Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Roger Desq

# Structure des demi-groupes

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 20, nº 2 (1966-1967), exp. nº 16, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_2_A4_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 16



17 avril 1967

# STRUCTURE DES DEMI-GROUPES

par Roger DESQ

(d'après Hans Jürgen HOEHNKE [1])

Dans son mémoire [1], HOEHNKE adapte à l'étude des demi-groupes certaines méthodes utilisées dans le livre de JACOBSON [2] pour déterminer la structure des anneaux. La notion de représentation d'un demi-groupe a été introduite par TULLY [3].

## 1. Représentations d'un demi-groupe.

Soient $S$ un demi-groupe, $M$ un ensemble ; on dit que $S$ opère à droite sur $M$, si, à tout élément $a$ de $S$, correspond une application $\rho_a$ de $M$ dans $M$. On note

$$\rho_a : x \to x\rho_a = xa , \qquad \text{pour } x \in M , \quad a \in S ,$$

$M$ est un $S$-système (à droite), si

$$(xa)b = x(ab) , \qquad \forall\, x \in M , \quad \forall\, a , b \in S .$$

L'application $\Delta : a \to \rho_a$ est un homomorphisme de $S$ dans le demi-groupe des transformations de $M$. L'image $S_M$ de $S$ par $\Delta$ est appelée représentation de $S$ associée au $S$-système $M$ ; si $\Delta$ est injectif, $S_M$ est dite fidèle.

On définit de façon naturelle les homomorphismes entre $S$-systèmes, les $S$-sous-systèmes, les congruences. Si $L$ est un sous-système de $M$, on définit le $S$-système quotient $M/L$ en prenant l'ensemble quotient de $M$ par la relation

$$\lambda : \quad x \equiv y(\lambda) \iff \begin{cases} x = y , \\ \text{ou} \quad x , y \in L . \end{cases}$$

$M/\lambda$ est muni d'une structure de $S$-système par la loi

$$\bar{x}a = \overline{xa} \qquad (\bar{x} = cl(x) \mod \lambda) .$$

Un $S$-sous-système $L$ de $M$ est dit trivial, si $L = M$ ou si $|L| = 1$ ($|L|$ = puissance de $L$).

On pose

$$F_S(M) = \{x \in M ; \quad xa = x , \quad \forall\, a \in S\} \quad (= F(M) \text{ si } S \text{ est fixé}) ,$$

$$MS = \{xa ; \quad x \in M , \quad a \in S\} .$$

Exemple : $S$ lui-même est muni d'une structure de $S$-système en posant $\rho_a = a_R$ multiplication à droite.

$$F(S) = O(S) = \{\text{zéros à gauche de } S\} \ .$$

Si $M$ est un $S$-système quelconque, $M\,O(S) \subset F(M)$ .

DÉFINITION 1.1. - Un $S$-système $M$ (une représentation $S_M$ ) est dit irréductible, si :

(i) $MS \not\subset FM$ ;

(ii) $M$ n'a que des sous-systèmes triviaux.

(i) $\Longrightarrow$ $F(M) \neq M$ ; (ii) $\Longrightarrow$ $|F(M)| \leqslant 1$ . De plus $MS = M$ , car autrement, (ii) $\Longrightarrow$ $MS = \{x\}$ ; $\forall\ a \in S$ , $xa = x$ ; $x \in F(M)$ , ce qui contredit (i).

DÉFINITION 1.2. - Un demi-groupe $S$ est dit primitif (à droite), s'il admet une représentation irréductible fidèle.

Si $S$ est primitif, $|O(S)| \leqslant 1$ , puisque $M\,O(S) \subset F(M)$ .

A une représentation quelconque $S_M$ de $S$ on associe une congruence $\delta_M$ ; $a \equiv b(\delta_M) \iff \rho_a = \rho_b$ .

DÉFINITION 1.3. - On pose

$$\operatorname{rad} S = \bigcap_{M \in I} \delta_M \ ;$$

$I$ désigne l'ensemble des $S$-systèmes irréductibles. (Si $I$ est vide, $\operatorname{rad} S = u$ , la relation universelle.)

THÉORÈME 1.1. - $\operatorname{rad}(S/\operatorname{rad} S) = 0$ ( $0$ représente l'identité).

En effet, si $M$ est un $S$-système, si $\lambda$ est une congruence dans $S$ contenue dans $\delta_M$ , on définit sur $M$ une structure de $S/\lambda$-système, en posant

$$x[a] = xa \qquad ([a] = \mathrm{Cl}\ a \mod \lambda) \ .$$

Inversement, si $M$ est un $S/\lambda$-système, cette relation définit sur $M$ une structure de $S$-module. Le $S$-système $M$ est irréductible si, et seulement si, le $S/\lambda$ système $M$ est irréductible.

DÉFINITION 1.4. - Un $S$-système $Z$ est strictement cyclique, s'il contient un élément $z$ tel que

$$Z = zS \ .$$

L'élément $z$ est un générateur strict de $Z$ .

L'ensemble $\hat{Z}$ des non-générateurs de $Z$ est un S-sous-système de $Z$ , distinct de $Z$ . Si $Z$ contient au moins deux éléments, on a

$$F(Z) \subset \hat{Z} \quad .$$

THÉORÈME 1.2.

(a) Un S-système irréductible $M$ est strictement cyclique, avec $F(M) = \hat{M}$ .
(b) Soit $Z$ un S-système strictement cyclique, $|Z| \geqslant 2$ :
- Si $\hat{Z} = \emptyset$ , $Z$ est irréductible ;
- Si $\hat{Z} \neq \emptyset$ , $Z/\hat{Z}$ est irréductible.

Preuve.

(a) Pour tout élément $x \in M - F(M)$ , on a $xS = M$ ; autrement, soit

$$L = \{y \in M \ , \ yS \subset F(M)\} \quad ,$$

$L$ est un sous-système de $M$ non contenu dans $F(M)$ , donc $L = M$ , ce qui contredit l'hypothèse $MS \not\subset F(M)$ .

