Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Anne-Marie Nicolas

Modules factoriels

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 10, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 10

30 janvier 1967

MODULES FACTORIELS

par Anne-Marie NICOLAS

1. Définitions préliminaires.

M est un module sans torsion sur un anneau A commutatif et unitaire (donc intègre).

Elément irréductible de M .

DÉFINITION 1. - Un élément ξ non nul de M est dit irréductible si

$$\xi = a\eta \ , \quad a \in A \quad \text{et} \quad \eta \in M \implies a \text{ inversible dans } A \ .$$

Si M est l'anneau A module sur lui-même, les éléments irréductibles sont les unités de A .

Si M est monogène et égal à $A\xi$, les éléments irréductibles sont tous les éléments de la forme $\varepsilon\xi$, où ε est unité de A .

Elément primitif de M .

DÉFINITION 2. - Un élément ξ non nul de M est dit primitif si

$$a\eta \in A\xi \ , \text{ où } \ a \in A \ \text{ et } \ \eta \in M \implies \eta \in A\xi \ .$$

Si $M = A$, les éléments primitifs de M sont les unités de A .

Si $M = A\xi$, les éléments primitifs sont tous les éléments de la forme $\varepsilon\xi$, où ε est unité de A .

THÉORÈME 1. - ξ primitif $\implies$ ξ irréductible.

Soit ξ un élément primitif de M :

$$\xi = a\eta \implies a\eta \in A\xi \implies \eta = b\xi \ ,$$

où $b \in A \implies ab = 1$, et a est inversible.

PROPRIÉTÉ 1. - Soient ξ et η deux éléments primitifs de M tels que $a\eta = b\xi$, où $a \in A$, $b \in A$. Alors, il existe ε , unité de A , tel que $\eta = \varepsilon\xi$ et $b = \varepsilon a$.

En effet, $a\eta \in A\xi$, donc $\eta \in A\xi$; $b\xi \in A\eta$, d'où

$$A\xi = A\eta \qquad \text{et} \qquad \eta = \varepsilon\xi \ ,$$

où ε est unité de A .

Décomposition d'un élément de M en produit de facteurs irréductibles. - On rappelle qu'un élément a de A , non nul et non inversible, est dit irréductible si

$$a = pq \ , \quad p \in A \ , \quad q \in A \implies p \text{ ou } q \text{ sont inversibles} \ .$$

DÉFINITION 3. - On dira que $x \in M$ se décompose en produit de facteurs irréductibles s'il existe a_1 , a_2 , ... , a_n éléments de A irréductibles, et ξ élément irréductible de M , tels que $x = a_1 \, a_2 \ldots a_n \, \xi$.

DÉFINITION 4. - Deux décompositions de x ,

$$x = a_1 \, a_2 \ldots a_n \, \xi = b_1 \, b_2 \ldots b_p \, \eta \ ,$$

seront dites équivalentes si $n = p$, et s'il existe ε , unité de A , tel que $\xi = \varepsilon\eta$, et une permutation j de $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ et des unités $(\varepsilon_k)_{k=1,\ldots,n}$ de A , tels que

$$a_k = \varepsilon_k \, b_{j(k)} \ .$$

Si A est un anneau factoriel, dans $M = A$ considéré comme module sur lui-même, tout élément admet une décomposition en produit de facteurs irréductibles, et deux décompositions d'un même élément sont toujours équivalentes.

THÉORÈME 2. - Si M est un module noethérien sans torsion, tout élément de M se décompose en produit de facteurs irréductibles.

Soit ξ un élément de M . L'application $\Psi : I \longmapsto I\xi$ est une injection de l'ensemble des idéaux de A dans l'ensemble des sous-modules de M , telle que

$$\Psi(I) \subset \Psi(J) \iff I \subset J \ .$$

Il en résulte que A est un anneau noethérien d'intégrité, et que tout élément de A se décompose en produit de facteurs irréductibles de l'anneau A .

