

En effet, soient α et β deux morphismes $\mathcal{R}$-équivalents. Alors, il existe des morphismes σ et σ' tels que

$$\alpha \circ \sigma = \beta \quad \text{et} \quad \beta \circ \sigma' = \alpha \ .$$

Montrons que les applications entre L_α et L_β, définies ainsi :

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \sigma , \qquad L_\alpha \to L_\beta ,$$
$$\psi \longmapsto \psi \circ \sigma' , \qquad L_\beta \to L_\alpha ,$$

sont inverses l'une de l'autre.

La propriété $(\varphi \mathcal{L} \alpha)$ impliquant $(\varphi \circ \sigma \mathcal{L} \alpha \circ \sigma)$, le morphisme $\varphi \circ \sigma$ appartient à la classe L_β. De même, la propriété $(\psi \mathcal{L} \beta)$ impliquant $(\psi \circ \sigma' \mathcal{L} \beta \circ \sigma')$, $\psi \circ \sigma'$ appartient à la classe L_α.

Les applications sont inverses l'une de l'autre, car on a

$$\varphi \circ \sigma \circ \sigma' = \varphi' \circ \alpha \circ \sigma \circ \sigma' = \varphi' \circ \beta \circ \sigma' = \varphi' \circ \alpha = \varphi ,$$
$$\psi \circ \sigma' \circ \sigma = \psi' \circ \beta \circ \sigma' \circ \sigma = \psi' \circ \alpha \circ \sigma = \psi' \circ \beta = \psi ,$$

la démonstration pour les $\mathcal{R}$-classes est duale.

4° Les $\mathcal{K}$-classes contenues dans une même $\mathcal{D}$-classe sont équipotentes. – Il faut remarquer que les bijections que l'on a définies entre les $\mathcal{L}$-classes (resp. les $\mathcal{R}$-classes) conservent les $\mathcal{K}$-classes.

En effet, comme on a

$$(\varphi \circ \sigma) \circ \sigma' = \varphi ,$$
$$(\psi \circ \sigma') \circ \sigma = \psi ,$$

les idéaux à droite engendrés par φ et $\varphi \circ \sigma$ sont identiques.

On peut traiter les cas des $\mathcal{R}$-classes de façon symétrique.

Etant donnés deux morphismes α et γ $\mathcal{D}$-équivalents, il existe β tel que l'on ait $(\alpha \mathcal{R} \beta)$ et $(\beta \mathcal{L} \gamma)$.

Il existe donc des morphismes σ et σ', τ et τ', tels que l'on ait

$$\alpha \circ \sigma = \beta , \qquad \tau \circ \beta = \gamma ,$$
$$\beta \circ \sigma' = \alpha , \qquad \tau' \circ \gamma = \beta .$$

Les applications entre H_α et H_γ, ainsi définies :

$$\varphi \longmapsto \tau \circ \varphi \circ \sigma , \qquad H_\alpha \to H_\gamma ,$$
$$\psi \longmapsto \tau' \circ \psi \circ \sigma' , \qquad H_\gamma \to H_\alpha ,$$

sont inverses l'une de l'autre.

En effet, elles sont les composées des restrictions aux $\mathcal{K}$-classes des applications données précédemment qui conservaient les $\mathcal{K}$-classes.

5° Théorème de Miller et Clifford. - Le produit d'une $\mathcal{L}$-classe par une $\mathcal{R}$-classe est contenu dans une seule $\mathcal{D}$-classe.

En effet, étant donnés les morphismes α , α' et β , β' vérifiant les propriétés

$$(\alpha \; \mathcal{L} \; \alpha') \quad \text{et} \quad (\beta \; \mathcal{R} \; \beta') \ ,$$

on a, à cause des compatibilités des relations d'équivalence avec la loi de composition à gauche ou à droite :

$$(\alpha \circ \beta \; \mathcal{L} \; \alpha' \circ \beta) \quad \text{et} \quad (\alpha' \circ \beta \; \mathcal{R} \; \alpha' \circ \beta') \ .$$

Ce qui donne

$$(\alpha \circ \beta \; \mathcal{D} \; \alpha' \circ \beta') \ .$$

3. Quelques remarques sur les relations de Green définies sur une catégorie $\mathcal{C}$.

1° Si deux morphismes sont $\mathcal{L}$-équivalents, leurs objets sources sont égaux.

En effet, si deux morphismes α et β sont $\mathcal{L}$-équivalents, il existe un morphisme α' tel que l'on ait

$$\beta = \alpha' \circ \alpha \ ,$$

ce qui montre que $S(\beta) = S(\alpha)$.

2° Si deux morphismes sont $\mathcal{R}$-équivalents, leurs objets buts sont égaux.

En effet, si deux morphismes α et β sont $\mathcal{R}$-équivalents, il existe un morphisme α' tel que l'on ait

$$\beta = \alpha \circ \alpha' \ ,$$

ce qui montre que $B(\beta) = B(\alpha)$.

3° Si deux morphismes sont $\mathcal{K}$-équivalents, leurs objets sources sont égaux, ainsi que leurs objets buts.

4° Si deux morphismes α et β sont $\mathcal{D}$-équivalents, il existe un morphisme γ tel que l'on ait

$$S(\alpha) = S(\gamma) \quad \text{et} \quad B(\beta) = B(\gamma) \ .$$

4. Théorème de Green généralisé.

DÉFINITION 1. - Remarquons d'abord que, pour pouvoir composer un morphisme π avec lui-même, il est nécessaire d'avoir :

$$S(\pi) = B(\pi) \quad .$$

De tels morphismes seront appelés endomorphismes.

Un morphisme π de la catégorie $\mathcal{C}$ est dit idempotent, si l'on a

$$\pi \circ \pi = \pi \quad .$$

Chaque identité I_X est un idempotent.

DÉFINITION 2. - Nous dirons que deux morphismes α et α' sont pseudo-inverses l'un de l'autre, si l'on a simultanément

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha' \circ \alpha \circ \alpha' = \alpha' \quad .$$

On remarque alors que $\alpha \circ \alpha'$ et $\alpha' \circ \alpha$ sont des idempotents, endomorphismes respectivement des objets $B(\alpha) = S(\alpha')$ et $S(\alpha) = B(\alpha')$.

DÉFINITION 3. - Un morphisme α sera dit régulier, s'il existe un morphisme α' tel que l'on ait

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \quad .$$

DÉFINITION 4. - Un sous-ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ sera dit régulier, si chacun de ces morphismes est régulier.

Exemple. - Le sous-ensemble des morphismes idempotents de $\mathcal{C}$ est régulier.

LEMME II.1. - Un morphisme α de $\mathcal{C}$ est régulier si, et seulement si, la classe L_α (resp. R_α) contient un idempotent.

