

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES FORT

Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 3,
p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOMMES DIRECTES DE SOUS-MODULES CO-IRRÉDUCTIBLES D'UN MODULE

par Jacques FORT

Cette étude est le développement d'une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris, le 16 mai 1966 (cf. [5]).

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles d'un module M , et d'utiliser les résultats obtenus, d'une part pour étudier les \cap -décompositions irréductibles réduites des sous-modules de M , d'autre part pour étendre à un module quelconque une notion de dimension introduite par A. W. GOLDIE, sous des hypothèses de finitude dans [7].

1. Préliminaires.

Rappelons l'essentiel des notions et propriétés utilisées dans cette étude.

Un sous-module C d'un A -module (à gauche) M est, par définition, co-irréductible si $C \neq 0$ et si deux sous-modules non nuls de C ont une intersection non nulle (i. e. sous-module uniforme suivant la terminologie de A. W. GOLDIE dans [6] et [7]).

M étant un sous-module du A -module E , on dit que E est une extension essentielle de M si, X étant un sous-module de E , la relation $M \cap X$ implique $X = 0$; on dit aussi que M est (sous-module) essentiel dans E .

Si M est sous-module du module injectif Q , toute extension essentielle E de M est isomorphe relativement à M (chaque élément de M est invariant) à un sous-module de Q contenant M ; si M est injectif, il ne possède pas d'extension essentielle propre (pour ces propriétés et les suivantes, cf. B. ECKMANN et A. SCHOPF [3], ou L. LESIEUR et R. CROISOT [9]).

M étant un A -module donné, il existe un A -module E contenant M , défini à un isomorphisme près relativement à M , et ayant les propriétés équivalentes suivantes :

- (a) E est une extension essentielle maximale de M ;
- (b) E est une extension essentielle injective de M ;
- (c) E est une extension injective minimale de M .

Un module E satisfaisant aux propriétés précédentes s'appelle (une) l'enveloppe injective de M , et se note $E(M)$; on voit aisément que, dans toute extension injective de M , il existe une enveloppe injective de M .

Les relations entre les notions de module co-irréductible et d'enveloppe injective sont précisées par l'énoncé (cf. E. MATLIS [11]) :

Soit M un A -module non nul. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) 0 est \cap -irréductible dans M (i. e. M est co-irréductible) ;
- (b) L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable (en somme directe) ;
- (c) $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M (ou de $E(M)$).

Il en résulte que : Pour que deux modules co-irréductibles C_1 et C_2 aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de C_1 isomorphe à un sous-module de C_2 .

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes des sommes directes :

PROPOSITION 1. - Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille indépendante de sous-modules d'un A -module M (i. e. $\sum_{i \in I} X_i$ est directe), et pour chaque i , un sous-module Y_i extension essentielle de X_i dans M ; dans ces conditions, la somme $\sum_{i \in I} Y_i$ est directe et est extension essentielle de $\bigoplus_{i \in I} X_i$.

(Cf. par exemple N. BOURBAKI [2], exercice 15, p. 267.)

PROPOSITION 2. - Soient $\bigoplus_{i \in I} X_i$ une somme directe de sous-modules ($\neq 0$) de M , et Y un sous-module de M ; si $Y \cap (\bigoplus_{i \in I} X_i)$ n'est pas nul, il existe alors un sous-module non nul de l'un des X_i isomorphe à un sous-module de Y .

Preuve. - Si le cardinal de l'ensemble I est 2, posons

$$Z = Y \cap (X_1 \oplus X_2) \neq 0 ;$$

si $Z \cap X_1 = 0$, alors $(Z \oplus X_1) \mid X_1 \approx Z$, et $(Z \oplus X_1) \mid X_1$ est sous-module de $(X_2 \oplus X_1) \mid X_1 \approx X_2$; Z est bien isomorphe à un sous-module de X_2 .

Si $Z \cap X_1 \neq 0$, c'est alors un sous-module non nul commun à Y et à X_1 .

Ce résultat s'étend sans peine au cas où $\text{card } I$ est fini ou infini.