Supposons qu'il existe x dans M ne se décomposant pas en produit de facteurs irréductibles. $\{Ax \mid x \neq a_1 \ldots a_n \, \xi\}$ a un élément maximal, soit Az , z n'est pas irréductible, donc il existe a non inversible dans A , et η dans M , tels que $z = a\eta$; $Az \subsetneq A\eta$, donc η admet une décomposition en produit de facteurs irréductibles $\eta = b_1 \ldots b_n \, \eta_1$; or $a = a_1 \ldots a_p$, où a_i est irréductible dans

A . Donc $z = a_1 \dots a_p\, b_1 \dots b_n\, \eta_1$, et z se décompose en produit de facteurs irréductibles.

Remarquons que deux décompositions ne seront pas toujours équivalentes (exemple d'un anneau noethérien non factoriel considéré comme module sur lui-même).

2. Définition d'un module factoriel.

DÉFINITION 5. - Un module M sans torsion sur un anneau A est dit factoriel si:

(1) Tout élément de M admet une décomposition en produit de facteurs irréductibles ;

(2) p irréductible dans A $\Longrightarrow$ p premier (condition de Gauss dans l'anneau A) ;

(3) ξ irréductible dans M $\Longrightarrow$ ξ primitif (condition de Gauss dans M).

Si A est un anneau factoriel, c'est un module factoriel en tant que module sur lui-même (la condition (3) est réalisée d'après le § 1, définitions 1 et 2).

Tout module monogène (libre, de rang 1) sur un anneau factoriel est un module factoriel.

Pour qu'un module noethérien sans torsion soit factoriel, il faut et il suffit que la condition de Gauss dans A et la condition de Gauss dans M soient satisfaites.

PROPRIÉTÉ 2. - Si M est un module factoriel sur A , alors A est un anneau factoriel.

D'après les conditions (1) et (3) de la définition 5, il existe dans M des éléments primitifs. Soient ξ un élément primitif de M , et a un élément de A . D'après (1), $a\xi = a_1\, a_2 \dots a_n\, \eta$, donc $\eta \in A\xi$; or η est irréductible, donc $\eta = \varepsilon\xi$, où ε est inversible dans A ; $a = \varepsilon a_1 \dots a_n$, donc tout élément de l'anneau A se décompose en produit de facteurs irréductibles. Puisque la condition de Gauss est vérifiée dans l'anneau A , A est un anneau factoriel.

PROPRIÉTÉ 3. - Si M est un module factoriel, et ξ et η deux éléments irréductibles de M :

$$a\eta = b\xi\ ,\quad a \in A\ ,\quad b \in A \Longrightarrow \eta = \varepsilon\xi \text{ et } a\varepsilon = b\ ,$$

où ε est unité de A .

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 et de la condition de Gauss dans M . D'autre part, si M est un module factoriel, A est un anneau factoriel. Il résulte de la proposition 3 et de l'"unicité" de la décomposition dans l'anneau A en produit de facteurs irréductibles que deux décompositions d'un même élément de M seront toujours équivalentes.

Donc si M est un module factoriel, c'est un module sans torsion sur un anneau factoriel, tel que, tout élément admette une décomposition en produit de facteurs irréductibles, et que deux décompositions d'un même élément soient toujours équivalentes.

Réciproquement, soit M un module vérifiant les trois conditions précédentes. Les conditions (1) et (2) de la définition 5 sont satisfaites. Soit ξ un élément irréductible de M : $a\eta \in A\xi$, $\eta \in M$.

$a\eta = b\xi$, $a = a_1 \dots a_n$ (décomposition en produit de facteurs irréductibles dans A) ,

$b = b_1 \dots b_p$ (décomposition en produit de facteurs irréductibles dans A) ,

$\eta = c_1 \dots c_q \zeta$ (décomposition en produit de facteurs irréductibles dans M) .

$a_1 \dots a_n c_1 \dots c_q \zeta = b_1 \dots b_p \xi$ sont deux décompositions d'un même élément de M en produit de facteurs irréductibles. Elles sont équivalentes, et $\zeta = \varepsilon\xi$, où ε est unité de A , $\zeta \in A\xi \implies \eta \in A\xi$, et ξ est primitif dans M . D'où le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un module M sans torsion sur un anneau A factoriel soit factoriel, il faut et il suffit que tout élément de M se décompose en produit de facteurs irréductibles, et que deux décompositions d'un même élément soient toujours équivalentes.