On voit, en effet, que si l'on a

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \quad ,$$

les morphismes $\alpha \circ \alpha'$ et $\alpha' \circ \alpha$ sont idempotents. Ce qui montre que les classes L_α et R_α contiennent des idempotents. Réciproquement, soit π un idempotent dans la classe L_α (resp. π' un idempotent dans la classe R_α). Il existe donc des morphismes β (resp. β'), et α' (resp. α''), tels que l'on ait

$$\pi = \beta \circ \alpha \qquad (\text{resp. } \pi' = \alpha \circ \beta') \quad ,$$

$$\alpha = \alpha' \circ \pi \qquad (\text{resp. } \alpha = \pi' \circ \alpha'') \quad .$$

Or on obtient,

$$\alpha \circ \pi = \alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha' \circ \pi^2 = \alpha' \circ \pi = \alpha \quad .$$

Ce qui montre qu'il existe un morphisme β tel que l'on ait

$$\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha \quad ,$$

symétriquement, on obtient

$$\pi' \circ \alpha = \pi' \circ \pi' \circ \alpha'' = \pi' \circ \alpha'' = \alpha \quad .$$

LEMME II.2. - <u>Si une $\mathcal{D}$-classe contient un morphisme régulier, alors elle est régulière.</u>

Soit α le morphisme régulier observé dans $\mathcal{D}$. Les classes L_α et R_α contiennent donc des idempotents. Toutes les $\mathcal{L}$-classes et $\mathcal{R}$-classes, contenant un idempotent, sont régulières. La classe $\mathcal{D}$, réunion de classes régulières, est régulière.

LEMME II.3. - <u>Si une $\mathcal{D}$-classe D est régulière, alors toute $\mathcal{L}$-classe et toute $\mathcal{R}$-classe, contenue dans D , contient un idempotent.</u>

En effet, chaque $\mathcal{L}$-classe et $\mathcal{R}$-classe est régulière. Le lemme II.1 nous donne l'existence d'un idempotent dans chaque $\mathcal{L}$- et $\mathcal{R}$-classe régulière.

LEMME II.4. - <u>Tout idempotent π de $\mathcal{C}$ est une identité à droite de tout morphisme de L_π , et une identité à gauche de tout morphisme de R_π . Finalement, π est une identité bilatère de tout morphisme de H_π .</u>

En effet, soit α un morphisme appartenant à L_π . Il existe donc un morphisme α' tel que l'on ait

$$\alpha = \alpha' \circ \pi \quad .$$

Or on a

$$\alpha \circ \pi = \alpha' \circ \pi^2 = \alpha' \circ \pi = \alpha \quad .$$

De même, soit β un morphisme appartenant à R_π . Il existe alors β' tel que l'on ait

$$\beta = \pi \circ \beta' \quad .$$

Or on a

$$\pi \circ \beta = \pi^2 \circ \beta' = \pi \circ \beta' = \beta \quad .$$

Ce qui achève la démonstration.

LEMME II.5. - <u>Aucune</u> $\mathcal{K}$-<u>classe</u> H <u>contient plus qu'un idempotent.</u>

Soient π et π' deux idempotents dans une $\mathcal{K}$-classe H . Le lemme II.4 nous indique que l'on a

$$\pi' \circ \pi = \pi = \pi' \quad .$$

LEMME II.6. - <u>Pour tout objet</u> X , <u>l'ensemble des endomorphismes inversibles est un groupe que l'on notera</u> $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$.

<u>On l'appellera le groupe des</u> $\mathcal{C}$-<u>automorphismes de</u> X .

En effet, soient α et β deux endomorphismes de X inversibles. Il existe alors des morphismes α' et β' , tels que l'on ait

$$\alpha' \circ \alpha = \alpha \circ \alpha' = I_X \qquad \text{et} \qquad \beta' \circ \beta = \beta \circ \beta' = I_X \quad .$$

Ainsi on obtient

$$\alpha' \circ \alpha \circ \beta = I_X \circ \beta = \beta \qquad \text{et} \qquad (\beta' \circ \alpha') \circ (\alpha \circ \beta) = \beta' \circ \beta = I_X \quad .$$

De même, on a

$$\alpha \circ \beta \circ \beta' = \alpha \circ I_X = \alpha \qquad \text{et} \qquad (\alpha \circ \beta) \circ (\beta' \circ \alpha') = \alpha \circ \alpha' = I_X \quad .$$

Pour tout endomorphisme inversible α , on connaît l'inverse α' , qui est unique, et est aussi, naturellement, inversible.

Soient α'' et α' , tels que l'on ait simultanément

$$\alpha'' \circ \alpha = I_X = \alpha' \circ \alpha \quad ,$$

α étant simplifiable à gauche, on obtient

$$\alpha'' = \alpha' \quad .$$

LEMME II.7. - <u>Pour tout idempotent</u> π <u>de la catégorie</u> $\mathcal{C}$, <u>soit</u> $J(\pi)$ <u>l'intersection des idéaux à gauche et à droite engendrés par</u> π . <u>Le morphisme</u> π <u>est alors une identité à gauche et à droite de</u> $J(\pi)$. <u>L'ensemble des morphismes de</u> $J(\pi)$, <u>inversibles par rapport à</u> π , <u>est un groupe que l'on notera</u> $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X)$, <u>où</u> X <u>est égal à l'objet</u> $S(\pi)$ <u>ainsi qu'à l'objet</u> $B(\pi)$.

Le demi-groupe $J(\pi)$ est constitué des morphismes γ de $\mathcal{C}$ se factorisant sous la forme suivante :

$$\gamma = \pi \circ \alpha \circ \pi \quad .$$

En effet, l'idéal à gauche $J_g(\pi)$, engendré par π , est l'ensemble des morphismes γ qui s'écrivent sous la forme :

$$\gamma = \alpha \circ \pi \quad .$$

L'idéal à droite $J_d(\pi)$, engendré par π , est l'ensemble des morphismes γ qui s'écrivent sous la forme :

$$\gamma = \pi \circ \beta \quad .$$

L'intersection des idéaux $J_g(\pi)$ et $J_d(\pi)$ est le demi-groupe $J(\pi)$. Tout morphisme γ de $J(\pi)$ s'écrit donc, soit sous la forme :

$$\gamma = \pi \circ \beta \quad ,$$

soit sous la forme :

$$\gamma = \alpha \circ \pi \quad .$$

On remarque d'abord que γ est nécessairement un endomorphisme de l'objet

$$X = S(\pi) = B(\pi) \quad .$$

En outre, on obtient

$$\pi \circ \beta \circ \pi = \gamma \circ \pi = \alpha \circ \pi^2 = \alpha \circ \pi = \gamma \quad ,$$

$$\pi \circ \alpha \circ \pi = \pi \circ \gamma = \pi^2 \circ \beta = \pi \circ \beta = \gamma \quad .$$

Puisque le morphisme π est une identité à gauche de $J_d(\pi)$ et une identité à droite de $J_g(\pi)$, π est une identité à la fois à gauche et à droite du semi-groupe

$$J(\pi) = J_g(\pi) \cap J_d(\pi) \quad .$$

Nous savons alors que π est l'unique identité à gauche et à droite de $J(\pi)$.

L'ensemble des endomorphismes inversibles par rapport à π est nécessairement un sous-ensemble de celui des endomorphismes de $X = B(\pi) = S(\pi)$. Nous avons donc construit une sous-catégorie $\mathcal{C}_\pi$ de $\mathcal{C}$, telle que :

1° $Ob(\mathcal{C}_\pi) = \{X\}$,
2° $Mor(\mathcal{C}_\pi) = J(\pi)$,

et pour laquelle le morphisme identité de X est égal à π .

L'ensemble des morphismes de $J(\pi)$, inversibles par rapport à π , est donc, d'après le lemme II.6, un groupe, que l'on peut noter

$$Aut_{\mathcal{C}_\pi}(X) \quad .$$

LEMME II.8. - Une $\mathcal{K}$-classe contenant un idempotent est un sous-groupe de $\mathcal{C}$.

Nous allons montrer qu'une classe H , contenant un idempotent π , est nécessairement égale au groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X)$.

Il faut d'abord remarquer que les morphismes α , qui sont $\mathcal{K}$-équivalents à un idempotent π , sont nécessairement des endomorphismes de l'objet $X = B(\pi) = S(\pi)$.