2. Sommes directes maximales de co-irréductibles.

Soit $(C_i)_{i \in I}$ la famille collectivisante ($i \leftrightarrow C_i$ est bijectif) des sous-modules co-irréductibles du module M , cette famille pouvant être vide (cf. § 3). L'ensemble \mathcal{A} des parties A de I telles que la somme $\sum_{i \in A} C_i$ soit directe, ordonné par inclusion, est inductif ; il résulte qu'il existe des sommes directes maximales de co-irréductibles :

$$(1) \quad S = \bigoplus_{i \in H} C_i ,$$

définies par le choix d'un élément maximal H dans \mathcal{A} (si la famille des C_i est vide, $S = 0$ par convention) ; et toute somme directe $\bigoplus_{i \in A} C_i$ de co-irréductibles peut être étendue en une telle somme maximale (1), avec $A \subseteq H$.

Si X est un sous-module qui contient un sous-module co-irréductible C , alors $S \cap X \neq 0$ pour toute somme maximale S de co-irréductibles ; en effet $S \cap X = 0$ entraîne $S \cap C = 0$, et la somme $S + C$ serait directe, ce qui contredirait le caractère maximal de S .

Inversement, $S \cap X \neq 0$ et la proposition 2 du § 1 montrent que X contient un sous-module X_0 isomorphe à un sous-module $\neq 0$ d'un co-irréductible C_i ; X contient le co-irréductible X_0 , d'où :

PROPOSITION 3. - Pour une somme directe maximale S de sous-modules co-irréductibles d'un module M , et pour un sous-module X de M , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $S \cap X \neq 0$;
- (b) X contient un sous-module co-irréductible.

Certaines substitutions sont permises sur les composantes d'une somme directe maximale de co-irréductibles ; plus précisément :

PROPOSITION 4. - Etant donnée une somme directe maximale $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ de sous-modules co-irréductibles C_i d'un module M , on obtient une nouvelle somme directe maximale de co-irréductibles :

- (a) En remplaçant chacun des C_i par un de ses sous-modules non nuls C'_i ;
- (b) En remplaçant chacun des C_i par une de ses extensions essentielles E_i dans M .

Preuve de (a). - Il est évident que $S' = \sum_{i \in H} C_i'$ est directe et que chacun des C_i' est co-irréductible ; S' est maximale car si, pour un sous-module co-irréductible C , la somme $S' + C$ était directe, il en serait de même de $S + C$ (la proposition 1 du § 1 s'applique puisque chaque C_i' est extension essentielle d'un quelconque de ses sous-modules non nuls).

Preuve de (b). - $S^* = \sum_{i \in H} E_i$ est directe (proposition 1), et chaque E_i est co-irréductible (contrôle facile, cf. proposition 5.4, p. 13 de [4]) ; le caractère maximal de S^* est évident : si $S^* + C$ était directe, il en serait de même de $S + C$.

Remarquons que les E_i peuvent être choisis, pour chaque i , dans l'ensemble des extensions essentielles maximales de C_i dans M ; de tels E_i sont des "enveloppes injectives" des C_i au sens donné dans l'étude du cas abstrait des (\mathcal{C}) -algèbres modulaires (cf. chap. VII de [4]).

Par une démarche opposée, considérons l'ensemble \mathcal{B} des sous-modules B de M qui ne contiennent aucun sous-module co-irréductible ; 0 est un tel sous-module. \mathcal{B} ordonné par inclusion est inductif ; soit K un élément maximal de \mathcal{B} .

\mathcal{B} est invariant par des extensions essentielles effectuées sur ses éléments. Soient E une extension essentielle dans M de $B \in \mathcal{B}$, et C un co-irréductible de M ; $C \cap E \neq 0$ entraînerait

$$C \cap B = (C \cap E) \cap B \neq 0 ,$$

et B contiendrait le co-irréductible $C \cap B$.

En particulier, tout élément maximal K de \mathcal{B} est sans extension essentielle propre dans M ; lorsque M est un A -module injectif, K est alors injectif (cf. § 1), donc facteur direct dans M .