Remarquons que dans le théorème précédent nous avons supposé, non seulement que M était un module sans torsion dans lequel tout élément se décomposait en produit de facteurs irréductibles, de façon unique (à l'équivalence près définie ci-dessus (définition 4)), mais que A était de plus un anneau factoriel.

Il serait intéressant d'étudier les modules sans torsion pour lesquels on supposerait seulement l'existence et l'unicité d'une décomposition en produit de facteurs irréductibles. Les modules factoriels en sont des cas particuliers.

Propriétés caractéristiques des modules factoriels.

PROPRIÉTÉ 4. - Pour que M , module sans torsion sur un anneau factoriel, soit factoriel, il faut et il suffit que :

1° Tout élément se décompose en produit de facteurs irréductibles ;

2° ξ irréductible dans $M \Longrightarrow \xi$ primitif .

Ceci résulte immédiatement de la définition 5.

PROPRIÉTÉ 5. - Pour que M , module sans torsion sur un anneau factoriel, soit factoriel, il faut et il suffit que :

1° Tout élément se décompose en produit de facteurs irréductibles ;

2° $a\eta = b\xi$, où ξ et η sont irréductibles dans M , $\Longrightarrow a = \varepsilon b$, $\xi = \varepsilon\eta$, où ε unité de A .

Si M est factoriel, les conditions 1° et 2° sont bien réalisées d'après la définition 5 et la proposition 3. Réciproquement, si M vérifie les conditions de la proposition 5, les conditions (1) et (2) de la définition 5 sont satisfaites. Soit ξ irréductible : $ax = b\xi$; alors $x = c\eta$, où η est irréductible d'après l'existence de la décomposition ; $ac\eta = b\xi$, donc $\xi = \varepsilon\eta$ et $x \in A\xi$. ξ est donc primitif, et la condition de Gauss dans M est satisfaite.

3. Somme directe, produit direct, facteur direct de modules factoriels.

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de modules factoriels sur le même anneau A . Nous désignons par

$$\prod_{i\in I} M_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} M_i$$

respectivement le produit direct et la somme directe des M_i .

Si M_i est un A-module sans torsion pour tout i ,

$$\prod_{i\in I} M_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} M_i$$

sont des A-modules sans torsion.

$$x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \quad \text{dans } M_i , \qquad x_i = a_1^i \dots a_{n_i}^i \xi_i = a_i \xi_i ,$$

où ξ_i est irréductible dans M_i , et a_k^i irréductible dans A ,

$$x = cy , \quad c \in A , \quad y \in M \iff c \mid a_1^i \dots a_{n_i}^i , \quad \forall\, i .$$

Donc $x = (x_i)_{i\in I} = (a_i \xi_i)_{i\in I}$ est irréductible si, et seulement si, il n'existe dans A aucun diviseur commun aux a_i . Soit d le p. g. c. d. des a_i :

$$x = dy \ , \qquad \text{où } y \text{ est irréductible dans } \prod_{i\in I} M_i \ .$$

A étant factoriel, tout élément se décompose en produit de facteurs irréductibles.

Montrons l'unicité de la décomposition (à l'aide de la propriété 4).

ξ irréductible dans M ; $a\xi = b\eta$, $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$, $\eta = (\eta_i)_{i\in I}$.

$\xi_i = a_i \xi_i'$ et $\eta_i = b_i \eta_i'$, où ξ_i' et η_i' , sont irréductibles dans M_i .

$aa_i \xi_i' = bb_i \eta_i'$, $\forall\, i \in I$; il existe ε_i , unité de A , tel que $aa_i \varepsilon_i = bb_i$, $\xi_i' = \varepsilon_i \eta_i'$, donc $b \mid aa_i$, $\forall\, i \in I$.