(b) $Z = zS$ implique $ZS = Z \not\subset F(Z)$ . Soit $W$ un sous-système de $Z$ non contenu dans $\hat{Z}$ . $W$ contient un élément $w$ tel que $wS = Z$ , $Z \subset WS \subset W$ , $Z = W$ . Ceci démontre (b), lorsque $\hat{Z} = \emptyset$ .

Si $\hat{Z} \neq \emptyset$ : $F(Z/\hat{Z}) = \{\hat{Z}\}$ ; $(Z/\hat{Z})S \not\subset F(Z/\hat{Z})$ , tout sous-système de $Z/\hat{Z}$ est de la forme $W/\hat{Z}$ , où $W$ est un sous-système de $Z$ contenant $\hat{Z}$ ; $Z/\hat{Z}$ est bien irréductible.

## 2. Le socle d'un demi-groupe.

LEMME 2.1. - Soit $\varphi$ un homomorphisme d'un S-système irréductible $M$ dans un S-système quelconque $N$ ; $M' = \varphi(M)$ est, soit un sous-système irréductible de $N$ , soit un sous-système trivial contenu dans $F(N)$ .

$M'S = \varphi(M)S = \varphi(MS) = \varphi(M) = M'$ . D'autre part, si $L$ est un sous-système de $M'$ , $\varphi^{-1}(L)$ est un sous-système de $M$ , $M'$ ne contient pas de sous-système propre. Si $F(M') = M'$ , $M'$ ne contient qu'un seul élément, car si $x$ , $y \in M'$ , $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des sous-systèmes de $M'$ , $\varphi^{-1}(x)$ et $\varphi^{-1}(y)$ sont deux sous-systèmes distincts de $M$ , et l'un d'eux est égal à $M$ .

DÉFINITION 2.1. - Soit $J$ l'ensemble de tous les sous-systèmes irréductibles de $M$ .

$$\mathfrak{S} = \{ \bigcup_{L \in J} L \} \cup F(M)$$

est le socle de $M$ .

Soit $H_\alpha$ le sous-ensemble de $J$ formé des sous-systèmes irréductibles isomorphes à un sous-système fixe $K$ .

$$\mathfrak{Q}_\alpha = \{ \bigcup_{L \in H_\alpha} L \} \cup F(M)$$

est la composante homogène de $\mathfrak{S}$ relative à $K$ . L'intersection de deux composantes homogènes distinctes est $F(M)$ .

Dans l'ensemble des sous-systèmes de $M$ , considérons la relation suivante : $X \sim Y$ , si et seulement s'il existe une suite finie $M_1 , M_2 , \ldots , M_n$ de sous-systèmes de $M$ tels que $M_1 = X$ , $M_n = Y$ , et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ , il existe un homomorphisme de $M_i$ sur $M_{i+1}$ ou de $M_{i+1}$ sur $M_i$ . Cette relation décompose $J$ en classes, $J = \bigcup J_\sigma$ .

Les sous-systèmes

$$\mathfrak{J}_\sigma = \{ \bigcup_{L \in J_\sigma} L \} \cup F(M)$$

sont appelés composantes semi-homogènes du socle $\mathfrak{S}$ .

$M$ est dit complètement réductible [resp. semi-homogène, homogène], si $M = \mathfrak{S}$ [$M = \mathfrak{J}_\sigma$ , $M = \mathfrak{Q}_\alpha$] .

THÉORÈME 2.1.

(a) Soit $M_i$ un S-système ayant un socle $\mathfrak{S}_i \neq \emptyset$ $(i = 1 , 2)$ . Tout homomorphisme $\varphi$ de $M_1$ dans $M_2$ induit un homomorphisme de $\mathfrak{S}_1$ dans $\mathfrak{S}_2$ .

(b) Toute image homomorphe d'un S-système complètement réductible est complètement réductible.

(c) Tout sous-système $M'$ d'un S-système complètement réductible $M$ est complètement réductible.

Preuve. - (a) et (b) résultent du lemme 2.1.

(c)

$$M = \{ \bigcup_{L \in J} L \} \cup F(M) \quad ,$$

$$M' = M' \cap M = \{ \bigcup_{L \in J} (M' \cap L)\} \cup (M' \cap F(M)) \quad .$$

$M' \cap F(M) = F(M')$ ; $M' \cap L$ est un sous-système de $L$ , ou est vide ; nous avons $M' \cap L = \emptyset$ , ou $M' \cap L \subset F(L) \subset F(M')$ , ou $M' \cap L = L$ .

Si on considère $S$ comme $S$-système, les sous-systèmes de $S$ sont les idéaux à droite, le socle $\mathfrak{S}$ de ce $S$-système est appelé socle (droit) du demi-groupe $S$ . L'application $a \to ua$ est un endomorphisme du $S$-système $S$ , d'après le théorème 2.1, $\mathfrak{S}$ est vide ou est un idéal bilatère ; d'après le lemme 2.1, les composantes semi-homogènes sont des idéaux bilatères.

$$\mathfrak{S} = \bigcup \mathfrak{J}_\sigma \ , \qquad \text{avec } \mathfrak{J}_\sigma \cap \mathfrak{J}_\tau = O(S) \quad \text{si } \sigma \neq \tau \ ,$$

ce qui implique

$$\mathfrak{J}_\sigma . \mathfrak{J}_\tau = O(S) \ , \qquad \text{si } \sigma \neq \tau \ .$$

Si $O(S)$ est vide, $\mathfrak{S}$ est vide ou semi-homogène.

Dans la suite, "idéal" remplace "idéal bilatère".

LEMME 2.2. - <u>Un $S$-système $M$ irréductible est irréductible comme $T$-système, pour tout idéal $T$ de $S$ tel que $MT \not\subset F(M)$</u> .

Si $x \in M - F(M)$ , $xT = M$ , car $xT$ est un $S$-sous-système,

$$L = \{x \in M \ ; \ xT \subset F(M)\}$$

est un $S$-sous-système de $M$ égal à $M$ , s'il contient un élément de $M - FM$ .