L'inclusion suivante est immédiate

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X) \subset H_\pi \quad .$$

En effet, un $\mathcal{C}_\pi$-automorphisme α de X est inversible par rapport à π , c'est-à-dire qu'il existe un morphisme α' tel que l'on ait

$$\alpha' \circ \alpha = \alpha \circ \alpha' = \pi \quad .$$

En outre, on sait que

$$\pi \circ \alpha = \alpha \circ \pi = \alpha \quad .$$

Ceci montre donc que les morphismes α et π sont $\mathcal{K}$-équivalents.

Nous allons montrer maintenant l'inclusion

$$H_\pi \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X) \quad .$$

Tout d'abord, remarquons que, pour tout couple de morphismes α et β de H_π , le composé $\alpha \circ \beta$ appartient encore à H_π . En effet, les relations $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$, étant respectivement compatibles à droite et à gauche, on a les implications suivantes :

$$(\alpha \,\mathcal{L}\, \pi) \implies (\alpha \circ \beta \,\mathcal{L}\, \pi \circ \beta) \text{ et } (\alpha \circ \beta \,\mathcal{L}\, \beta) \quad ,$$

$$(\beta \,\mathcal{R}\, \pi) \implies (\alpha \circ \beta \,\mathcal{R}\, \alpha \circ \pi) \text{ et } (\alpha \circ \beta \,\mathcal{R}\, \alpha) \quad .$$

Ceci donne, pour tout couple de morphismes α et β appartenant à H_π , les inclusions suivantes :

$$\alpha \circ H_\pi \subset H_\pi \quad \text{ et } \quad H_\pi \circ \beta \subset H_\pi \quad .$$

Les propriétés 3 et 4 énoncées au paragraphe 2 des relations de Green nous soulignent que, si les morphismes α et $\alpha \circ \beta$ sont $\mathcal{K}$-équivalents, l'application

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \beta$$

est une bijection de H_α sur $H_{\alpha\circ\beta}$. On obtient donc

$$H_\pi \circ \beta = H_\pi \quad .$$

De même, l'application

$$\psi \longmapsto \alpha \circ \psi \ ,$$

étant une bijection de $H_{\alpha\circ\beta}$ sur H_β , on obtient

$$\alpha \circ H_\pi = H_\pi \ .$$

Nous voyons que, pour tout couple de morphismes α et β dans H_π , on a l'égalité

$$\alpha \circ H_\pi = H_\pi \circ \beta = H_\pi \ .$$

Ainsi, pour tout morphisme α dans la classe H_π , on sait trouver deux morphismes α' et α'' , également dans H_π , tels que l'on ait

$$\alpha \circ \alpha' = \alpha'' \circ \alpha = \pi \ .$$

On remarque que le morphisme $\alpha' \circ \alpha$ étant un idempotent dans H_π , d'après le lemme II.5, on a

$$\alpha' \circ \alpha = \pi = \alpha \circ \alpha' \ .$$

Le morphisme α est donc inversible par rapport à π , et l'inclusion suivante

$$H_\pi \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X)$$

a été démontrée.

Comme on a trouvé les inclusions

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X) \subset H_\pi \qquad \text{et} \qquad H_\pi \subset \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X) \ ,$$

nous sommes assurés que la classe H_π est égale au groupe $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X)$, qui est le sous-groupe maximal contenu dans $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_\pi}(X)$.

LEMME II.9. - <u>Si une $\mathcal{K}$-classe de $\mathcal{C}$ est un groupe, alors elle contient un idempotent de la catégorie</u> $\mathcal{C}$.

Soit e l'élément neutre de $\mathcal{K}$. On a

$$e^2 = e \ ,$$

ce qui montre que e est un idempotent de la catégorie $\mathcal{C}$.

THÉORÈME II.1 [Théorème de Miller et Clifford (généralisé)]. - <u>Soit α un morphisme régulier de</u> $\mathcal{C}$. <u>On a les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Tout morphisme pseudo-inverse de α se trouve dans la classe</u> D_α ;

(ii) <u>Une $\mathcal{K}$-classe H_β contient un pseudo-inverse de α si, et seulement si, chacune des $\mathcal{K}$-classes $R_\alpha \cap L_\beta$ et $R_\beta \cap L_\alpha$ contient un idempotent</u> ;

(iii) <u>Aucune</u> $\mathcal{K}$-<u>classe contient plus qu'un pseudo-inverse de</u> α .

<u>Démonstration</u>.

(i) En effet, si α et α' sont des morphismes pseudo-inverses l'un de l'autre, on obtient

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha' \circ \alpha \circ \alpha' = \alpha' \ .$$

Ceci montre que l'on a les propriétés

$$(\alpha \ \mathcal{R} \ (\alpha \circ \alpha')) \qquad \text{et} \qquad ((\alpha \circ \alpha') \ \mathcal{L} \ \alpha') \ .$$

(ii) Supposons que H_β contienne un morphisme pseudo-inverse α' de α . Alors on a

$$\alpha' \circ \alpha \circ \alpha' = \alpha' \qquad \text{et} \qquad \alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \ .$$

Les éléments $\alpha' \circ \alpha$ et $\alpha \circ \alpha'$ sont nécessairement des idempotents. On remarque le fait suivant :

$$\alpha' \circ \alpha \in L_\alpha \cap R_\beta \qquad \text{et} \qquad \alpha \circ \alpha' \in R_\alpha \cap L_\beta \ .$$

Réciproquement, soient π et π' les idempotents des $\mathcal{K}$-classes $L_\beta \cap R_\alpha$ et $R_\beta \cap L_\alpha$. Comme on a les propriétés

$$(\alpha \ \mathcal{R} \ \pi) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \ \mathcal{L} \ \pi') \ ,$$

le lemme II.4 nous permet d'écrire :

$$\pi \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \pi' \ .$$

Il existe deux morphismes ζ et η , tels que l'on ait

$$\pi = \alpha \circ \zeta \qquad \text{et} \qquad \pi' = \eta \circ \alpha \ .$$

Posons $\alpha' = \pi' \circ \zeta \circ \pi$. On obtient

$$\pi' \circ \alpha' = \alpha' \circ \pi = \alpha' \ ,$$

$$\alpha \circ \alpha' = \alpha \circ (\pi \circ \zeta \circ \pi) = (\alpha \circ \pi') \circ \zeta \circ \pi = \alpha \circ \zeta \circ \pi = \pi^2 = \pi \ ,$$

$$\alpha' \circ \alpha = (\pi' \circ \alpha') \circ \alpha = \eta \circ (\alpha \circ \alpha') \circ \alpha = \eta \circ \pi \circ \alpha = \eta \circ \alpha = \pi' \ .$$

Alors, il est vrai que

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \pi \circ \alpha = \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha' \circ \alpha \circ \alpha' = \pi' \circ \alpha' = \alpha' \ .$$

Nous avons donc mis en évidence un élément α' pseudo-inverse de α , et appartenant à la classe H_β , puisque les égalités

$$\pi' \circ \alpha' = \alpha' \qquad \text{et} \qquad \alpha' \circ \alpha = \pi'$$

impliquent la propriété $(\pi' \ \mathcal{R} \ \alpha')$, et par ailleurs $(\pi' \ \mathcal{L} \ \beta)$.