Si β est un facteur irréductible de b , β divise a , car β ne peut diviser a_i pour tout i . Il en résulte que $b \mid a$, c'est-à-dire $a = bc$, $c \in A$.

$$\eta = (b_i \eta_i') = (ca_i \varepsilon_i \eta_i') = (ca_i \xi_i') = c\xi \ .$$

ξ est donc primitif.

Le raisonnement précédent s'applique aussi bien au cas d'une somme directe.

THÉORÈME 4. - La somme directe et le produit direct d'une famille de modules factoriels sont factoriels.

Tout module libre sur un anneau factoriel est factoriel.

Mais il existe des modules factoriels qui ne sont pas des modules libres sur un anneau factoriel : si A est un anneau principal ayant une infinité d'idéaux maximaux (par exemple Z), si I est un ensemble infini, alors le module produit A^I n'est pas un module libre. Z^N est un module factoriel sur Z qui n'est pas un module libre ([2], § 3, exercice 10). Donc :

$$\text{module factoriel} \not\Longrightarrow \text{module libre sur anneau factoriel} \ .$$

Exemples : Le théorème 4 permet de donner de nombreux exemples de modules factoriels.

A anneau factoriel $\Longrightarrow$ A^n est un A-module factoriel .

A anneau factoriel $\Longrightarrow$ A[X] et A[[X]] sont des A-modules factoriels .

Facteur direct d'un module factoriel. - Soit un module factoriel M . P sous-module de M est facteur direct dans M s'il existe un supplémentaire Q de P dans M : $M = P \oplus Q$. M étant sans torsion, P est sans torsion.

Soit ξ un élément de P irréductible dans P :

$\xi = a(x + y)$, $x \in P$, $y \in Q \Longrightarrow \xi - ax \in P \cap Q \Longrightarrow ay = 0 \Longrightarrow y = 0$.

$\xi = ax$, où $a \in A$, $x \in P$, donc . a est inversible, et ξ est irréductible dans M .

Soit x un élément de P : $x = a_1 \ldots a_n(\xi_1 + \xi_2)$ sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans M ; alors $\xi_2 = 0$, et ξ_1 est irréductible dans P . Il en résulte l'existence et l'unicité de la décomposition de tout élément en produit de facteurs irréductibles. M étant factoriel, A est factoriel et P est factoriel.

Tout module projectif étant facteur direct d'un module libre, tout module projectif sur un anneau factoriel est factoriel (d'après le théorème 4).

THÉORÈME 5. - Tout module facteur direct d'un module factoriel est factoriel. Tout module projectif sur un anneau factoriel est factoriel.

Sur un anneau principal, tout module de type fini est libre ([2]), et tout module projectif non de type fini est libre. Donc, si A est principal : M projectif équivaut à M libre ([3], § 4, exercice 21).

Z^N est factoriel, mais non libre sur Z , donc non projectif. Par conséquent :

module factoriel $\not\Longrightarrow$ module projectif sur anneau factoriel .

4. Autres exemples de modules factoriels.

1° PROPRIÉTÉ 6. - Soient A et B deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$ et $A^* = B^*$ (A^* étant le groupe des unités de A). Alors B est un A-module factoriel.

Conséquences : On retrouve le fait que $A[X]$ est un module factoriel sur A . $A[X_i]_{i=1,2,\ldots,n}$ est un module factoriel, si A est un anneau factoriel.

L'anneau des polynômes à une infinité d'indéterminées sur un anneau factoriel est un module factoriel non noethérien.

2° A étant un anneau factoriel, cherchons les idéaux de A qui sont des modules factoriels sur A . Tout idéal principal est un A-module factoriel.

Soient $\mathfrak{J}$ un idéal de A , et ξ un élément primitif de $\mathfrak{J}$; supposons $A\xi \subsetneq \mathfrak{J}$; soit $y \in \mathfrak{J}$, $y \notin A\xi$. $\xi y \in A\xi \subset \mathfrak{J}$, $\xi \in A$, $y \in \mathfrak{J}$ et $y \notin A\xi$, d'où la contradiction.