La comparaison d'un tel K maximal dans \mathcal{B} avec une quelconque des sommes directes maximales $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ de co-irréductibles est précisée par l'assertion (X étant un sous-module) :

$$(2) \quad X \neq 0 \text{ et } K \cap X = 0 \implies S \cap X \neq 0 .$$

Supposons en effet que $S \cap X = 0$; la proposition 3 de ce § 2 montre alors que X ne contiendrait aucun co-irréductible ; la somme directe $K \oplus X$ aurait aussi cette propriété (appliquer la proposition 1 du § 1), ce qui est en contradiction avec la maximalité de K .

Cette même proposition 3 entraîne aussi $S \cap K = 0$; de plus, (2) implique que cette somme directe $S \oplus K$ admet M comme extension essentielle, c'est-à-dire que $S \oplus K$ est un sous-module essentiel de M :

Si X est un sous-module de M ,

$$(S \oplus K) \cap X = 0 \quad \text{entraîne} \quad S \cap X = 0 \quad \text{et} \quad K \cap X = 0 ;$$

et d'après (2),

$$X = 0 .$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉOREME 1. - Pour tout A-module M , il existe des sommes directes maximales S de sous-modules de M co-irréductibles, et des sous-modules K maximaux parmi ceux qui ne contiennent aucun co-irréductible. Si S et K sont deux tels sous-modules :

- (a) La somme $S + K$ est directe ;
- (b) $S \oplus K$ est un sous-module essentiel de M .

Si $M = Q$ est un A-module injectif, Q contient une enveloppe injective $E(S)$ de S ; K étant sans extension essentielle propre dans Q est aussi injectif (il coïncide avec toutes ses enveloppes injectives dans Q). D'après la proposition 1 du § 1, la somme $E(S) + K$ est directe ; d'autre part Q , étant extension essentielle de $S \oplus K$, est a fortiori extension essentielle de l'injectif $E(S) \oplus K$.
Donc

$$Q = E(S) \oplus K .$$

COROLLAIRE. - Dans les conditions du théorème 1, si $M = Q$ est injectif, alors :

$$Q = E(S) \oplus K ,$$

où $E(S)$ est une enveloppe injective de S dans Q .

De plus, si $Q = E(S') \oplus K'$ est une autre telle décomposition, il existe un automorphisme φ de Q tel que :

$$\varphi(E(S)) = E(S') , \quad \varphi(K) = K' .$$

En effet, le couple (S', K) définit la décomposition $Q = E(S') \oplus K$ et l'isomorphisme

$$\varphi_1 : E(S) \rightarrow Q \mid K \rightarrow E(S') ;$$

et le couple (S, K') définit la décomposition $Q = E(S) \oplus K'$ et l'isomorphisme

$$\varphi_2 : K \rightarrow Q \mid E(S) \rightarrow K' .$$

Le théorème 1 et son corollaire incitent à une étude élémentaire des modules M :

- qui ne contiennent aucun co-irréductible (§ 3) ;
- en lesquels il existe une somme directe maximale de co-irréductibles qui soit essentielle dans M (§ 4).

3. Modules sans co-irréductibles.

THÉOREME 2. - Soit $A = \prod_{i \in I} A_i$ l'anneau produit d'une famille infinie d'anneaux unitaires, et soit α l'idéal bilatère des $x = (x_i)_{i \in I}$ qui ont un support fini ; alors :

Dans l'anneau $B = A/\alpha$ il n'existe pas d'idéal à gauche co-irréductible.

Preuve. - Soit b un idéal à gauche de A qui contient strictement α . Pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'il existe alors deux idéaux à gauche b_1 et b_2 de A tels que :

$$\alpha \subset b_1 \subset b, \quad \alpha \subset b_2 \subset b, \quad \alpha = b_1 \cap b_2 .$$