(iii) Soit α'' un autre morphisme pseudo-inverse de α , $\mathcal{K}$-équivalent à α' . On a donc

$$\alpha'' \circ \alpha = \pi' = \alpha' \circ \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha \circ \alpha'' = \pi = \alpha \circ \alpha' \quad ,$$

ce qui donne

$$\alpha' = \alpha' \circ \alpha \circ \alpha' = \alpha'' \circ \alpha \circ \alpha' = \alpha'' \circ \alpha \circ \alpha'' = \alpha'' \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME II.2 [Théorème de Green (généralisé)]. - Soient π et π' deux morphismes idempotents $\mathcal{D}$-équivalents dans une catégorie $\mathcal{C}$. Fixons-nous uh morphisme α dans $R_\pi \cap L_{\pi'}$, et α' son pseudo-inverse dans $R_{\pi'} \cap L_\pi$. Alors les applications

$$\varphi \longmapsto \alpha' \circ \varphi \circ \alpha \, , \qquad H_\pi \to H_{\pi'} \quad ,$$

$$\psi \longmapsto \alpha \circ \psi \circ \alpha' \, , \qquad H_{\pi'} \to H_\pi \quad ,$$

donnent un isomorphisme de groupe entre H_π et $H_{\pi'}$.

Démonstration. - Le théorème de Miller et Clifford généralisé nous donne l'existence du pseudo-inverse α' du morphisme α dans $R_{\pi'} \cap L_\pi$.

La propriété 4 des relations de Green nous montre que les applications

$$\varphi \longmapsto \alpha' \circ \varphi \circ \alpha \qquad \text{et} \qquad \psi \longmapsto \alpha \circ \psi \circ \alpha'$$

sont des bijections entre les ensembles H_π et $H_{\pi'}$.

Le lemme II.3 exprime que les ensembles H_π et $H_{\pi'}$ sont des groupes. Il est naturel de vouloir vérifier si les applications

$$\varphi \longmapsto \alpha' \circ \varphi \circ \alpha \qquad \text{et} \qquad \psi \longmapsto \alpha \circ \psi \circ \alpha'$$

conservent la structure de groupe, c'est-à-dire si l'on a les propriétés :

(i) $\alpha' \circ (\varphi \circ \varphi') \circ \alpha = (\alpha' \circ \varphi \circ \alpha) \circ (\alpha' \circ \varphi' \circ \alpha)$;
(ii) $\alpha' \circ \pi \circ \alpha = \pi'$.

La propriété (ii) est vraie, puisque l'on a

$$\alpha' \circ (\pi \circ \alpha) = \alpha' \circ \alpha = \pi' \quad .$$

La propriété (i) est également vraie à cause des égalités suivantes :

$$(\alpha' \circ \varphi \circ \alpha) \circ (\alpha' \circ \varphi' \circ \alpha) = (\alpha' \circ \varphi) \circ (\alpha \circ \alpha') \circ (\varphi' \circ \alpha) = \alpha' \circ (\varphi \circ \varphi') \circ \alpha \, .$$

Puisque l'application

$$\varphi \longmapsto \alpha' \circ \varphi \circ \alpha$$

est une bijection conservant la structure de groupe, c'est un isomorphisme de groupe entre H_π et $H_{\pi'}$.

Conséquence du théorème de Green généralisé aux catégories. - Le théorème de Green nous donne d'abord un renseignement assez important sur les morphismes idempotents et $\mathcal{D}$-équivalents d'une catégorie $\mathcal{C}$. En effet, soient π et π' deux morphismes idempotents dans $\mathcal{C}$. A partir de π et π' , on peut construire deux sous-catégories $\mathcal{C}_\pi$ et $\mathcal{C}_{\pi'}$ de $\mathcal{C}$, telles que

$$\begin{cases} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\pi) = \{S(\pi)\} = \{B(\pi)\} = \{X_\pi\} \ , \\ \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\pi) = \{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ \pi \circ \alpha = \alpha \ , \ \ \alpha \circ \pi = \alpha\} \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\pi'}) = \{S(\pi')\} = \{B(\pi')\} = \{X_{\pi'}\} \ , \\ \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_{\pi'}) = \{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \ \pi' \circ \alpha = \alpha \ , \ \ \alpha \circ \pi' = \alpha\} \ . \end{cases}$$

Si π et π' sont $\mathcal{D}$-équivalents, cela implique que les groupes suivants :

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_\pi}(X_\pi) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}_{\pi'}}(X_{\pi'}) \ ,$$

sont isomorphes.

En plus, le théorème de Green explicite entre ces groupes considérés des isomorphismes, qui nous permettront de passer d'un morphisme $\mathcal{K}$-équivalent à l'idempotent π à un autre morphisme $\mathcal{K}$-équivalent à π' .

III. Caractérisation des relations de Green dans les "bonnes" catégories

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude des relations de Green dans une catégorie quelconque. Pour donner à ces relations un maximum d'efficacité, nous sommes obligés de soumettre les catégories utilisées à certaines hypothèses restrictives. Nous nous sommes inspirés, dans cette étude, des résultats de P. DUBREIL sur les endomorphismes d'algèbre universelle ([5]).

1. Définition d'une catégorie "bien filtrante".

Nous dirons qu'une catégorie est bien filtrante, si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Tout morphisme α admet une factorisation (non supposée unique) :

$$\alpha = \theta \circ \sigma \quad ,$$

où σ est un épimorphisme et θ un monomorphisme ;

(ii) Toute famille de monomorphismes et épimorphismes dans une factorisation du type précédent admet une borne inférieure.

Ceci entraîne l'existence de bornes supérieure et inférieure pour toute famille de sous-objets et quotients d'un objet X .

Exemple. - Toute catégorie abélienne est bien filtrante.

2. Objets image et quotient d'un morphisme dans une catégorie bien filtrante.

(A) Objet image. - Nous avons déjà remarqué, dans le chapitre II, que deux monomorphismes sont $\mathcal{R}$-équivalents si, et seulement s'ils sont équivalents au sens de [7]. Ils donnaient naissance ainsi à un même sous-objet de leur but. Nous allons développer cette idée pour comparer les morphismes de même but.

Définition de l'objet $\mathrm{Im}(\alpha)$. - Le morphisme α , étant dans une catégorie bien filtrante, nous sommes assurés (à une équivalence près) de l'existence d'un plus petit monomorphisme θ_α , tel que l'on ait

$$\alpha = \theta_\alpha \circ \sigma^\alpha \quad ,$$

où σ^α est un épimorphisme.

Le sous-objet de $B(\alpha)$, dont θ_α est un représentant, sera appelé image de α , et noté $\mathrm{Im}(\alpha)$. Par construction même, nous avons l'égalité

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\theta_\alpha) \quad .$$

(B) Objet quotient. - Il était aussi remarquable le fait que deux épimorphismes sont $\mathcal{L}$-équivalents si, et seulement s'ils sont équivalents au sens de [7]. Ils donnaient naissance à un même objet quotient de l'objet source. Comparons les morphismes de même source en développant cette idée.

Définition de l'objet $\mathrm{Quot}(\alpha)$. - Dans une catégorie bien filtrante, nous sommes assurés de l'existence (à une équivalence près) d'un plus petit épimorphisme σ_α , tel que l'on ait

$$\alpha = \theta^\alpha \circ \sigma_\alpha \quad ,$$

où θ^α est un monomorphisme. L'objet quotient de $S(\alpha)$, dont σ_α est un représentant, sera appelé quotient de α , et noté $\mathrm{Quot}(\alpha)$ (parfois $\mathrm{Quot}_{\mathcal{C}}(\alpha)$, quand plusieurs catégories sont mises en présence). Remarquons la propriété suivante, due à la construction même,

$$\mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\sigma_\alpha) \quad .$$

(C) <u>Comparaison des objets</u> $\mathrm{Im}(\alpha)$ <u>et</u> $\mathrm{Quot}(\alpha)$. - Nous allons donner une décomposition en trois termes d'un morphisme α , ce qui nous apportera un lien entre $\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{Quot}(\alpha)$.