PROPRIÉTÉ 7. - A étant un anneau factoriel, les idéaux de A, qui sont des modules factoriels sur A, sont tous les idéaux principaux de A.

Il existe donc des modules sans torsion de type fini sur un anneau factoriel qui ne sont pas des modules factoriels.

Remarquons que dans ce cas les idéaux de A qui sont des modules réflexifs sont les idéaux principaux de A ([4]).

3° Comparaison avec les modules réflexifs. - Démontrons d'abord une autre propriété caractéristique des modules factoriels.

PROPRIÉTÉ 8. - Pour que M, module sans torsion sur un anneau factoriel, soit un module factoriel, il faut et il suffit que :

1° Tout élément se décompose en produit de facteurs irréductibles ;
2° Si a et b sont premiers entre eux, $ax = by \implies y \in aM$.

Condition nécessaire : $ax = by$, $x = a'\xi$, $y = b'\eta$, où ξ et η sont irréductibles dans M ; $aa'\xi = bb'\eta$, donc $aa' = \varepsilon bb'$ (propriété 5), où ε est unité de A.

$$a \mid bb' \implies a \mid b' \implies y \in aM .$$

Condition suffisante : Soient η et ξ irréductibles tels que $a\eta = b\xi$.
$a = da'$, $b = db'$, où d = p. g. c. d. (a, b), et a' et b' premiers entre eux.

$$a\eta = b\xi \implies a'\eta = b'\xi \implies \xi \in a'M \implies a' \text{ inversible} \implies a \mid b \text{ et } b = ac ,$$

$$\eta = c\xi \implies c \text{ inversible} .$$

Et les conditions de la propriété 5 sont satisfaites.

A est supposé maintenant factoriel et noethérien, et M module de type fini sur A, donc noethérien. Tout élément de M se décompose alors en produit de facteurs irréductibles. Dans ce cas, dire que M est factoriel équivaut à dire qu'on a la condition 2° de la propriété 8, et par conséquent puisqu'un anneau factoriel est intégralement clos, cela équivaut à dire que le module M est réflexif ([4], propriété 1).

THÉORÈME 6. - Soit M module sans torsion de type fini sur un anneau factoriel et noethérien. Alors :

$$M \text{ réflexif} \iff M \text{ factoriel} .$$

Si K est un corps, et E un espace vectoriel de dimension infinie, c'est un module factoriel qui n'est pas réflexif. On peut montrer qu'il existe des anneaux factoriels A tels que la somme directe $A^{(N)}$ ne soit pas un module réflexif, bien que ce soit un module factoriel. Donc :

$$M \text{ factoriel } \not\Longrightarrow M \text{ réflexif sur un anneau factoriel .}$$

Je pense que : M réflexif sur anneau factoriel $\Longrightarrow$ M factoriel , mais je n'ai pas d'exemple.

Si A est un anneau principal, et M un module de type fini sur A :

M sans torsion $\Longleftrightarrow$ M projectif $\Longleftrightarrow$ M réflexif $\Longleftrightarrow$ M factoriel $\Longleftrightarrow$ M libre (cf. [3]).

5. Propriétés des modules factoriels.

Dans un anneau factoriel, toute famille non vide d'idéaux principaux admet un élément maximal. Soit M un module factoriel sur un anneau A factoriel ; soit $(Ax_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-modules monogènes de A , $x_i = a_i \xi_i$, où ξ_i est irréductible dans M .

$$Ax_i \subset Ax_j \Longleftrightarrow \exists\, \alpha \in A \text{ tel que } x_i = \alpha x_j \Longleftrightarrow \exists\, \alpha \text{ , } a_i \xi_i = \alpha a_j \xi_j \text{ .}$$

ξ_i et ξ_j étant irréductibles dans M factoriel :

$$Ax_i \subset Ax_j \Longrightarrow a_j \mid a_i \Longrightarrow Aa_i \subset Aa_j \text{ .}$$

$(Aa_i)_{i\in I}$, famille d'idéaux principaux de A , admet un élément maximal Aa_0 . $x_0 = a_0 \xi_0$. Ax_0 est alors maximal dans la famille des $(Ax_i)_{i\in I}$.

