Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Maury

# Objets quasi-injectifs dans une catégorie de Grothendieck

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 9



23 janvier 1967

# OBJETS QUASI-INJECTIFS DANS UNE CATÉGORIE DE GROTHENDIECK

par Guy MAURY

INTRODUCTION. - La notion de module quasi-injectif a été introduite par JOHNSON en 1961 [2]. Celui-ci a établi pour tout module l'existence d'une "enveloppe quasi-injective" ([2] et [5]). L'existence d'une "enveloppe injective" pour tout objet d'une catégorie de Grothendieck à générateur a été établie par GABRIEL [1]. Il est normal de se demander si, dans une catégorie de Grothendieck, $\underset{\sim}{C}$ , tout objet admet une enveloppe quasi-injective, question qui ne paraît pas avoir été résolue. La première idée qui vient à l'esprit, pour résoudre cette question, est de faire passer à la catégorie $\underset{\sim}{C}$ , à l'aide des théorèmes de plongement, les résultats connus dans les modules : on peut procéder ainsi, en effet, lorsque la catégorie $\underset{\sim}{C}$ est équivalente à une catégorie de modules, ce qui a lieu si, et seulement si, $\underset{\sim}{C}$ possède un petit générateur projectif [4]. Si la catégorie $\underset{\sim}{C}$ possède un générateur, sans hypothèse sur ce générateur, il est intéressant de déduire les résultats ci-dessous à l'aide du théorème de Popesco-Gabriel [6] à partir des résultats correspondants dans les modules ; c'est ce que vient de réaliser un jeune chercheur lyonnais, TISSERON, à qui j'avais posé le problème. Si la catégorie $\underset{\sim}{C}$ ne possède pas de générateur, il ne me semble pas possible d'utiliser les théorèmes de plongement sous leur forme actuelle.

J'ai choisi, dans la suite, de transcrire, dans le cadre des catégories de Grothendieck, les démonstrations de JOHNSON, ce qui n'a pas été toujours immédiat, JOHNSON utilisant en un endroit les éléments des modules.

On pourra se reporter à l'ouvrage de MITCHELL [4] ou à mon cours [5] pour les propriétés classiques des catégories de Grothendieck. Dans la suite, $\underset{\sim}{C}$ désignera une telle catégorie.

## 1. Préliminaires.

DÉFINITION 1. - Un objet $M$ de $\underset{\sim}{C}$ sera dit quasi-injectif si, et seulement si, pour tout monomorphisme $i : N \to M$ , et pour tout morphisme $f : N \to M$ , il existe un morphisme $g : M \to M$ tel que $f = gi$ .

Exemple. - Un objet injectif est quasi-injectif. Dans la catégorie $\text{Mod}_A$ , un objet quasi-injectif est un module quasi-injectif au sens de JOHNSON, comme on peut le vérifier sans peine.

DÉFINITION 2. - Un morphisme appartenant à $\operatorname{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(M , M)$ s'appellera un endomorphisme de $M$ .

DÉFINITION 3. - Soit $h$ un endomorphisme de $M$ , soit un monomorphisme fixé $i : N \to M$ ; on appelle restriction de $h$ à $N$ le morphisme $hi = h'$ . $N$ sera dit stable par $h$ , si $\operatorname{Im} h' = \operatorname{Im} hi \leqslant \operatorname{Im} i = i$ , ou encore si $h(N) \leqslant N$ .

DÉFINITION 4. - Nous dirons que $f : N \to M$ se prolonge à $M$ , étant donné un monomorphisme $i : N \to M$ , s'il existe $g : M \to M$ tel que $gi = f$ .

DÉFINITION 5. - Un objet $M$ de $\underset{\sim}{C}$ sera dit réduit si ses sous-objets forment un ensemble.

Rappelons les lemmes classiques suivants :

LEMME 1. - <u>Soient</u> $M'_1$ <u>et</u> $M'_2$ <u>deux sous-objets de</u> $M$ ; <u>pour que</u> $M'_1 \vee M'_2$ <u>soit égal à</u> $M'_1 \oplus M'_2$ , <u>il faut et il suffit que</u> $M'_1 \cap M'_2 = 0$ .