Il existe $b = (b_i)_{i \in I}$, $b \in b$, $b \notin \alpha$; le support de b ,

$$J = \{i \mid i \in I, b_i \neq 0\}$$

est infini. Considérons une partition $J = H + K$ de J en deux ensembles infinis H et K , et définissons les éléments $h = (h_i)_{i \in I}$ et $k = (k_i)_{i \in I}$ de A par :

$$\begin{aligned} h_i &= 1 & \text{si } i \in H & & \text{et} & & h_i &= 0 & \text{si } i \notin H ; \\ k_i &= 1 & \text{si } i \in K & & \text{et} & & k_i &= 0 & \text{si } i \notin K . \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que les éléments $r = hb = bh$ et $s = kb = bk$ n'appartiennent pas à α et ont pour supports respectifs H et K . Posons :

$$\alpha' = (\alpha + Ar) \cap (\alpha + As) ,$$

Ar et As étant les idéaux à gauche monogènes engendrés par r et s ; et soit $x = (x_i)_{i \in I}$ un élément de α' ;

$$x = a + \lambda r = a' + \mu s, \quad \text{avec } a \text{ et } a' \in \alpha, \quad \lambda \text{ et } \mu \in A .$$

Supp a et Supp a' étant les supports de a et a' respectivement, les trois ensembles suivants :

$$(\text{Supp } a) \cap K, \quad (\text{Supp } a') \cap H, \quad (\text{Supp } a) \cap (I - J) = (\text{Supp } a') \cap (I - J),$$

sont finis, ce qui entraîne que le support de x est fini car :

$$i \in (\text{Supp } x) \cap H \implies s_i = k_i, b_i = 0, a'_i \neq 0, i \in (\text{Supp } a') \cap H;$$

$$i \in (\text{Supp } x) \cap K \implies r_i = h_i, b_i = 0, a_i \neq 0, i \in (\text{Supp } a) \cap K;$$

$$i \in (\text{Supp } x) \cap (I - H - K) \implies s_i = r_i = 0, a_i = a'_i \neq 0, i \in (\text{Supp } a) \cap (I - J).$$

Donc $\alpha = (\alpha + Ar) \cap (\alpha + As)$, et il suffit de prendre

$$b_1 = \alpha + Ar \quad \text{et} \quad b_2 = \alpha + As.$$

Rappelons qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-modules d'un A-module M est une décomposition \cap -irréductible réduite de 0 dans M si chacun des X_i est \cap -irréductible dans M, si $\bigcap_{i \in I} X_i = 0$, et si aucun des X_i ne contient

$$\overline{X_i} = \bigcap_{j \in I - \{i\}} X_j.$$

Si 0 est \cap -réductible, alors $\forall i \in I$,

$$X_i \neq 0, \quad \overline{X_i} \neq 0, \quad X_i \cap \overline{X_i} = 0, \quad \text{et} \quad \text{card } I \geq 2;$$

dans ce cas, chaque X_i est \cap -irréductible non essentiel, complément de $\overline{X_i}$ dans M (cf. théorème 8.2, p. 62 de [4]), et chaque $\overline{X_i}$ est co-irréductible (cf. proposition 8.1, p. 65 de [4]).

Si M est un module non nul ne contenant aucun co-irréductible (tel $A|\alpha$ du théorème 2), il résulte de ce qui précède que 0 n'a pas de décomposition \cap -irréductible réduite dans M; néanmoins 0 est \cap -réductible dans M (par définition de M) et est l'intersection de tous les sous-modules \cap -irréductibles $(E_\alpha)_{\alpha \in L}$ de M (cf. proposition 1.1 de [9]) :

$$0 = \bigcap_{\alpha \in L} E_\alpha;$$

il n'existe pas d'élément minimal H_0 dans l'ensemble \mathcal{H} des parties H de L telles que :

$$0 = \bigcap_{\alpha \in H} E_\alpha,$$

sinon $(E_\alpha)_{\alpha \in H_0}$ serait une décomposition irréductible réduite de 0 dans M.

Ces observations peuvent s'appliquer, en particulier, à l'anneau de Boole $\mathcal{E} = \mathcal{P}(I)$ des parties d'un ensemble infini I , défini par la somme symétrique et la réunion des parties ; cet anneau est isomorphe à l'anneau produit

$$A = \prod_{i \in I} A_i, \quad \forall i, \quad A_i = \underline{\mathbb{Z}}/2\underline{\mathbb{Z}}.$$

Le théorème 2 s'applique à A :

Le filtre \mathcal{C} des complémentaires des parties finies de I est l'intersection des ultrafiltres plus fins que lui, et \mathcal{C} ne peut être intersection réduite de tels ultrafiltres.