Réciproquement, soit M un module sans torsion sur un anneau factoriel tel que toute famille non vide de sous-modules monogènes admette un élément maximal. Supposons que la famille des (Ax) , où x ne se décompose pas en produit de facteurs irréductibles, ne soit pas vide : elle a un élément maximal Am . m n'est pas irréductible, donc $m = ay$, où $y \in M$, $a \in A$, a non inversible.

$Am \subsetneq Ay$. Donc y est décomposable en produit de facteurs irréductibles, et par conséquent m aussi. D'où :

PROPRIÉTÉ 9. - Dans un module factoriel, toute famille non vide de sous-modules monogènes admet un élément maximal.

Réciproquement, si M est un module sans torsion sur un anneau factoriel tel que toute famille non vide de sous-modules monogènes admette un élément maximal, tout élément de M se décompose en produit de facteurs irréductibles.

M est un module factoriel. Soit $a \in A$ tel que $aM = M$; il existe ξ irréductible dans M et x dans M tels que $\xi = ax$, donc a est inversible. Supposons maintenant $aM \subset bM$; soit ξ irréductible dans M ; il existe x tel que $a\xi = bx$; M est factoriel, donc $x \in A\xi$, et b divise a.

Examinons maintenant $aM \cap bM$, où $a \in A$, $b \in A$.

$z \in aM \cap bM$, $z = ax = by = a\alpha\xi = bd\eta = bd'\xi$, ξ irréductible dans M ;

$Aa \cap Ab = Ac$ où $c = p.\ p.\ c.\ m.\ (a, b)$;

$$z = a\alpha\xi = bd'\xi \implies z \in (Aa \cap Ab)\xi ,$$

donc $z \in cM$.

Mais si $z \in cM$, $z \in aM \cap bM$, car c est multiple de a et b. Donc, $aM \cap bM = cM$ avec $c = p.\ p.\ c.\ m.\ (a, b)$. D'où :

PROPRIÉTÉ 10. - Si M est un module factoriel :

1° $aM = M \implies$ a inversible ;
2° $aM \subset bM \implies b \mid a$;
3° $aM \cap bM = cM$, où $c = p.\ p.\ c.\ m.\ (a, b)$.

La condition 1° montre en particulier que Q n'est pas un Z-module factoriel.

Soit M un module sans torsion tel que

$$aM \subset bM \implies b \mid a \quad \text{et} \quad aM \cap bM = cM ;$$

soit ξ un élément irréductible de M (s'il en existe).

$$a\xi = b\eta = z \in aM \cap bM = cM ,$$

or $a \mid c$ et $b \mid c$, car $cM \subset aM$ et $cM \subset bM$, $c = ad = bf$, $z = ad\gamma = bf\gamma$, si $z = c\gamma$.

$\xi = d\gamma$, donc d inversible ;

$$\eta = f\gamma = fd^{-1}\xi \implies \eta \in A\xi ,$$

et ξ est irréductible. D'où le théorème suivant (résultant de la propriété 4) :

THÉORÈME 7. - Pour que M, module sans torsion sur un anneau factoriel, soit factoriel, il faut et il suffit que :

1° Tout élément de M se décompose en produit de facteurs irréductibles ;
2° $aM \subset bM \implies b \mid a$ et $aM \cap bM = cM$.

Pour qu'un anneau A soit factoriel, il faut et il suffit que chaque élément se décompose et que l'intersection de deux idéaux principaux soit un idéal principal. Le théorème précédent est une généralisation de ce résultat aux modules factoriels.

Si M est un module de type fini sur un anneau factoriel, alors $aM \subset bM \implies b|a$ (ce résultat m'ayant été signalé par L. LESIEUR). D'où on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - Pour que M, module sans torsion noethérien sur un anneau factoriel, soit un module factoriel, il faut et il suffit que $aM \cap bM = cM$, quels que soient a et b, éléments de A (cf. résultat analogue pour anneaux factoriels).