<u>Démonstration</u>. - Soient $i_1 : M'_1 \to M$ , $i_2 : M'_2 \to M$ , des représentants des sous-objets $M'_1$ et $M'_2$ de $M$ . On sait que, si l'on pose $\varphi = i_1 p_1 + i_2 p_2$ , $p_1$ et $p_2$ représentant $M'_1 \oplus M'_2$ comme produit direct de $M'_1$ et $M'_2$ ,

$$\operatorname{Im} \varphi = M'_1 \vee M'_2 \qquad \text{(on pourra se reporter au cours [3])} .$$

Montrons que si $M'_1 \cap M'_2 = 0$ , $\varphi$ est un monomorphisme : soit $u$ tel que $\varphi u = 0$, c'est-à-dire tel que $i_1 p_1 u = - i_2 p_2 u$ . Considérons le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} & & M'_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\ P' \arrow[urr, "p_1 u"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[drr, "- p_2 u"'] & M'_1 \cap M'_2 \arrow[ur, "\ell_1"] \arrow[dr, "\ell_2"] & & M \\ & & M'_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd} ,$$

où l'on a remarqué que $M'_1 \cap M'_2$ est le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} M'_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\ & M \\ M'_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(cf. [4], page 10, prop. 8.1)} .$$

Il existe un morphisme unique $\tau$ tel que $p_1 u = \ell_1 \tau$ , $- p_2 u = \ell_2 \tau$ . Mais, par hypothèse, $M'_1 \cap M'_2 = 0$ , donc $p_1 u = 0 = p_2 u$ , d'où $u = 0$ , car $u = 0$ est le seul morphisme tel que $p_1 u = p_2 u = 0$ . Nous venons de prouver que $\varphi$ est un monomorphisme, donc $\varphi = \operatorname{Im} \varphi$ : les sous-objets de $M$ , $(M'_1 \vee M'_2 , \operatorname{Im} \varphi)$ et $(M'_1 \oplus M'_2 , \varphi)$ , sont les mêmes.

Réciproquement, si $\varphi$ est un monomorphisme, c'est-à-dire si on a l'égalité des deux sous-objets de $M$ précédents, considérons le diagramme ci-dessous,

$$\begin{tikzcd}
 & & M'_1 \arrow[dr, "e_1"] \arrow[drr, "i_1"] & & \\
P \arrow[r] \arrow[urr, "u_1"] \arrow[drr, "u_2"'] & 0 \arrow[ur, "\ell'_1"] \arrow[dr, "\ell'_2"] & & M'_1 \oplus M'_2 \arrow[r, "\varphi"] & M \\
 & & M'_2 \arrow[ur, "e_2"] \arrow[urr, "i_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

on a $\varphi e_1 = i_1$ et $\varphi e_2 = i_2$ . D'autre part, on sait que $0$ est le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & M'_1 \arrow[d, "e_1"] \\
M'_2 \arrow[r, "e_2"'] & M'_1 \oplus M'_2
\end{tikzcd}$$

(cf. [4], lemme 17.6, page 28). Il est alors facile d'établir, $\varphi$ étant un monomorphisme, que $0$ est le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd}
M'_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
 & M \\
M'_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire l'intersection $M'_1 \cap M'_2$ . Donc $M'_1 \cap M'_2 = 0$ .

LEMME 2. - Soit $M$ un objet réduit de $\underset{\sim}{C}$ . Soit $N$ un sous-objet de $M$ , il existe un sous-objet maximal $N'$ de $M$ tel que $N \cap N' = 0$ , et alors $M$ est extension essentielle de $N \oplus N'$ .