THÉORÈME 2.2. - <u>Si $S$ est un demi-groupe tel que $O(S)$ soit vide ou que $S/O(S)$ ne contienne pas d'idéal nilpotent non nul, le socle $\mathfrak{S}$ de $S$ est vide ou complètement réductible</u>.

<u>Preuve</u>. - Soit $R$ un idéal à droite de $S$ irréductible (irréductible en tant que $S$-système). Si $R\mathfrak{S} \not\subset F(R)$ , d'après le lemme 2.2, $R$ est un $\mathfrak{S}$-système irréductible. Si $R\mathfrak{S} \subset F(R)$ , $R^2 \subset F(R) = R \cap O(S)$ ; $(R \cup SR)^2 \subset O(S)$ ; $R \subset O(S)$ et $RS \subset R \cap O(S) = F(R)$ , contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME 2.3. - <u>Soit $S$ un demi-groupe complètement réductible</u>.

(a) <u>Tout $S$-système $M$ qui vérifie $MS = M$ est complètement réductible</u>.

(b) <u>Tout $S$-système irréductible est l'image homomorphe d'un idéal à droite irréductible de $S$</u> .

Preuve. - $S = \bigcup_{R \in I} R \cup O(S)$ .

(a) $M\,O(S) \subset F(M)$ .

$$M = MS = (\bigcup_{R \in I} MR) \cup F(M) = (\bigcup_{R \in I} \bigcup_{x \in M} xR) \cup F(M) \quad .$$

$r \to xr$ est un homomorphisme de $R$ sur $xR$ , d'après le lemme 2.1, $xR$ est irréductible ou contenu dans $F(M)$ .

(b) Si $M$ est irréductible, $MS \not\subset F(M)$ , il existe $R$ irréductible avec

$$MR \not\subset F(M) \quad ,$$

il existe $x \in M$ avec

$$xR \not\subset F(M) \quad ,$$

on a $xR = M$ ; $r \to xr$ est un homomorphisme de $R$ sur $M$ .

3. Etude de $\mathrm{Hom}(M , M)$ .

$\mathrm{Hom}(M , M) = \Gamma_M = \{$homomorphismes de $M$ dans $M\} =$ centralisateur de $M$ .

THÉORÈME 3.1. - Le centralisateur d'un $S$-système strictement cyclique est homomorphe à un sous-demi-groupe de $S$ .

Preuve. - Soient $M = xS$ , $\varphi \in \Gamma_M$ , $\varphi(x) = xc$ , $\varphi(xa) = \varphi(x).a = xca$ ; comme $\varphi$ est une application,

$$xa = xb \implies xca = xcb \quad .$$

Inversement, un élément $c$ qui vérifie les relations précédentes définit un homomorphisme de $M$ dans $M$ . L'ensemble $C$ de ces éléments est un sous-demi-groupe de $S$ homomorphe à $\Gamma_M$ .

LEMME 3.1. - Soient $e$ un idempotent de $S$ , et $M$ un $S$-système. Il existe une bijection entre $\mathrm{Hom}(eS , M)$ et $Me$ ; si $M = eS$ , $\Gamma_M \simeq eSe$ .

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(eS , M)$ , $a \in S$ , $\varphi(ea) = \varphi(eea) = \varphi(e)ea$ .

$\varphi(e) = y \in Me$ ; inversement, un élément $y$ de $Me$ définit un homomorphisme $\varphi_y$ de $eS$ dans $M$ , par $\varphi_y(ea) = ya$ . Si $M = eS$ , cette correspondance devient un isomorphisme.

THÉORÈME 3.2. - Soit $e$ un idempotent de $S$ .

(a) Si l'idéal à droite $eS$ est irréductible, $e \notin O(S)$ , $eSe$ est un groupe ou

un groupe avec zéro adjoint ; dans chaque cas, $eSe = \{e\}$ ou $O(eSe) = eSe \cap O(S)$.

(b) Si $O(S)$ est vide ou si $S/O(S)$ ne contient pas d'idéal nilpotent non nul, si $e \notin O(S)$, et si $eSe$ vérifie les conditions de (a), $eS$ est irréductible.

Preuve.

(a) $e \notin O(S)$, car autrement $(eS)S = \{e\} = F(eS)$.

Posons $F(eS) = F$, $F(eS) \subset F(S)$, $F \subset O(S)$. Soit $T$ un idéal à droite de $eSe$, $TS = eTeS \subset eS$ ; donc on a :

- soit $TS \subset F$, d'où $T = Te \subset F$, $T = F$ et $|T| = 1$,
- soit $TS = eS$, d'où $T \subset eSe = TSe = TeSe \subset T$, $T = eSe$.

En particulier,

$$O(eSe) = \begin{cases} eSe \text{ , ce qui donne } eSe = \{e\} \text{ ,} \\ \text{ou } F \text{ , } O(eSe) = eSe \cap O(S) \text{ ,} \\ \text{ou } \emptyset \text{ .} \end{cases}$$

Si $F$ est vide, le demi-groupe $eSe$ n'a pas d'idéaux à droite propres, c'est un groupe.

Si $F = \{f\}$, $f$ est un zéro de $eSe$ ; en effet, si $a \in eSe$, $a \neq f$,

$$a \in a.eSe = eSe \text{ ,} \qquad af.eSe = af = f \text{ .}$$

Ceci montre également que $eSe$ est un groupe avec zéro $f$.

(b) $F(eS) = F \subset O(S) \cap O(eSe)$, comme $e \notin O(S)$, on en déduit $(eS)S \not\subset F$. Soit $ea$ un élément de $eS - F$, $ea \notin O(S)$, $eaS \not\subset O(S)$, car autrement

$$Q = \{x \in S \text{ , } xS \subset O(S)\}$$

est un idéal qui contient strictement $O(S)$, et tel que $Q^2 \subset QS \subset O(S)$.