Condition portant sur l'espace vectoriel $K \otimes_A M$ pour que M soit un module factoriel. - A est un anneau factoriel de corps des fractions K, M un module sans torsion sur A, $M(K) = K \otimes_A M$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K par la multiplication externe :

$$\lambda(\mu \otimes x) = (\lambda\mu \otimes x) , \qquad \lambda \in K , \ \mu \in K , \ x \in M ,$$

$$\varphi : \ x \longmapsto 1 \otimes_A x$$

$$M \longrightarrow M(K) \qquad ;$$

φ est injective, et A-linéaire. L'image de M par φ est un A-module isomorphe à M, que nous identifierons à M ([1], § 7, n° 10, prop. 26).

Soit Δ une droite de $M(K)$. Etudions $\Delta \cap M$, M étant supposé factoriel.

$z \in \Delta \cap M$, $z = a(1 \otimes \xi)$, où ξ est irréductible dans M.

$$z \in \Delta \implies \frac{1}{a} z \in \Delta \implies 1 \otimes \xi \in \Delta \implies A(1 \otimes \xi) \subset \Delta \cap M .$$

$z_1 \in \Delta \cap M$: il existe $\mu \in K$ tel que

$$z_1 = \mu z = \frac{\mu_1}{\mu_2} a(1 \otimes \xi) , \qquad \mu_1 \in A , \ \mu_2 \in A .$$

$\mu_2 z_1 = \mu_1 a(1 \otimes \xi)$, $1 \otimes \xi$ est irréductible, donc primitif, et $z_1 \in A(1 \otimes \xi)$. Donc $\Delta \cap M = A(1 \otimes \xi)$.

Réciproquement, soit M un module sans torsion sur un anneau factoriel tel que

$$\forall \ z \in M(K) , \qquad Kz \cap M = A(1 \otimes x) .$$

Montrons d'abord que x est irréductible dans M : si $x = ay$,

$$1 \otimes x = a(1 \otimes y) , \qquad 1 \otimes y = \frac{1}{a}(1 \otimes x) ,$$

donc $1 \otimes y \in Kz \cap M$, donc $1 \otimes y \in A(1 \otimes x)$, donc $\frac{1}{a} \in A$.

Soit $x \in M$, $K(1 \otimes x) \cap M = A(1 \otimes \xi)$, où ξ est irréductible dans M .

$$1 \otimes x = \alpha(1 \otimes \xi) , \qquad \alpha \in A ,$$

donc $x = \alpha\xi$. D'où l'existence d'une décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Soient ξ et η , deux éléments irréductibles de M tels que $a\xi = b\eta$.

$$z = 1 \otimes a\xi = 1 \otimes b\eta , \qquad 1 \otimes \xi \in Kz \cap M ,$$

donc $A(1 \otimes \xi) \subset Kz \cap M$.

$Kz \cap M = A(1 \otimes x)$, $A(1 \otimes \xi) \subset A(1 \otimes x)$ $\Longrightarrow$ $\exists\, \alpha \in A$ tel que $\xi = \alpha x$.

Mais ξ est irréductible, donc

$$A(1 \otimes \xi) = A(1 \otimes x) = Kz \cap M = A(1 \otimes \eta) ,$$

$$A(1 \otimes \xi) = A(1 \otimes \eta) ,$$

donc il existe ε unité de A tel que $\xi = \varepsilon\eta$.

THÉORÈME 9. - Pour que M , module sans torsion sur un anneau A factoriel (de corps des fractions K), soit un module factoriel, il faut et il suffit que, dans l'espace vectoriel $K \otimes_A M$ sur K , l'intersection de toute droite avec M soit un sous-module monogène de M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chapitre 2 : Algèbre linéaire. 3e éd. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chapitre 7 : Modules sur les anneaux principaux. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1179 ; Bourbaki, 14).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chapitre 7 : Diviseurs. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1314 ; Bourbaki, 31).

[4] SAMUEL (Pierre). - Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 237-249.

[5] ZARISKI (Oscar) and SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra, 2 vol. - Princeton, Van Nostrand Company, 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).