4. Modules riches en co-irréductibles.

THÉORÈME 3. - Soit M un A -module non nul ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) 0 possède une décomposition irréductible réduite dans tout sous-module non nul de M ;
- (b) Tout sous-module non nul de M contient un sous-module co-irréductible ;
- (c) Il existe une somme directe de sous-modules co-irréductibles de M , qui est essentielle dans M .

Preuve de (a) \implies (b). - Dans le sous-module non nul N , 0 possède une décomposition irréductible réduite,

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i, \quad \text{avec } X_i \subseteq N ;$$

nous savons que, dans ces conditions, les $\overline{X}_i = \bigcap_{j \neq i} X_j$ sont co-irréductibles (si $\text{card } I = 1$, 0 est \cap -irréductible dans N , et N est alors co-irréductible).

Preuve de (b) \implies (c). - La famille des co-irréductibles de $M \neq 0$ n'est pas vide. Considérons une somme directe maximale $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ de sous-modules co-irréductibles. Si S n'était pas essentiel dans M , il existerait un sous-module $X \neq 0$ tel que $S \cap X = 0$; par hypothèse, X contient un co-irréductible C ; la somme $S + C$ serait alors directe, ce qui contredirait la maximalité de S .

Preuve de (c) \implies (b). - Soit N un sous-module non nul de M , et soit $S = \bigoplus_{i \in H} C_i$ la somme directe essentielle donnée par l'hypothèse (c).

M étant extension essentielle de S , $N \cap S \neq 0$; il existe alors un sous-module non nul de N , soit N_0 , isomorphe à un sous-module C'_i de l'un des C_i (cf. proposition 2 du § 1). C'_i étant co-irréductible, il en est de même de N_0 .

Preuve de (b) \implies (a) . - Soit N un sous-module non nul de M ; N , tout comme M , a tous ses sous-modules non nuls qui contiennent au moins un co-irréductible. (b) implique donc (c) pour le module N , et il existe donc dans N une somme directe $S = \bigoplus_{i \in H'} C'_i$ de sous-modules de N co-irréductibles, et qui soit sous-module essentiel dans N . Posons

$$\overline{C'_i} = \bigoplus_{j \neq i} C'_j ;$$

chacun des $\overline{C'_i}$ est \cap -irréductible dans S , car $S/\overline{C'_i}$ est isomorphe au co-irréductible C'_i (si $\text{card } H' = 1$, alors S est co-irréductible ainsi que son extension essentielle N).

Il est aisé de contrôler que $0 = \bigcap_{i \in H'} \overline{C'_i}$ est une décomposition irréductible réduite de 0 dans S ; pour terminer, il suffit de prouver que cette décomposition s'étend à l'extension essentielle N de S ; le théorème 3 est alors conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Soit E une extension essentielle du A -module M .

(a) Pour que 0 soit \cap -irréductible dans M , il faut et il suffit qu'il le soit dans E .

(b) Pour que $0 = \bigcap_{i \in I} X_i$ soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans M , il faut et il suffit que chaque X_i soit la trace sur M de sous-modules X'_i de E tels que $0 = \bigcap_{i \in I} X'_i$ soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans E .

Preuve de (a). - C'est la proposition 5.4, p. 43 de [4].

Preuve de (b). - Nous établirons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME. - E étant une extension (pas nécessairement essentielle) du A -module M , pour qu'un sous-module X de M soit \cap -irréductible dans M , il faut et il suffit qu'il soit la trace sur M d'un sous-module \cap -irréductible de E .