Démonstration. - Soit la famille $\mathfrak{F}$ des sous-objets $N'$ de $M$ tels que

$$N \cap N' = 0 \quad .$$

0 appartient à $\mathfrak{F}$ . Elle est inductive, car soit $\{N_i\}_{i\in I}$ , I ensemble d'indices, une famille d'objets appartenant à $\mathfrak{F}$ et croissante, alors

$$(\bigcup_{i\in I} N_i) \cap N = \bigcup_{i\in I} (N_i \cap N) = 0 \quad ,$$

et ainsi $\bigcup_{i\in I} N_i$ appartient à $\mathfrak{F}$ (nous avons utilisé le fait que la catégorie est de Grothendieck). Il reste à établir que $M$ est extension essentielle de $N \oplus N'$ .

Supposons qu'il existe un sous-objet $Q$ de $M$ , $Q \neq 0$ , tel que

(1) $$Q \cap (N \oplus N') = 0 = Q \cap (N \vee N') \quad ,$$

d'après le lemme 1 : $Q \cap (N \vee N') = 0$ , donc, d'après le lemme 1,

$$Q \oplus (N \oplus N') = Q \vee (N \vee N') \qquad \text{ou} \qquad (Q \oplus N') \oplus N = (Q \vee N') \vee N \quad ,$$

mais $Q \vee N' = Q \oplus N'$ , car $Q \cap N' = 0$ d'après (1). Il en résulte,

$$(Q \vee N') \cap N = 0 \qquad \text{d'après le lemme 1} \ ,$$

donc $Q \vee N' = N'$ d'après la maximalité de $N'$ , donc

$$Q \leqslant N' \leqslant N' \vee N \qquad \text{et} \qquad Q \cap (N \vee N') = Q \neq 0 \quad ,$$

et ceci contredit (1).

## 2. Les théorèmes.

THÉORÈME 1. - <u>Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie de Grothendieck. Un objet réduit</u> $M$ <u>de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>est quasi-injectif si, et seulement si, tout morphisme</u> $f : N' \to M$ <u>se prolonge en un endomorphisme de</u> $M$ , <u>lorsque</u> $M$ <u>est extension essentielle de</u> $N'$ .

<u>Démonstration</u>. - La condition est évidemment nécessaire. Démontrons qu'elle est suffisante. Soit $i : N \to M$ un monomorphisme, et soit $f$ appartenant à $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(N , M)$ . D'après le lemme 2, il existe un sous-objet $(N' , i')$ , maximal parmi ceux dont l'intersection avec le sous-objet $(N , i)$ est nul. Soient $e_1$ , $e_2$ les morphismes $N \to N \oplus N'$ et $N' \to N \oplus N'$ , dits canoniques, avec les notations du lemme 1. $\varphi = ip_1 + i'p_2$ est un monomorphisme, et d'après le lemme 2, $N \oplus N' \xrightarrow{\varphi} M$ est une extension essentielle de $N \oplus N'$ . Il existe

$$\overline{f} : N \oplus N' \to M \quad ,$$

tel que $\overline{f}e_1 = f$ et $\overline{f}e_2 = 0$ . Par hypothèse, $\overline{f}$ se prolonge en un endomorphisme $g$ de $M$ :

$$\overline{f} = g\varphi \qquad \text{et} \qquad \overline{f}e_1 = f = g\varphi e_1 = gi \quad ,$$

car $\varphi e_1 = i$ . Par suite, $M$ est bien quasi-injectif.

<u>Rappel</u>. - Nous disons que $M$ a une enveloppe injective $\hat{M}$ dans $\underset{\sim}{C}$, s'il existe un monomorphisme $i : M \to \hat{M}$ qui soit une extension essentielle de $M$, et si $\hat{M}$ est un objet injectif. On sait que deux enveloppes injectives

$$i : M \to \hat{M} \quad \text{et} \quad i' : M \to \hat{M}'$$

sont telles que $i = \Theta i'$, $\Theta$ étant un isomorphisme.

THÉORÈME 2. - <u>Soit un objet réduit</u> $M$ <u>de</u> $\underset{\sim}{C}$, <u>admettant une enveloppe injective</u> $i : M \to \hat{M}$ ; <u>pour qu'il soit quasi-injectif, il faut et il suffit qu'il soit stable par tout endomorphisme de son enveloppe injective</u> $\hat{M}$ .