Maintenant, $eaS \not\subset O(S)$ implique $(eaS)^2 \not\subset O(S)$, $eaSe \not\subset O(S)$, si $eSe \neq \{e\}$, il résulte de l'hypothèse qu'il existe $b \in S$ tel que $eabe \notin O(eSe)$. Comme $eSe$ est un groupe ou un groupe avec zéro, il existe $c$ tel que $eabc = e$, pour tout $d \in S$, $ea.bcd = ed$, donc $ea.S = eS$, $eS$ est irréductible. Si $eSe = \{e\}$, on a encore $eaS \supset eaeS = eS$.

COROLLAIRE 3.1. - Soit $S$ un demi-groupe vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) $S$ ne contient aucun élément zéro à gauche ou à droite ;

(ii) $S$ contient un zéro, mais ne contient pas d'idéal nilpotent non nul.

Soit $e$ un idempotent de $S$, $eS$ est irréductible si, et seulement si, $Se$ est irréductible.

THÉORÈME 3.3. - Soient $eS$ et $fS$ deux idéaux à droite irréductibles de $S$ engendrés par les idempotents $e$ et $f$.

(a) $eS \simeq fS \iff eSf \neq O(S)$.

(b) $eS \simeq fS \implies eSe \simeq fSf$.

(c) Tout homomorphisme $\varphi$ de $fS$ dans $eS$ est trivial ( $\varphi$ est un isomorphisme, ou $|\varphi(eS)| = 1$ ).

Preuve. - D'après le lemme 3.1, $\mathrm{Hom}(fS, eS) \longleftrightarrow eSf$.

(a) Si $eS \simeq fS$, il existe $c \in eSf$ tel que $cfS = eS$, comme $eS \neq O(S)$, $c = cf \notin O(S)$, $eSf \neq O(S)$.

Si $eSf \neq O(S)$, $eSf \neq F(eS)$, donc $eSfS = eS$, $eSf.fSe = eSe$. Il existe $a \in eSf$ et $b \in fSe$ tels que $ab = e$, $g = ba$ vérifie $g^2 = g$, $agb = e \notin O(S)$, $g \notin O(S)$, $g \in fSf$, qui est un groupe ou un groupe avec zéro, donc $g = f$. L'application $x \to ax$ est un isomorphisme de $fS$ sur $eS$.

(b) L'application $s \to bsa$ est un isomorphisme de $eSe$ sur $fSf$.

(c) Si $eSf \subset O(S)$, tout homomorphisme de $fS$ dans $eS$ est l'application sur l'élément fixe $F(eS)$ de $eS$. Si $a \in eSf$, $a \notin O(S)$, $afS = eS$, $afSe = eSe$, on peut trouver $b \in fSe$ avec $ab = e$, la démonstration de (a) montre que l'homomorphisme associé à $a$ est un isomorphisme.

## 4. Ensembles vectoriels.

DÉFINITION 4.1. - Soit $\Delta$ un groupe ou un groupe avec zéro. Un $\Delta$-système à gauche $M$ est appelé ensemble vectoriel (à gauche) sur $\Delta$, s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) $\forall\, x \in M$, $1x = x$ ( $1$ = élément unité de $\Delta$ ) ;

(ii) $|F(M)| \leqslant 1$ ou $F(M) = M$ ;

(iii) $F(M) = M \implies |\Delta| = 1$ ;

(iv) $\emptyset \neq F(M) \neq M \implies [\Delta(M - F(M))] \supset F(M)$ ;

(v) Pour $\gamma, \delta \in \Delta$, $x \in M$, la relation $\gamma x = \delta x$ entraîne $\gamma = \delta$ ou $x \in F(M)$.

LEMME 4.1. - Si $M$ est un ensemble vectoriel sur $\Delta$, et si $\emptyset \neq F(M) \neq M$, $|F(M)| = 1$, $\Delta$ contient un zéro, $F(M) = OM$.

D'après (iv), il existe $x \in M - F(M)$ et $\delta \in \Delta$ tels que $\delta x \in F(M)$, $\forall \gamma \in \Delta$, on a $\gamma\delta x = \delta x$, ce qui, d'après (v), implique $\gamma\delta = \delta$. Donc $\delta = 0$, ou $\gamma = 1$, et $\Delta = \{1\}$, ce qui contredit $F(M) \neq M$.

THÉORÈME 4.1. - Tout ensemble vectoriel sur $\Delta$ est un $\Delta$-système complètement réductible homogène.

Preuve.

$$M = \bigcup_{x \in M - F(M)} \Delta x \qquad \text{ou} \qquad M = F(M) \quad .$$

Si $x \in M - F(M)$, $\Delta x$ est un $\Delta$-système irréductible. En effet, $\Delta(\Delta x) \subset F(\Delta x)$ donne $\Delta x \subset F(M)$, $|\Delta x| = 1$, $|\Delta| = 1$, ce qui est impossible. Si $\delta x \notin F(\Delta x)$, $\Delta\delta x = \Delta\delta^{-1}\delta x = \Delta x$.

D'autre part, l'application $\delta x \to \delta y$ $(\delta \in \Delta)$ est un isomorphisme de $\Delta x$ sur $\Delta y$ (si $x$ et $y \notin F(M)$ ).

DÉFINITION 4.2. - Soit $M$ un ensemble vectoriel sur $\Delta$ ; une forme linéaire sur $M$ est un homomorphisme de $M$ dans le $\Delta$-système $\Delta = \Delta 1$.
L'ensemble $M^*$ des formes linéaires sur $M$ est un $\Delta$-système à droite relativement à la loi

$$x(f\delta) = (xf)\delta \qquad (x \in M \ , \ f \in M^* \ , \ \delta \in \Delta) \quad .$$

$M^*$ est non vide, en effet, si $\bar{\Delta} = \Delta - \{0\}$, on peut décomposer $M$ en classes de transitivité modulo $\bar{\Delta}$ ;

$$M = \bigcup_{x \in N} \bar{\Delta} x \quad ,$$

pour avoir un élément $f$ de $M^*$, on peut choisir arbitrairement les images des éléments de $N$.