La condition est nécessaire. - Soit X' un complément de M sur X dans E , $X' \cap M = X$ (c'est-à-dire un maximal dans l'ensemble des sous-modules Y de E tels que $Y \cap M = X$). Si X' était \cap -réductible dans E , il existerait des sous-modules X'_1 et X'_2 tels que :

$$X' = X'_1 \cap X'_2, \quad X'_1 \supset X', \quad X'_2 \supset X' \quad (\text{inclusions strictes}) ;$$

cela entraînerait (maximalité de X') :

$$X'_1 \cap M \supset X, \quad X'_2 \cap M \supset X, \quad X = (X'_1 \cap M) \cap (X'_2 \cap M),$$

et X serait \cap -réductible dans M .

La condition est suffisante. - Soit $X = X' \cap M$. Si X était \cap -réductible dans M , alors 0 le serait dans $(M + X') \mid X'$ à cause de l'isomorphisme

$$M \mid X \approx (M + X') \mid X';$$

et X' serait \cap -réductible dans $M + X'$ (a fortiori dans E).

Retour à la preuve de (b).

La condition est nécessaire. - D'après le lemme, il existe, pour chaque i , un \cap -irréductible X'_i dans E tel que $X_i = X'_i \cap M$, ce qui entraîne :

$$0 = \bigcap_{i \in I} (X'_i \cap M) = M \cap \left(\bigcap_{i \in I} X'_i \right);$$

E étant extension essentielle de M : $0 = \bigcap_{i \in I} X'_i$, et cette décomposition est réduite car :

$$X'_i \subseteq \bigcap_{j \neq i} X'_j \implies X_i = X'_i \cap M \subseteq \bigcap_{j \neq i} (X'_j \cap M) = \bigcap_{j \neq i} X_j.$$

La condition est suffisante. - Soit $0 = \bigcap_{i \in I} X'_i$ une décomposition irréductible réduite de 0 dans E ; d'après le lemme, les $X_i = X'_i \cap M$ sont \cap -irréductibles dans M .

$\forall i \in I$, $X_i \subseteq X'_i$ entraîne $0 = \bigcap_{i \in I} X_i$; et cette décomposition est réduite car :

$$0 = \bigcap_{i \neq j} (X'_i \cap M) = M \cap \left(\bigcap_{i \neq j} X'_i \right) \quad \text{entraîne} \quad 0 = \bigcap_{i \neq j} X'_i$$

(E étant extension essentielle de M), ce qui est contraire au fait que $0 = \bigcap_{i \in I} X'_i$ est réduite.

DÉFINITION. - Un module riche en co-irréductibles est un module vérifiant l'une des conditions équivalentes exprimées au théorème 3.

Etudions quelques classes de modules riches en co-irréductibles.

1° Tout A -module noethérien (artinien) est riche en co-irréductibles, la condition (a) du théorème 3 étant réalisée.

2° Si A est un anneau tel que, pour tout idéal à gauche α de A , le A -module à gauche A/α soit riche en co-irréductibles, alors tout A -module (à gau-

che) M est riche en co-irréductibles :

En effet, tout sous-module monogène non nul de M est isomorphe à un quotient A/α qui, par hypothèse, contient au moins un sous-module co-irréductible.

3° Tout module (à gauche) sur un anneau noethérien (ou artinien) à gauche, est riche en co-irréductibles (cas particulier du 2°).

4° Pour que l'anneau $A = \prod_{i \in I} A_i$ produit d'une famille (finie ou infinie) d'anneaux unitaires soit riche en idéaux (à gauche) co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les A_i soient riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles :

La condition est suffisante car, pour $x \in A - \{0\}$, il existe un idempotent e tel que $ex = xe$ n'ait qu'une seule composante non nulle.

5° Pour qu'une somme directe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ d'une famille (finie ou infinie) de A -modules M_i soit riche en co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les M_i soient riches en co-irréductibles (d'après la proposition 2 du § 1).

6° Remarques.

(a) Un quotient M/X d'un module M , riche en co-irréductibles, n'est pas nécessairement riche en co-irréductibles. L'anneau quotient A/α du théorème 2 du § 3, considéré comme A -module, en donne un exemple (lorsque tous les A_i sont riches en co-irréductibles).

(b) Si M est un module riche en co-irréductibles, alors toute extension essentielle (en particulier l'enveloppe injective de M) est riche en co-irréductibles (cf. condition (c) du théorème 3).