<u>Démonstration</u>. - Remarquons d'abord que le choix particulier de l'enveloppe injective de $M$ n'intervient pas : si la condition du théorème est réalisée pour une enveloppe injective de $M$, elle est réalisée pour toute autre enveloppe injective de $M$ .

Montrons d'abord que la condition énoncée par le théorème est suffisante. Soit $N \xrightarrow{j} M$ un monomorphisme, et soit $f : N \to M$ ; on peut tracer le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "\tau"] & \hat{M} \arrow[ddll, "h"] \\
M \arrow[d, "i"'] & & \\
\hat{M} & &
\end{tikzcd}$$

$if$ se prolonge en un endomorphisme $h$ de $\hat{M}$ puisque $\hat{M}$ est injectif, c'est-à-dire $hij = if$ . Par hypothèse, $\operatorname{Im} hi \leqslant i$ , c'est-à-dire $hi = i\tau$ , avec $\tau \in \operatorname{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(M , M)$ . On a alors $hij = i\tau j = if$ , et puisque $i$ est un monomorphisme, $\tau j = f$ , $M$ est bien quasi-injectif.

La réciproque est plus difficile à établir, et n'est plus une simple copie de la démonstration de JOHNSON qui utilise les éléments des modules.

Etablissons d'abord une remarque : considérons le diagramme suivant à colonnes exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
M \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "i"] \\
\hat{M} \arrow[r, "u"] & \hat{M} \arrow[d, "q"] \\
& \hat{M}/M \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

D'après la formule $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = u(\mathrm{Ker}(vu))$ , et d'après les définitions de $u(M)$ , $u^{-1}(M)$ (se reporter par exemple au chapitre 3 du cours [3]), on peut écrire:

$$u(M) \cap M = \mathrm{Im}(ui) \cap \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}(ui\, \mathrm{Ker}(qui)) \quad .$$

Posons

$$A = u^{-1}(M) \cap M = \mathrm{Ker}(qu) \cap i = \mathrm{Im}(i\, \mathrm{Ker}(qui)) = i\, \mathrm{Ker}(qui) \quad ,$$

$$u(A) = \mathrm{Im}(ui\, \mathrm{Ker}(qui)) = u(M) \cap M \quad .$$

On peut donc trouver $A \leqslant M$ tel que $u(A) \leqslant M$ . Il suffit de prendre

$$A = u^{-1}(M) \cap M \quad ,$$

on a

$$u(A) = u(M) \cap M \quad ,$$

et de plus, si l'on suppose $u(M) \cap M \neq 0$ , on a

$$u(A) \neq 0 \quad .$$

Cette remarque nous servira ci-dessous. Soit alors $M$ un objet quasi-injectif de $\underset{\sim}{C}$ , et soit $i : M \to \hat{M}$ une extension essentielle injective de $M$ . Soit $f$ un endomorphisme de $\hat{M}$ (diagramme ci-dessous).

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "i"] \arrow[dl, "g"] & \hat{M} \arrow[ddll, "{h,f}"] \\
M \arrow[d, "i"'] & & \\
\hat{M} & &
\end{tikzcd}$$

Posons $N = M \cap f^{-1}(M)$ , et soit $j$ un représentant du sous-objet $N$ de $M$ : il existe $f'$ tel que $if' = fij$ , car $f(N) \leqslant ff^{-1}(M) \leqslant M$ , donc $\mathrm{Im}\, fij = i\tau$ , et par suite $fij = if'$ pour un certain $f' : N \to M$ .

Par hypothèse, $f'$ se prolonge en un endomorphisme $g$ de $M$ , et $ig$ se prolonge en un endomorphisme $h$ de $\hat{M}$ , puisque $M \leqslant \hat{M}$ et que $\hat{M}$ est injectif :

$$gj = f' \qquad \text{et} \qquad hi = ig \quad .$$

Supposons que nous ayons montré que, en posant $u = h - f$ , $u(M) = 0$ , alors on peut écrire $hi - fi = 0$ ou encore $hi = fi = ig$ et

$$\mathrm{Im}(fi) = \mathrm{Im}(ig) \leqslant i \quad ,$$

et ceci prouve que $M$ est stable par $f$ .