LEMME 4.2. - Si $|\Delta| \neq 1$, $F(M^*) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $|F(M^*)| = 1$, $0 \in \Delta$, $F(M^*) = M^* 0$.

Soient $f \in F(M^*)$, $x \in M$ ; $(xf)\delta = x(f\delta) = xf$, comme $|\Delta| \neq 1$, $xf = 0 \in \Delta$, $|F(M^*)| = 1$.

THÉORÈME 4.2. - $M^*$ est un ensemble vectoriel à droite sur $\Delta$.

Preuve. - Il faut vérifier les conditions symétriques de la définition 4.1.

(i) est immédiat.

(ii) résulte du lemme 4.2.

(iii) Si $F(M^*) = M^*$ et $|\Delta| \neq 1$, $|M^*| = 1$ (lemme 4.2), mais ceci est impossible, car $|M^*| \geqslant |\Delta|$.

(iv) Si $|\Delta| = 1$, $F(M^*) = M^*$ ; si $|\Delta| \neq 1$, le lemme 4.2 donne le résultat.

(v) Si $f\gamma = f\delta$, $\gamma \neq \delta$ et $f \in M^* - F(M^*)$ ; $\forall\, x \in M$, $(xf)\gamma = (xf)\delta$, d'où $xf = 0$, $f \in F(M^*)$.

THÉORÈME 4.3. - <u>Soient</u> $M$ <u>un</u> $S$-<u>système irréductible</u>, $\Gamma$ <u>son centralisateur</u>. $F_S(M)$ [<u>resp.</u> $F_\Gamma(M)$ ] <u>représente l'ensemble des éléments fixes de</u> $M$ <u>pour</u> $S$ [<u>resp. pour</u> $\Gamma$ ].

(a) <u>Si</u> $|F_S(M)| = 1$, $0 \in \Gamma$, <u>et</u> $F_\Gamma(M) = 0M$.

(b) <u>Si</u> $|\Gamma| \neq 1$, $F_\Gamma(M) = F_S(M)$.

(c) <u>Si</u> $\Gamma$ <u>est un groupe ou un groupe avec zéro</u>, $M$ <u>est un ensemble vectoriel sur</u> $\Gamma$.

<u>Preuve</u>.

(a) Si $F_S(M) = \{y\}$, considérons l'application $\theta$ de $M$ dans $M$ définie par

$$\theta(x) = y\,, \qquad \forall\, x \in M\,,$$

$$\theta(xa) = y = ya = \theta(x).a\,, \qquad \theta \in \Gamma\,.$$

Si $\gamma \in \Gamma$, $(\theta\gamma)(x) = \theta(\gamma x) = y = \theta(x)$, $\theta\gamma = \theta$,

$$(\gamma y)a = \gamma(ya) = \gamma y\,, \qquad \text{donc } \gamma y \in F_S(M)\,, \quad \gamma y = y\,,$$

$$(\gamma\theta)(x) = \gamma(\theta x) = \gamma y = y = \theta(x)\,, \qquad \gamma\theta = \theta\,.$$

Comme $|M| \neq 1$, $|\Gamma| \neq 1$, $\theta$ est bien un zéro pour $\Gamma$.

(b) Soit $x$ un élément de $F_\Gamma(M)$ ; $\gamma x = x$, $\gamma(xa) = xa$, si $x \notin F_S(M)$, $xS = M$, $\gamma = 1$, et $\Gamma = \{1\}$. Si $\Gamma \neq \{1\}$, $F_\Gamma(M) \subset F_S(M)$ et $F_\Gamma(M) = F_S(M)$, car $|F_S(M)| = 1$. D'autre part, d'après (a), si $F_\Gamma(M) = \emptyset$, il en est de même pour $F_S(M)$.

(c) Les conditions (i), (ii), (iii) de la définition 4.1 sont vérifiées, d'après (b).

Si $\emptyset \neq F_\Gamma(M) \neq M$, $|\Gamma| \neq 1$, donc, d'après (b), $|F_S(M)| = 1$, d'après (a), $F_\Gamma(M) = 0M$, et comme $|F_\Gamma(M)| = 1$, $F_\Gamma(M) = 0(M - F_\Gamma(M))$.

Si $\gamma, \delta \in \Gamma$, $\gamma \neq \delta$, et si $x \notin F_\Gamma(M)$, $|\Gamma| \neq 1$, donc $x \notin F_S(M)$, $xS = M$, et si $\gamma x = \delta x$, on en déduit $\gamma = \delta$.

Soit $M$ [resp. $M'$ ] un ensemble vectoriel à gauche [resp. à droite] sur $\Delta$ . Le couple $(M , M')$ forme une paire d'ensembles vectoriels duaux, s'il existe une application de $M \times M'$ dans $\Delta$ vérifiant :

(1) $(\alpha x , x') = \alpha(x , x')$ , $(x , x'\alpha) = (x , x')\alpha$ ;
(2) Si $0 \in \Delta$ , et si $(x , x') = 0$ , pour tous les $x' \in M'$ , $x \in F(M)$ ;
(2') Si $0 \in \Delta$ , et si $(x , x') = 0$ , pour tous les $x \in M$ , $x' \in F(M')$ .

On dit que la paire $(M , M')$ est non dégénérée, si elle vérifie de plus :

(3) Si $(x , x') = (y , x')$ a lieu pour tout $x' \in M'$ , $x = y$ ;
(3') Si $(x , x') = (x , y')$ a lieu pour tout $x \in M$ , $x' = y'$ .

Les conditions (3) et (3') entraînent (2) et (2').

Soit $(M , M')$ une paire d'ensembles vectoriels duaux sur $\Delta$ . Les endomorphismes du $\Delta$-système $M$ constituent un demi-groupe $\mathcal{E}(M)$ . Si $s \in \mathcal{E}(M)$ , on note $xs$ l'image de l'élément $x$ de $M$ par $s$ . $Ms$ est un ensemble vectoriel sur $\Delta$ , ou contient seulement l'élément fixe de $M$ . L'ensemble $\mathfrak{F}(M)$ des éléments $s$ de $\mathcal{E}(M)$ , tels que $Ms = \Delta x$ , est un idéal de $\mathcal{E}(M)$ .