PROPOSITION III.1. - <u>Tout morphisme</u> α <u>dans une catégorie</u> $\mathbb{C}$ bien filtrante <u>admet (à une équivalence près) une décomposition du type suivant</u> :

(⋆) $$\alpha = \theta^\alpha \circ \widetilde{\alpha} \circ \sigma^\alpha \quad ,$$

<u>où</u> θ^α , $\widetilde{\alpha}$, σ^α <u>sont respectivement des mono- bi- et épi-morphismes. En outre, on obtient</u>

$$\theta_\alpha = \theta^\alpha \circ \widetilde{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sigma_\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \sigma^\alpha \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[dr, dashed, "\theta_\alpha"] & {} \arrow[d, "\theta^\alpha"] \\
{} \arrow[u, "\sigma^\alpha"] \arrow[ur, dashed, "\sigma_\alpha"] \arrow[r, "\alpha"'] & {}
\end{tikzcd} \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On sait que le morphisme α se décompose des deux manières suivantes :

$$\alpha = \theta_\alpha \circ \sigma^\alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha = \theta^\alpha \circ \sigma_\alpha \quad ,$$

où θ_α et σ_α sont les plus petits (à une équivalence près) mono- et épi-morphismes donnant la factorisation.

Il existe donc des morphismes j et j' , tels que l'on ait

$$\theta_\alpha = \theta^\alpha \circ j \qquad \text{et} \qquad \sigma_\alpha = j' \circ \sigma^\alpha \quad .$$

On remarque que le morphisme j est nécessairement un monomorphisme, tandis que le morphisme j' est un épimorphisme.

En utilisant les deux factorisations du morphisme α , on obtient

$$(\theta^\alpha \circ j) \circ \sigma^\alpha = \theta^\alpha \circ (j' \circ \sigma^\alpha) \quad .$$

Comme θ^α est un monomorphisme, il est simplifiable à gauche, ce qui donne :

$$j \circ \sigma^{\alpha} = j' \circ \sigma^{\alpha} \quad .$$

Comme σ^{α} est un épimorphisme, il est simplifiable à droite, ce qui donne :

$$j = j' = \tilde{\alpha} \quad .$$

On obtient, en plus, que le morphisme $\tilde{\alpha}$ est un bimorphisme.

Dans certains cas, on pourra exprimer ce fait en disant que $\tilde{\alpha}$ est un bimorphisme entre les objets $\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{Quot}(\alpha)$.

3. Relations de Green dans les catégories semi-bonnes.

Nous aimerions comparer les relations de Green à celles qui proviennent des égalités entre image ou quotient de morphismes. Pour cela, nous allons un peu bonifier les catégories bien filtrantes.

DÉFINITION. - Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite semi-bonne, si elle est bien filtrante et vérifie la condition suivante :

Pour tout couple (α , β) de morphismes composables dans la catégorie $\mathcal{C}$, on a

$$\theta_{\alpha\circ\beta} \leqslant \theta_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\alpha\circ\beta} \leqslant \sigma_{\beta} \quad .$$

Il est évident que toute catégorie d'applications d'ensemble avec structure est semi-bonne.

Nous allons maintenant étudier les relations de Green dans les catégories semi-bonnes.

Pour ne pas alourdir le texte, nous omettrons dans les propositions suivantes le qualificatif de semi-bonnes.

PROPOSITION III.2. - Etant donnés deux morphismes α et α' , s'il existe un morphisme φ , tel que l'on ait

$$\alpha = \alpha' \circ \varphi \quad ,$$

on a

$$\theta_{\alpha'} \geqslant \theta_{\alpha} \quad .$$

Ce qui donne l'implication suivante :

$$(\alpha \,\mathcal{R}\, \alpha') \implies (\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha')) \quad .$$

La catégorie étudiée étant semi-bonne dès que l'on peut écrire α sous la forme

$$\alpha = \alpha' \circ \varphi \quad ,$$

on obtient l'inégalité

$$\theta_{\alpha'} \geqslant \theta_{\alpha} \quad .$$

Si l'on a simultanément les égalités

$$\alpha = \alpha' \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \alpha \circ \varphi' \quad ,$$

on obtient

$$\theta_{\alpha'} \leqslant \theta_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \theta_{\alpha} \leqslant \theta_{\alpha'} \quad .$$

Ce qui montre que l'on a obtenu l'égalité :

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \quad .$$

PROPOSITION III.3. - Etant donnés deux morphismes α et α' , s'il existe un morphisme φ , tel que l'on ait

$$\varphi \circ \alpha = \alpha' \quad ,$$

on obtient

$$\sigma_{\alpha'} \leqslant \sigma_{\alpha} \quad .$$

L'implication suivante est donc vraie

$$(\alpha \,\mathcal{L}\, \alpha') \implies (\mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\alpha')) \quad .$$

La catégorie mise en jeu étant semi-bonne, dès que l'on peut écrire les deux égalités :

$$\varphi \circ \alpha = \alpha' \qquad \text{et} \qquad \varphi' \circ \alpha' = \alpha \quad ,$$

on obtient simultanément les inégalités :

$$\sigma_{\alpha'} \leqslant \sigma_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\alpha} \leqslant \sigma_{\alpha'} \quad ,$$

ce qui donne l'égalité :

$$\mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\alpha') \quad .$$

PROPOSITION III.4. - Si deux morphismes α et α' sont $\mathcal{K}$-équivalents, on obtient les égalités :

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\alpha') \quad .$$

La $\mathcal{K}$-équivalence étant l'intersection des $\mathcal{L}$- et $\mathcal{R}$-équivalences, cette proposition se déduit immédiatement des propositions III.2 et III.3.

PROPOSITION III.5. - Si deux morphismes α et α' sont $\mathcal{D}$-équivalents, on peut trouver des décompositions des morphismes α et α' , telles que l'on ait

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}' \quad .$$

Démonstration. - Soient α et α' des morphismes $\mathbb{Q}$-équivalents. Il existe alors un morphisme β, tel que l'on ait les deux propriétés

$$(\alpha \mathcal{L} \beta) \quad \text{et} \quad (\alpha' \mathcal{R} \beta) .$$

On sait donc que l'on a

$$\mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\beta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\alpha') = \mathrm{Im}(\beta) .$$

On peut donc choisir des décompositions des morphismes α et α' telles que

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \tilde{\beta} \circ \sigma^\beta \quad \text{et} \quad \theta_{\alpha'} = \theta_\beta = \theta^\beta \circ \tilde{\beta} ,$$

ce qui donne

$$\alpha = \theta^\alpha \circ \tilde{\beta} \circ \sigma^\beta \quad \text{et} \quad \alpha' = \theta^\beta \circ \tilde{\beta} \circ \sigma^{\alpha'} ,$$

ce qui montre que l'on a

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}' = \tilde{\beta} .$$

Cette proposition signifie que, si deux morphismes α et α' sont $\mathbb{Q}$-équivalents, on pourra trouver, en quelque sorte, un bimorphisme entre $\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mathrm{Im}(\alpha')$, ainsi qu'entre $\mathrm{Quot}(\alpha)$ et $\mathrm{Quot}(\alpha')$.