Tout revient donc à prouver que $u(M) = 0$ . Si $u(M) \neq 0$ , comme $\hat{M}$ est extension essentielle de $M$ , $u(M) \cap M \neq 0$ . D'après la remarque précédente, il existe $A$ tel que $A \leqslant M$ , $u(A) \leqslant M$ et $u(A) \neq 0$ : soit $a$ un représentant du sous-objet $A$ de $M$ :

$u(A) = \mathrm{Im}[(f - h)ia] \leqslant i$ entraîne $(f - h)ia = i\tau$ , $fia = i(\tau - ga) = i\tau'$ .

Je dis que $ia \leqslant ij = f^{-1}(M) \cap M$ , car $f^{-1}(M) = \mathrm{Ker}(qf)$ , et

$$qfia = qi\tau' = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad ia \leqslant \mathrm{Ker}(qf) = f^{-1}(M) \quad ,$$

et $ia \leqslant i$ par ailleurs. On a donc bien

$$ia \leqslant f^{-1}(M) \cap M = ij \qquad \text{et} \qquad ia = ijj' \quad .$$

Enfin, on peut écrire

$$fia = fijj' = if'j' = igjj' = hijj' = hia \quad ,$$

donc $(fi - hi)a = 0$ et $u(A) = 0$ , ce qui contredit $u(A) \neq 0$ . Ceci prouve bien que $u(M) = 0$ .

COROLLAIRE. - Si $\underset{\sim}{C}$ admet un générateur, $M$ est un objet quasi-injectif si, et seulement si, $M$ est stable par les endomorphismes de son enveloppe injective.

En effet, on sait que l'existence d'un générateur garantit l'existence d'une enveloppe injective pour tout objet, et que tout objet est réduit.

THÉORÈME 3. - Dans une catégorie de Grothendieck, où tout objet est réduit et admet une enveloppe injective, soit un objet $M$ . $M$ admet une enveloppe quasi-injective, c'est-à-dire "une plus petite" extension essentielle de $M$ quasi-injective.

Démonstration. - Soient $M$ un objet de $\underset{\sim}{C}$ , $\hat{M}$ son enveloppe injective ; soit $\mathfrak{F}$ la famille des sous-objets de $\hat{M}$ contenant $M$ , et qui sont stables par les endomorphismes de $\hat{M}$ ; $\hat{M}$ appartient à $\mathfrak{F}$ . L'intersection d'une famille finie ou non d'éléments de $\mathfrak{F}$ appartient encore à $\mathfrak{F}$ : en effet, soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments appartenant à $\mathfrak{F}$ , et soit $M'$ leur intersection (elle existe puisque la catégorie est de Grothendieck, donc co-complète) : soit $f$ un endomorphisme de $\hat{M}$ :

$$f(\bigcap_{i\in I} M_i) \leqslant \bigcap_{i\in I} f(M_i) \leqslant \bigcap_{i\in I} M_i$$

(voir chapitre 3 du cours [3]). Soit $M'$ l'intersection de tous les sous-objets appartenant à l'ensemble $\mathfrak{F}$ : $M'$ contient $M$ , et $\hat{M}$ est extension essentielle de $M'$ , donc est l'enveloppe injective de $M'$ . D'après le théorème 2, $M'$ est quasi-injective. D'ailleurs $M'$ est extension essentielle de $M$ . Soit maintenant $P$ une extension essentielle de $M$ quasi-injective, $\hat{P}$ est extension essentielle de $M$ , donc $\hat{P} = \hat{M}$ , et $P$ appartient à la famille $\mathfrak{F}$ , donc contient $M'$ . $M'$ est donc la plus petite extension essentielle de $M$ quasi-injective (définie à un isomorphisme près) : on l'appelle l'enveloppe quasi-injective de $M$ .

COROLLAIRE. - Dans une catégorie de Grothendieck à générateur, tout objet admet une enveloppe quasi-injective.