Une application $s'$ de $M'$ dans $M'$ est un adjoint de l'élément $s$ de $\mathcal{E}(M)$ , si,

$$\forall\, x \in M , \quad \forall\, x' \in M' , \qquad (xs , x') = (x , x's') \quad .$$

On désigne par $\mathcal{E}_{M'}(M)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}(M)$ qui admettent un adjoint relativement à $M'$ . On pose

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) = \mathfrak{F}(M) \cap \mathcal{E}_{M'}(M) \quad .$$

$\mathcal{E}_{M'}(M)$ est un demi-groupe, $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ est un idéal de $\mathcal{E}_{M'}(M)$ .

LEMME 4.3. - <u>Soit</u> $(M , M')$ <u>une paire d'ensembles vectoriels duaux. Un élément</u> $s$ <u>de</u> $\mathcal{E}(M)$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ , <u>si et seulement s'il existe</u> $y' \in M'$ <u>et</u> $u \in M$ <u>tels que</u> $xs = (x , y')u$ .

Si $s \in \mathfrak{F}(M)$ , $Ms = \Delta u$ pour $u \in M$ , $xs = \sigma(x)u$ , $\sigma(x) \in \Delta$ .

Si $u \in F(M) = OM$ , $\sigma(x)$ est arbitraire, on peut prendre $\sigma(x) = (x , y')$ pour $y'$ quelconque. Si $u \notin F(M)$ , soit $s'$ l'adjoint de $s$ , la relation

$$(xs , x') = (x , x's') \qquad \text{implique} \qquad \sigma(x)(u , x') = (x , x's') \quad .$$

Comme $u \notin F(M)$ , on peut trouver $x' \in M'$ , tel que $(u , x') = \alpha \neq 0$ , on a $\sigma(x) = (x , x's')\alpha^{-1} = (x , y')$ , avec $y' = x's'.\alpha^{-1}$ .

Inversement, si $xs = (x , y')u$ , définissons $s'$ par $x's' = y'(u , x')$ , on a

$$(xs , x') = (x , y')(u , x') = (x , x's') .$$

LEMME 4.4. - Soit $S$ un demi-groupe primitif ayant des idéaux à droite minimaux ( 0-minimaux, si $S$ contient $0$ ).

Tout idéal à droite minimal $R$ de $S$ est irréductible et fidèle.
Tout $S$-système irréductible et fidèle est homomorphe à $R$ .

Soit $R$ un idéal à droite minimal de $S$ . Si $|R| = 1$ , $R \subset O(S)$ , donc

$$|O(S)| = 1 , \qquad O(S) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad R = \{0\} ,$$

contrairement à l'hypothèse, car dans ce cas $R$ est 0-minimal donc différent de $\{0\}$ .

Soit $M$ un $S$-système irréductible fidèle ; $MR \not\subset F(M)$ , car autrement

$$|MR| = |F(M)| = 1 , \quad M \text{ fidèle} \quad \text{donne} \quad |R| = 1 .$$

Donc $MR = M$ . Il existe un élément $x$ de $M$ tel que $xR = M$ . L'application $\Phi : r \to xr$ de $R$ dans $M$ est un épimorphisme. Il en résulte que $R$ est fidèle, car si, $\forall r \in R$ , $ra = rb$ ,

$$\Phi(ra) = \Phi(rb) \implies \Phi(r)a = \Phi(r)b ,$$

$ya = yb$ a lieu pour tout élément $y$ de $M$ .

$RS \not\subset F(R)$ , car autrement $RS = \{0\}$ , et $R$ n'est pas fidèle. $R$ est bien irréductible.

LEMME 4.5. - Soit $S$ un demi-groupe primitif contenant un idempotent $e$ tel que l'idéal $eS$ soit irréductible, $SeS$ est le socle de $S$ .

Tout idéal irréductible est minimal. D'après le lemme 4.4, le socle

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{R \in I} R \cup O(S) ,$$

$R$ , idéal à droite irréductible, est homomorphe à $eS$ . Si $s \in S$ , $seS$ est un idéal homomorphe à $eS$ $(x \to sx)$ , donc, d'après le lemme 2.1, est contenu dans $\mathfrak{S}$ ; $SeS \subset \mathfrak{S}$ .

Inversement, soit $R$ un idéal irréductible ; $R.SeS \subset R \cap SeS$ , $R.SeS$ qui est un idéal à droite contenu dans $R$ est, soit égal à $R$ , soit égal à $F(R)$ . $R.SeS = R$ donne $R \subset SeS$ . Si $R.SeS \subset F(R) \subset F(S)$ , $Re \subset O(S)$ , d'après le lemme 3.1, tout homomorphisme de $eS$ dans $R$ est trivial, comme il existe un homomor-

phisme surjectif, $R \subset O(S)$ , ce qui est impossible.

THÉORÈME 4.4. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $S$ est un demi-groupe primitif ayant un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent ;

(b) Il existe une paire d'ensembles vectoriels duaux $(M , M')$ sur $\Delta$ $(|M| \neq 1)$, telle que $S$ soit isomorphe à un sous-demi-groupe de $\mathcal{L}_{M'}(M)$ contenant $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ . Le socle de l'image de $S$ dans cet isomorphisme est $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ .

Preuve.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soit $S$ un demi-groupe, $\mathfrak{F}_{M'}(M) \subset S \subset \mathcal{L}_{M'}(M)$ . Soit

$$y' \in M' - F(M') \quad ;$$

$R_{y'}$ est l'ensemble des applications de $M$ dans $M$ définies par

$$x \rightarrow xr = (x , y')u , \qquad \text{pour un } u \in M .$$

D'après le lemme 4.3, $R_{y'} \subset \mathfrak{F}_{M'}(M)$ . Si $s \in S$ , $x(rs) = (x , y')us$ , donc $R_{y'}$ est un idéal à droite de $S$ .