THÉORÈME III.1. - Si un morphisme α est régulier au sens de von Neumann, le bimorphisme $\tilde{\alpha}$ de la décomposition $(\star)$ est un isomorphisme, ce qui signifie que l'on peut écrire α sous la forme suivante :

$$\alpha = \theta_\alpha \circ \sigma_\alpha ,$$

où θ_α et σ_α représentent l'image et le quotient de α .

Démonstration. - Soit π l'idempotent $\mathbb{Q}$-équivalent au morphisme α . On a les décompositions suivantes :

$$\pi = \theta^\pi \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^\pi = \theta_\pi \circ \sigma^\pi = \theta^\pi \circ \sigma_\pi .$$

Comme π est idempotent, on a

$$\pi^2 = \pi ,$$

ce qui donne

$$\pi^2 = (\theta^\pi \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^\pi) \circ (\theta^\pi \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^\pi) = \theta^\pi \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^\pi = \pi ,$$

(1) $$(\theta^\pi \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^\pi \circ \theta^\pi) \circ (\tilde{\pi} \circ \sigma^\pi) = \theta^\pi \circ (\tilde{\pi} \circ \sigma^\pi) .$$

Comme $\tilde{\pi} \circ \sigma^\pi$ est un épimorphisme, on peut simplifier à droite,

$$\theta^\pi \circ (\tilde{\pi} \circ \sigma^\pi \circ \theta^\pi) = \theta^\pi .$$

Comme θ^{π} est un monomorphisme, on a

$$\theta^{\pi} \circ \sigma^{\pi} \circ \theta^{\pi} = I_{S(\theta^{\pi})} \quad .$$

En simplifiant d'abord l'expression (1) par le monomorphisme $\theta^{\pi} \circ \tilde{\pi}$, on obtiendrait :

$$\sigma^{\pi} \circ \theta^{\pi} \circ \tilde{\pi} \circ \sigma^{\pi} = \sigma^{\pi} \qquad \text{et} \qquad \sigma^{\pi} \circ \theta^{\pi} \circ \tilde{\pi} = I_{B(\sigma^{\pi})} \quad .$$

On voit donc que $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme.

Si α est $\mathbb{Q}$-équivalent à π , on sait, par la proposition III.5, que l'on peut trouver une décomposition de α , telle que l'on ait

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\pi} \quad .$$

Le bimorphisme $\tilde{\alpha}$ est donc un isomorphisme.

THÉORÈME III.2. - <u>Dans une catégorie semi-bonne, si un endomorphisme</u> α <u>est</u> $\mathcal{K}$-<u>équivalent à un idempotent, le morphisme</u> $\sigma_{\alpha} \circ \theta_{\alpha}$ <u>est un isomorphisme de l'objet</u>

$$B(\sigma_{\alpha}) = S(\theta_{\alpha}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On a vu, dans la proposition III.6, que l'on peut écrire, pour tout morphisme α , $\mathbb{Q}$-équivalent à un idempotent π ,

$$\pi = \theta_{\pi} \circ \sigma_{\pi} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \theta_{\alpha} \circ \sigma_{\alpha} \quad .$$

Or, on a

$$\pi^2 = \theta_{\pi} \circ \sigma_{\pi} \circ \theta_{\pi} \circ \sigma_{\pi} = \pi \quad ,$$

ce qui donne

$$\sigma_{\pi} \circ \theta_{\pi} = I_{B(\sigma_{\pi})} \quad .$$

Il existe des isomorphismes γ et δ , tels que l'on ait

$$\sigma_{\alpha} \circ \theta_{\alpha} = \gamma \circ \sigma_{\pi} \circ \theta_{\pi} \circ \delta \quad ,$$

en vertu de la proposition III.4.

On a donc trouvé un isomorphisme φ de l'objet $S(\theta_{\alpha}) = B(\sigma_{\alpha})$, tel que l'on ait

$$\sigma_{\alpha} \circ \theta_{\alpha} = \varphi \quad .$$

Nous avons donc certaines caractérisations des relations de Green dans les catégories semi-bonnes. Cette étude nous sera utile par la suite, car nous allons voir que beaucoup de catégories de matrices sont semi-bonnes.

4. Catégories "bonnes".

Avant de définir ce que nous entendons par catégories bonnes, nous allons énoncer deux propositions duales, qui nous montreront l'intérêt de la "bonification" future...

PROPOSITION III.6. - Un morphisme σ d'une catégorie quelconque $\mathcal{C}$ est $\mathcal{R}$-équivalent à l'identité $I_{B(\sigma)}$, si, et seulement si, σ est inversible à droite.

(a) La condition est nécessaire. Supposons le morphisme σ $\mathcal{R}$-équivalent à l'identité $I_{B(\sigma)}$. Il existe donc deux morphismes σ' et σ'', tels que l'on ait

$$\sigma \circ \sigma' = I_{B(\sigma)} \qquad \text{et} \qquad I_{B(\sigma)} \circ \sigma'' = \sigma \ .$$

On remarque que l'on peut prendre $\sigma'' = \sigma$. Nous voyons donc que le morphisme σ admet un inverse à droite σ'.

(b) La condition est suffisante. Supposons que le morphisme σ soit inversible à droite. On peut donc trouver un morphisme σ', tel que l'on ait

$$\sigma \circ \sigma' = I_{B(\sigma)} \qquad \text{et} \qquad I_{B(\sigma)} \circ \sigma = \sigma \ .$$

Ce qui montre que les morphismes σ et $I_{B(\sigma)}$ sont $\mathcal{R}$-équivalents.

PROPOSITION III.7. - Un morphisme α d'une catégorie quelconque $\mathcal{C}$ est $\mathcal{L}$-équivalent à l'identité $I_{S(\alpha)}$, si, et seulement si, α est inversible à gauche.

(a) La condition est nécessaire. Supposons le morphisme α $\mathcal{L}$-équivalent à l'identité $I_{S(\alpha)}$. Il existe alors un morphisme α', tel que l'on ait

$$\alpha' \circ \alpha = I_{S(\alpha)} \ .$$

(b) La condition est suffisante. Supposons α inversible à gauche. On peut donc écrire les deux égalités :

$$\alpha' \circ \alpha = I_{S(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \alpha \circ I_{S(\alpha)} = \alpha \ ,$$

où le morphisme α' est un inverse à gauche du morphisme α.

Définition d'une catégorie "bonne". - On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est bonne, si elle est bien filtrante, et vérifie la condition suivante :

Tout monomorphisme (resp. épimorphisme) admet un inverse à gauche (resp. à droite) appelé rétraction (resp. section).

Exemples : Catégories des ensembles, modules sur un anneau semi-simple, ou plus généralement une catégorie semi-simple.

Par contre, les catégories des matrices positives, sous-markoviennes, ne sont pas bonnes tout en étant semi-bonnes.

PROPOSITION III.8. - *Toute catégorie* bonne *est* semi-bonne.