## 3. Compléments.

Je n'ai pas le temps d'exposer ici comment TISSERON déduit les résultats précédents des résultats correspondants dans les modules, à l'aide du théorème de Popesco-Gabriel lorsque la catégorie $\underset{\sim}{C}$ possède un générateur. Je vais me contenter d'indications sommaires.

POPESCO et GABRIEL établissent les résultats suivants : $\underset{\sim}{C}$ est équivalente à une sous-catégorie pleine $\underset{\sim}{C}_1$ de $Mod_A$ , l'injection $I$ de $\underset{\sim}{C}_1$ dans $Mod_A$ conservant les monomorphismes. Il existe un foncteur $S$ de $\underset{\sim}{C}$ admettant un adjoint à gauche $T$ , et il existe un morphisme fonctoriel $\alpha : 1_{Mod_A} \to ST$ . Les objets de $\underset{\sim}{C}_1$ sont dits $\underset{\sim}{C}'$-fermés : un objet de $M$ est $\underset{\sim}{C}'$-fermé si, et seulement si, $\alpha_M$ est un isomorphisme. $ST$ est exact à gauche. Enfin $STM$ est fermé pour tout objet $M$ de $Mod_A$ . $\underset{\sim}{C}'$ est la sous-catégorie localisante $\operatorname{Ker} T$ de $Mod_A$ .

On démontre d'abord le lemme suivant.

LEMME. - Un objet $M$ de $\underset{\sim}{C}_1$ est quasi-injectif si, et seulement si, $IM$ est un objet quasi-injectif de $\underset{\sim}{C}$ .

La condition suffisante est évidente, car $I$ préserve les monomorphismes. Supposons que $M$ soit quasi-injectif dans $\underset{\sim}{C}_1$, et soient $i : N \to M$ un représentant d'un sous-objet $N$ de $M$ dans $\mathrm{Mod}_A$, et $f : N \to M$ un morphisme de $\mathrm{Mod}_A$. $STi$ est un monomorphisme et $\alpha_M^{-1}\, STi : STN \to M$ est un sous-objet de $M$ dans $\underset{\sim}{C}_1$, donc il existe un morphisme $g : M \to M$ tel que

$$g\alpha_M^{-1}\, STi = \alpha_M^{-1}\, STf \quad ,$$

d'où

$$g\alpha_M^{-1}\, STi.\alpha_N = \alpha_M^{-1}\, STf.\alpha_N \quad ,$$

et comme $\alpha$ est un morphisme fonctoriel, on a $gi = f$, d'où le résultat.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha_N"] \arrow[dd, "f"'] & M \arrow[dr, "\alpha_M"] & \\
 & STN \arrow[r, "STi"'] \arrow[dd, "STf"] & STM \\
M \arrow[dr, "\alpha_M"'] & & \\
 & STM &
\end{tikzcd}$$
.

A partir de ces résultats et de quelques autres sur les enveloppes injectives dans $\underset{\sim}{C}_1$, établis par GABRIEL, on peut établir assez facilement nos théorèmes 1, 2, 3 à partir des résultats correspondants dans les modules pour la catégorie $\underset{\sim}{C}_1$, puis pour la catégorie $\underset{\sim}{C}$ qui lui est équivalente.

Je terminerai par une question : Ne serait-il pas possible d'affiner les théorèmes de plongement connus pour obtenir nos théorèmes 1, 2, 3 à partir des théorèmes analogues dans les modules, lorsque la catégorie $\underset{\sim}{C}$ n'a pas de générateur ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math., Paris, 1961).

[2] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Quasi-injective moduls and irreducible rings, J. of London math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-268.

[3] MAURY (Guy). - Introduction à la théorie des catégories, Cours de 3e cycle de la Faculté des Sciences de Lyon, 1965/66, 2e partie (multigraphié).

[4] MITCHELL (Barry). - Theory of categories. - New York, Academic Press, 1965 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 17).

[5] RAVEL (J.). - Modules quasi-injectifs, Faculté des Sciences de Lyon, Section de Documentation, 1965.

[6] POPESCO (Nicolae) et GABRIEL (Pierre). - Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 4188-4190.