Soient $u_1$ un élément de $M - F(M)$ , $y'_1$ un élément de $M'$ tel que

$$\alpha = (u_1 , y'_1) \neq 0 .$$

Définissons

$$x \rightarrow xr_1 = (x , y')u_1 .$$

Si $u \in M$ , considérons $s : x \rightarrow xs = (x , y'_1)\alpha^{-1} u$ , $s \in \mathfrak{F}_{M'}(M)$ ; $u_1 s = u$ , $xr_1 s = (x , y')u = xr$ , donc $r_1 S = R_{y'}$ .

Si $y' \notin F(M')$ , $R_{y'}$ contient plusieurs éléments, tout élément de $R_{y'}$ engendre $R_{y'}$ , sauf $r_0$ défini par

$$x \rightarrow xr_0 = (x , y')u_0 , \qquad \text{où } u_0 \in F(M) \quad (= OM) .$$

$R_{y'}$ est un idéal irréductible de $S$ .

Si, pour $s , t \in S$ , $rt = rs$ a lieu pour tout élément $r$ de $R_{y'}$ ,

$$\forall u \in M , \qquad (x , y')ut = (x , y')us , \quad us = ut \quad \text{et} \quad s = t .$$

Donc $S$ est un demi-groupe primitif ayant des idéaux à droite irréductibles. Choisissons $v \in M$ , tel que $(v , y') = \beta \neq 0$ , $v \notin F(M)$ , l'application

$$e : x \rightarrow xe = (x , y')(\beta^{-1} v)$$

engendre $R_{y'}$ , c'est un idempotent. $R_{y'} = eS$ . D'après le lemme 4.5, le socle $\mathfrak{S}$ de $S$ est $SeS$ ; $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}_{M'}(M)$ , qui est un idéal de $\mathcal{L}_{M'}(M)$ . Mais, inversement,

$$\mathfrak{F}_{M'}(M) = \bigcup_{y' \in M'-F(M')} R_{y'} \cup O(S) \quad ,$$

d'après le lemme 4.3, est contenu dans $\mathfrak{S}$ .

(a) ==> (b) : Soit $M = eS$ un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent, d'après le lemme 4.4, $M$ est fidèle.

D'après le théorème 3.2, le centralisateur $\Delta = eSe$ de $M$ est un groupe ou un groupe avec zéro ; $M$ est un ensemble vectoriel sur $\Delta$ (théorème 4.2).

Posons $M' = Se$ , pour la multiplication à droite, $M'$ est un $\Delta$-système. $M'$ est un ensemble vectoriel à droite sur $\Delta$ . Si $|\Delta| = 1$ , c'est évident. Si $|\Delta| \neq 1$, $S$ contient un zéro, ou $S$ ne contient aucun élément zéro à gauche ou à droite. $S$ étant primitif, $|O(S)| \leq 1$ . Soit

$$O_r(S) = \{\text{zéros à droite de } S\} \quad ;$$

si $O_r(S)$ est non vide, c'est l'intersection de tous les idéaux à droite de $S$ , c'est donc un idéal à droite irréductible. Supposons $|O_r(S)| > 1$ , alors $O(S) = \Phi$ ,

$$O_r(S) \subset fS \subset O_r(S) \ , \qquad f = f^2 \ , \quad \text{si } f \in O_r(S) \ .$$

L'idéal à droite $fS$ est irréductible, $eSf \not\subset O(S)$ , donc, d'après le théorème 3.3, $eS \simeq fS$ et $eSe \simeq fSf = \{f\}$ , ce qui est impossible $(|\Delta| \neq 1)$ . Si $S$ contient un zéro, soit $N$ un idéal bilatère nilpotent de $S$ . $eN \subset eS$ , donc $eN = eS$ ou $eN = \{0\}$ ; $(eN)^p \subset N^p = 0$ montre que la première hypothèse est impossible ; de $eN = \{0\}$ , on déduit $eSN = \{0\}$ , $N = \{0\}$ . D'après le corollaire 3.1, $M' = Se$ est un idéal à gauche irréductible, qui admet $\Delta$ comme centralisateur (lemme 3.1), c'est un ensemble vectoriel à droite sur $\Delta$ (théorème 4.2).

Pour $ex \in M$ , $y'e \in M'$ , posons

$$(ex \ , \ y'e) = exy'e \quad ,$$

c'est une application de $M \times M'$ dans $\Delta$ ; pour cette application, $(M \ , \ M')$ est une paire d'ensembles vectoriels duaux. Si $a \in S$ , posons

$$\rho_a : \ M \to M \ ; \qquad x\rho_a = xa \ ; \quad \rho_a \in \mathcal{L}(M) \quad .$$

La relation $(xa)y' = x(ay')$ montre que $\rho_a$ admet un adjoint

$$(x\rho_a \ , \ y') = (x \ , \ y'\lambda_a) \quad ;$$

$\lambda_a : \ M' \to M'$ est la multiplication à gauche. $M$ étant fidèle, $a \to \rho_a$ définit

un isomorphisme de $S$ dans $\mathcal{L}_{M'}(M)$ . Un élément $s \in \mathfrak{F}_{M'}(M)$ est caractérisé (lemme 4.3) par

$$xs = (x , y')u , \qquad x \in M , \quad u \in M , \quad y' \in M' ,$$

soit $xs = xy'u$ ; posons $a = y'u$ , $s = \rho_a$ . L'image de $S$ contient $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ .

THÉORÈME 4.5. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $S$ est un demi-groupe primitif à gauche et à droite ayant un idéal à droite irréductible engendré par un idempotent ;

(b) Il existe une paire non dégénérée d'ensembles vectoriels duaux $(M , M')$ sur $\Delta$ , avec $|\Delta| \neq 1$ , telle que $S$ soit isomorphe à un sous-demi-groupe de $\mathcal{L}_{M'}(M)$ contenant $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ .