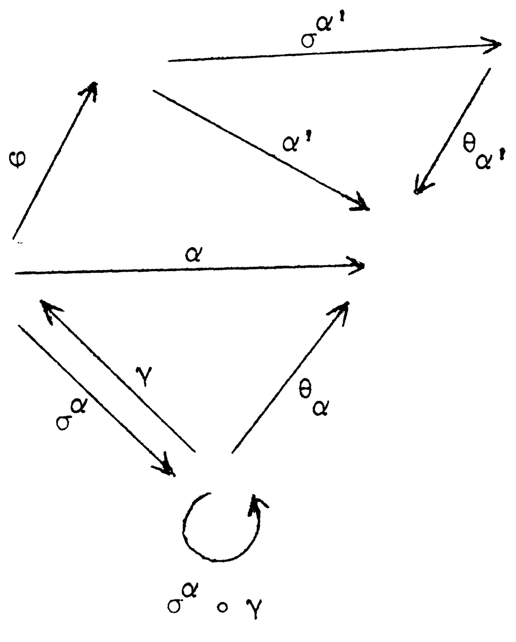
Démonstration.

(a) Montrons que, si deux morphismes α et α' sont tels qu'il existe un morphisme φ, vérifiant l'égalité

$$\alpha = \alpha' \circ \varphi \quad ,$$

alors on obtient l'inégalité

$$\theta_{\alpha'} \geqslant \theta_{\alpha} \quad .$$



L'épimorphisme σ^{α} admet un inverse à droite γ . On obtient alors, en simplifiant,

$$\theta_{\alpha} \circ \sigma^{\alpha} = \theta_{\alpha'} \circ \sigma^{\alpha'} \circ \varphi \quad ,$$

$$\theta_{\alpha} \circ (\sigma^{\alpha} \circ \gamma) = \theta_{\alpha'} \circ (\sigma^{\alpha'} \circ \varphi \circ \gamma) \quad ,$$

$$\theta_{\alpha} = \theta_{\alpha'} \circ (\sigma^{\alpha'} \circ \varphi \circ \gamma) \quad .$$

Puisque l'on a trouvé un morphisme β , tel que l'on ait

$$\theta_\alpha = \theta_{\alpha'} \circ \beta \quad ,$$

nous avons obtenu l'inégalité

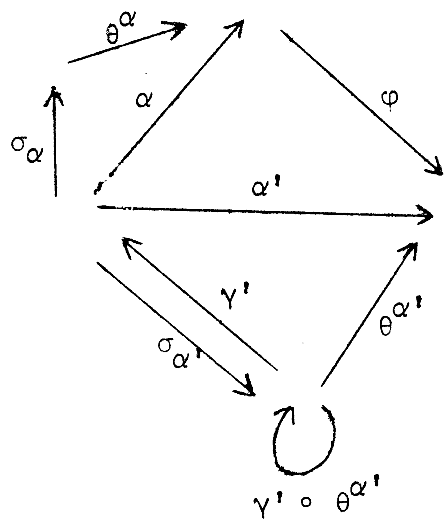
$$\theta_{\alpha'} \geqslant \theta_\alpha \quad .$$

(b) Montrons que, si deux morphismes α et α' sont tels qu'il existe un morphisme φ , vérifiant l'égalité

$$\varphi \circ \alpha = \alpha' \quad ,$$

alors on obtient l'inégalité

$$\sigma_{\alpha'} \leqslant \sigma_\alpha \quad .$$



On a l'égalité

$$\varphi \circ (\theta^\alpha \circ \sigma_\alpha) = \theta^{\alpha'} \circ \sigma_{\alpha'} \quad .$$

Soit γ' un inverse à gauche du monomorphisme $\theta^{\alpha'}$, ce qui donne

$$(\gamma' \circ \theta^{\alpha'}) \circ \sigma_{\alpha'} = (\gamma' \circ \varphi \circ \theta^\alpha) \circ \sigma_\alpha \quad ,$$

$$\sigma_{\alpha'} = (\gamma' \circ \varphi \circ \theta^\alpha) \circ \sigma_\alpha \quad .$$

On a donc trouvé un morphisme β , tel que l'on ait

$$\sigma_{\alpha'} = \beta \circ \sigma_\alpha \quad ,$$

ce qui donne

$$\sigma_{\alpha'} \leqslant \sigma_{\alpha} \quad .$$

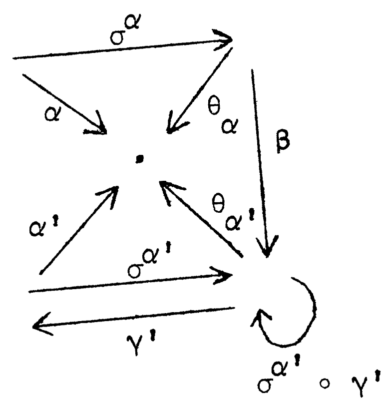
Nous allons maintenant préciser les caractérisations des relations de Green dans les catégories dites bonnes.

PROPOSITION III.2'. - Deux morphismes α et α' d'une catégorie bonne sont $\mathcal{R}$-équivalents, si, et seulement si, leurs images sont égales.

Démonstration.

(a) La condition est nécessaire, car la catégorie est semi-bonne.

(b) La condition est suffisante.



Soient α et α' les morphismes, tels que l'on ait

$$\theta_{\alpha} \geqslant \theta_{\alpha'} \quad .$$

Il est immédiat que l'on obtient alors

$$B(\theta_{\alpha}) = B(\theta_{\alpha'}) \quad .$$

En outre, il existe un morphisme β , tel que l'on ait

$$\theta_{\alpha} = \theta_{\alpha'} \circ \beta \quad .$$

On a alors

$$\alpha = \theta_{\alpha} \circ \sigma^{\alpha} = (\theta_{\alpha'} \circ \beta) \circ \sigma^{\alpha} \quad .$$

Soit γ' l'inverse à droite de l'épimorphisme $\sigma^{\alpha'}$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_{\alpha'} \circ (\sigma^{\alpha'} \circ \gamma') \circ \beta \circ \sigma^{\alpha} \quad , \\ &= (\theta_{\alpha'} \circ \sigma^{\alpha'}) \circ (\gamma' \circ \beta \circ \sigma^{\alpha}) \quad , \\ &= \alpha' \circ (\gamma' \circ \beta \circ \sigma^{\alpha}) \quad . \end{aligned}$$

On a donc trouvé un morphisme ϖ , tel que l'on ait

$$\alpha = \alpha' \circ \varpi \quad .$$

(c) La conclusion est immédiate. Si l'on suppose l'égalité

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \quad ,$$

alors il est vrai que

$$\theta_\alpha \leqslant \theta_{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad \theta_{\alpha'} \leqslant \theta_\alpha \quad .$$

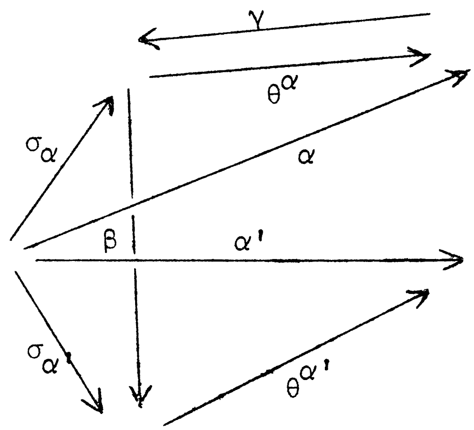
Ce qui montre qu'il existe ϖ et φ' , tels que l'on ait

$$\alpha = \alpha' \circ \varpi \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \alpha \circ \varphi' \quad .$$

PROPOSITION III.3'. - Deux morphismes d'une catégorie bonne sont $\mathcal{L}$-équivalents, si, et seulement si, leurs quotients sont égaux.

(a) La catégorie étant en particulier semi-bonne, la proposition III.3 donne la nécessité de la condition.

(b) La condition est suffisante.



Soient $\sigma_{\alpha'}$ et σ_α des épimorphismes, tels que l'on ait

$$\sigma_{\alpha'} = \beta \circ \sigma_\alpha \quad .$$

On a alors l'égalité

$$\alpha' = \theta^{\alpha'} \circ (\beta \circ \sigma_\alpha) \quad .$$

Soit γ un inverse à gauche du monomorphisme θ^α . On obtient

$$\alpha' = \theta^{\alpha'} \circ \beta \circ (\gamma \circ \theta^\alpha) \circ \sigma_\alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha' = (\theta^{\alpha'} \circ \beta \circ \gamma) \circ \alpha \quad .$$

On a donc trouvé un morphisme ϖ , tel que l'on ait

$$\varpi \circ \alpha = \alpha' \quad .$$

Enfin, si l'on suppose

$$\mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\alpha') \quad ,$$

il existe des morphismes β et β', tels que l'on ait

$$\beta \circ \sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad \beta' \circ \sigma_{\alpha'} = \sigma_{\alpha} \quad .$$

On a ainsi obtenu deux morphismes φ et φ' vérifiant les égalités

$$\varphi \circ \alpha = \alpha' \qquad \text{et} \qquad \varphi' \circ \alpha' = \alpha \quad .$$

PROPOSITION III.4'. – *Deux morphismes* α *et* α' *d'une catégorie bonne sont* $\mathcal{K}$-*équivalents, si, et seulement si, l'on a simultanément*

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \qquad \underline{\text{et}} \qquad \mathrm{Quot}(\alpha) = \mathrm{Quot}(\alpha') \quad .$$

Cette proposition est la conséquence immédiate des propositions III.2' et III.3'.

PROPOSITION III.5'. – *Etant donnés deux morphismes* α *et* α' *d'une catégorie bonne* $\mathcal{C}$, *ils sont* $\mathcal{D}$-*équivalents, si, et seulement si, l'on peut avoir*

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}' \quad .$$

(a) *La condition est nécessaire*, en vertu de la proposition III.5.

(b) *La condition est suffisante*. Soient α et α' des morphismes admettant les décompositions suivantes :

$$\alpha = \theta^{\alpha} \circ j \circ \sigma^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \theta^{\alpha'} \circ j \circ \sigma^{\alpha'} \quad .$$

Le morphisme ainsi construit

$$\beta = \theta^{\alpha'} \circ j \circ \sigma^{\alpha}$$

est $\mathcal{L}$-équivalent à α et $\mathcal{R}$-équivalent à α'. Ce qui montre que les morphismes α et α' sont $\mathcal{D}$-équivalents.

THÉORÈME III.3. – *Toute catégorie bonne est régulière au sens de von Neumann*.

Rappelons qu'une catégorie régulière est telle que, pour tout morphisme α, il existe un morphisme α' vérifiant l'égalité

$$\alpha \circ \alpha' \circ \alpha = \alpha \quad .$$

D'après le lemme II.2, si une $\mathcal{D}$-classe contient un élément régulier, alors elle est régulière. Ainsi, si toute $\mathcal{D}$-classe d'une catégorie est régulière, la catégorie est régulière.

Pour démontrer la proposition, nous allons montrer que toute $\mathcal{D}$-classe d'une catégorie bonne est régulière.

Soit α un morphisme quelconque de la catégorie, et étudions sa $\mathcal{D}$-classe. On sait que l'on a les équivalences

$$(\alpha \,\mathcal{R}\, \theta_\alpha) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \,\mathcal{L}\, \sigma_\alpha) \ .$$

La catégorie étant bonne, les équivalences suivantes sont aussi vraies :

$$(\theta_\alpha \,\mathcal{L}\, I_{S(\theta_\alpha)}) \qquad \text{et} \qquad (\sigma_\alpha \,\mathcal{R}\, I_{B(\sigma_\alpha)}) \ .$$

Ceci montre que les morphismes α , $I_{S(\theta_\alpha)}$ et $I_{B(\sigma_\alpha)}$ sont $\mathcal{D}$-équivalents. Les identités étant trivialement régulières, nous avons montré que toute $\mathcal{D}$-classe d'une catégorie bonne contient un élément régulier, et est par conséquent régulière. La catégorie, réunion de ces $\mathcal{D}$-classes, est régulière.

THÉORÈME III.1'. - <u>Dans une catégorie bonne</u> $\mathcal{C}$, <u>les image et quotient d'un morphisme</u> α <u>sont isomorphes (c'est-à-dire que</u> $\tilde{\alpha}$ <u>est un isomorphisme dans la catégorie</u> $\mathcal{C}$).

Ceci résulte des théorèmes III.1 et III.3.

THÉORÈME III.2'. - <u>Un endomorphisme</u> α <u>d'une catégorie bonne est</u> $\mathcal{K}$-<u>équivalent à un idempotent, si, et seulement si, le morphisme</u> $\sigma_\alpha \circ \theta_\alpha$ <u>est un isomorphisme de l'objet</u>

$$X = B(\sigma_\alpha) = B(\theta_\alpha) \ .$$

(a) <u>La condition est nécessaire</u>, en vertu du théorème III.2.

(b) Montrons que <u>la condition est suffisante</u>. Posons

$$\varphi = \sigma_\alpha \circ \theta_\alpha \ .$$

Soit φ^{-1} l'inverse de l'isomorphisme φ . Considérons l'endomorphisme ainsi construit

$$\pi = \theta_\alpha \circ \varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha \ .$$

Calculons π^2 .

$$\pi^2 = \theta_\alpha \circ \varphi^{-1} \circ (\sigma_\alpha \circ \theta_\alpha) \circ \varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha$$

$$= i_\alpha \circ I_{S(\theta_\alpha)} \circ \varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha = \theta_\alpha \circ \varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha = \pi \ .$$

Le morphisme π est donc idempotent. En outre, il est $\mathcal{K}$-équivalent au morphisme α par construction.

Ainsi, nous avons caractérisé complètement les équivalences de Green dans les catégories.

Remarques. - Voici de courts exemples et contre-exemples d'illustration :

1° Tout groupe est bien filtrant, semi-bon et même bon.

2° Pour un groupe auquel on a adjoint un élément zéro, la propriété (i) d'une catégorie bien filtrante est mise en défaut par le zéro. On a donc obtenu ainsi une catégorie régulière mais non bonne. Ce qui contredit la réciproque du théorème III.3.

3° Le demi-groupe des entiers strictement positifs, muni de la multiplication, est semi-bon mais n'est pas bon.

4° Le demi-groupe des transformations d'un ensemble fini X n'est pas bien filtrant. Cependant, on peut compléter ce demi-groupe en la catégorie $\mathcal{C}$ bien filtrante (qui sera même bonne) suivante :

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(X) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \{f : S(f) \subset X , \; B(f) \subset X\} .$$

On trouve des exemples beaucoup moins triviaux dans l'étude des diverses catégories de matrices.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Regular $\mathcal{D}$-classes in semi-groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups. Vol. 1. - Providence, American Mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DOSS (C. G.). - Certain equivalence relations in transformation semi-groups (Thesis, Univ. of Tenn., 1955).

[4] DUBREIL (Paul). - Sous-groupes d'un demi-groupe ; Demi-groupe des endomorphismes d'un groupe, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 16, 15 p.

[5] DUBREIL (Paul). - Endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 18, 1964/65, n° 23, 20 p.

[6] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., 2e série, t. 9, 1957, p. 119-221.

[7] KLASA (Jacqueline). - Equivalences de Green dans les catégories bien filtrantes, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).