Preuve.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Soient $S$ un demi-groupe primitif à gauche et à droite, $M = eS$ un idéal à droite irréductible de $S$ , d'après la démonstration du théorème 4.4, $M' = Se$ est un idéal à gauche irréductible de $S$ , donc c'est un $S$-système à gauche fidèle (lemme 4.4). Pour l'application $(ex , y'e) = exy'e$ , la paire $(M , M')$ est non dégénérée. $\Delta = eSe$ , $|\Delta| \neq 1$ , en effet, si $xe$ et $ye$ sont deux éléments distincts de $Se$ , $eS$ étant fidèle, il existe $s \in S$ avec $esxe \neq esye$ .

(b) $\Longrightarrow$ (a) : $|\Delta| \neq 1$ implique $|M| \neq 1$ et $|M'| \neq 1$ . Soit $S$ un sous-demi-groupe de $\mathcal{L}_{M'}(M)$ contenant $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ , d'après le théorème 4.4, $S$ est primitif à droite et contient un idéal irréductible $eS$ . En prenant $\Delta'$ anti-isomorphe à $\Delta$ , $M'$ peut être considéré comme un ensemble vectoriel à gauche sur $\Delta'$ , $M$ à droite sur $\Delta'$ . Pour l'application $(x' , x)' = (x , x')$ , $(M' , M)$ est une paire non dégénérée d'ensembles vectoriels sur $\Delta'$ . Comme $(M , M')$ est non dégénérée, l'application

$$s \longrightarrow s' = \text{adjoint de } s$$

est un anti-isomorphisme de $\mathcal{L}_{M'}(M)$ sur $\mathcal{L}_M(M')$ qui envoie $\mathfrak{F}_{M'}(M)$ sur $\mathfrak{F}_M(M')$ . L'image $S'$ par cet anti-isomorphisme de $S$ est un demi-groupe primitif à droite contenant un idéal irréductible à droite engendré par un idempotent, le théorème en résulte.

Remarque. - Si $(M , M')$ est une paire d'ensembles vectoriels duaux, il existe un homomorphisme canonique de $M'$ dans l'ensemble $M^*$ des formes linéaires sur $M$ . A $y' \in M'$ , on fait correspondre

$$\bar{y}' : x \longrightarrow (x , y') .$$

Soient $M_i$ $(i = 1 , 2)$ deux ensembles vectoriels à gauche sur $\Delta_i$ . Une application $s$ de $M_1$ dans $M_2$ est dite semi-linéaire, s'il existe un isomorphisme $\sigma$ de $\Delta_1$ sur $\Delta_2$ tel que

$$(\delta x)s = \delta^{\sigma}(xs) , \qquad \forall\ x \in M_1 , \quad \forall\ \delta \in \Delta_1 .$$

Si $(M_i , M_i')$ $(i = 1 , 2)$ sont deux paires d'ensembles vectoriels duaux sur $\Delta_i$ , si $(s , \sigma)$ est une application semi-linéaire de $M_1$ dans $M_2$ , on dit que $(s' , \sigma^{-1})$ est un adjoint de $(s , \sigma)$ , si c'est un homomorphisme de $M_2'$ dans $M_1'$ tel que

$$(x_1 s , y_2')_2^{\sigma^{-1}} = (x_1 , y_2' s')_1 , \qquad \forall\ x_1 \in M_1 , \quad \forall\ y_2' \in M_2' .$$

$(x_i , y_i)_i$ désigne la forme bilinéaire associée à la paire $(M_i , M_i')$ .

Si, de plus, $s$ est bijective :

- si $a_1 \in \mathfrak{L}(M_1)$ , $s^{-1} a_1 s \in \mathfrak{L}(M_2)$ ;
- si $a_1 \in \mathfrak{F}(M_1)$ , $s^{-1} a_1 s \in \mathfrak{F}(M_2)$ .

Donc, si $(s , \sigma)$ et $(s^{-1} , \sigma^{-1})$ ont des adjoints, l'application

$$a_1 \rightarrow s^{-1} a_1 s$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_{M_1'}(M_1)$ sur $\mathfrak{L}_{M_2'}(M_2)$ qui applique $\mathfrak{F}_{M_1'}(M_1)$ sur $\mathfrak{F}_{M_2'}(M_2)$ .

Pour chaque $\delta_i \in \Delta_i$ , la multiplication à gauche par $\delta_i$ appartient au centralisateur du $S_i$-système $M_i$ , pour tout sous-demi-groupe $S_i$ de $\mathfrak{L}(M_i)$ . On peut considérer que $\Delta_i$ est contenu dans ce centralisateur.

THÉORÈME 4.6. - <u>Soient</u> $(M_i , M_i')$ <u>une paire d'ensembles vectoriels duaux sur</u> $\Delta_i$ , <u>et</u> $S_i$ <u>un sous-demi-groupe de</u> $\mathfrak{L}_{M_i'}(M_i)$ <u>contenant</u> $\mathfrak{F}_{M_i'}(M_i)$ $(i = 1 , 2)$ .

<u>Si le centralisateur du</u> $S_i$-<u>système</u> $M_i$ <u>est</u> $\Delta_i$ $(i = 1 , 2)$ , <u>tout isomorphisme de</u> $S_1$ <u>sur</u> $S_2$ <u>est de la forme</u>

$$a_1 \rightarrow s^{-1} a_1 s ,$$

<u>où</u> $(s , \sigma)$ <u>est une application semi-linéaire bijective de</u> $M_1$ <u>sur</u> $M_2$ <u>telle que</u>

$$\begin{cases} (s , \sigma) \text{ \underline{ait un adjoint} } (s' , \sigma^{-1}) , \\ (s^{-1} , \sigma^{-1}) \text{ \underline{ait un adjoint} } (s'' , \sigma) . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOEHNKE (H. J.). - Structure of semigroups, Canad. J. of Math., t. 18, 1966, p. 449-491.

[2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 37).

[3] TULLY (E. J., Jr). - Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set, Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 533-541.