Le théorème 1.1 de A. W. GOLDIE dans [7] s'étend au cas d'un module non soumis à des conditions de finitude, par le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Dans un module $M \neq 0$, riche en co-irréductibles, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) E est un sous-module essentiel de M (i. e. M est extension essentielle de M).

(b) E coupe selon un sous-module non nul toutes les composantes d'une quelconque somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M .

(c) E contient une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M .

Montrons que (c) entraîne (a) : Soit $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$ une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M contenue dans E . S est sous-module essentiel de M , puisque M est riche en co-irréductibles (cf. la preuve de (b) \implies (c)).

au théorème 3 du § 4). M est alors extension essentielle de E (transitivité des extensions essentielles).

5. Dimension d'un module injectif.

1° Cas d'un module injectif riche en co-irréductibles. - Tout module Q contient des sommes directes maximales $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$ de sous-modules co-irréductibles C_i . Si Q est injectif, chacun des C_i peut être remplacé par une de ses enveloppes injectives dans Q (cf. proposition 4 du § 2); les C_i sont alors des sous-modules injectifs indécomposables de Q (cf. § 1). Si, de plus, Q est riche en co-irréductibles, S est alors sous-module essentiel de Q (cf. théorème, preuve de (b) \implies (c)).

PROPOSITION 6. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules injectifs indécomposables du module injectif Q riche en co-irréductibles :

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i, \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j.$$

Dans ces conditions :

(a) Pour tout $\alpha \in I$, il existe $\beta \in J$ tel que K_β soit appliqué isomorphiquement sur C_α par un projecteur \bar{p}_α de Q prolongeant le projecteur p_α de S relatif au composant C_α . La somme

$$S' = K_\beta + \left(\bigoplus_{i \neq \alpha} C_i \right)$$

est alors directe et est sous-module essentiel de Q .

(b) Il existe un automorphisme ϕ de Q , et une bijection σ de I sur J , tels que :

$$\forall i \in I, \quad \phi(C_i) = K_{\sigma(i)}.$$

Preuve de (a). - Si le cardinal de I est 1, alors $S = C_\alpha$ est injectif; n'ayant pas d'extension essentielle propre, S est égal à Q ; Q est alors injectif indécomposable, et les assertions (a) et (b) sont trivialement valables dans ce cas.

Nous supposerons donc, dans toute la suite, que $\text{card } I \geq 2$, et que $\text{card } J \geq 2$. Posons

$$\bar{C}_\alpha = \bigoplus_{i \in I - \{\alpha\}} C_i.$$

Comme $C_\alpha \cap \overline{C}_\alpha = 0$, le sous-module \overline{C}_α n'est pas essentiel dans Q ; le théorème 4 du § 4 permet d'affirmer que \overline{C}_α ne coupe pas tous les composants de

$$T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

selon un sous-module non nul; il existe donc $\beta \in J$ tel que :

$$\overline{C}_\alpha \cap K_\beta = 0 .$$

Posons $S' = K_\beta \oplus \overline{C}_\alpha$; et soit \overline{p}_α un projecteur de Q , d'image C_α , prolongeant p_α de S d'image C_α et de noyau \overline{C}_α ; ce projecteur \overline{p}_α s'obtient en prolongeant $S \xrightarrow{p_\alpha} C_\alpha$ en $Q \xrightarrow{u_\alpha} C_\alpha$, puis en composant u_α et l'injection canonique $C_\alpha \xrightarrow{q_\alpha} Q$. Comme \overline{p}_α prolonge p_α :

$$\overline{C}_\alpha \subseteq \text{Ker } \overline{p}_\alpha ;$$

montrons que :

$$\text{Ker } \overline{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 ;$$

en effet :

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \overline{p}_\alpha \cap K_\beta) \cap S &= K_\beta \cap [(\overline{C}_\alpha \oplus C_\alpha) \cap \text{Ker } \overline{p}_\alpha] \\ &= K_\beta \cap [\overline{C}_\alpha \oplus (C_\alpha \cap \text{Ker } \overline{p}_\alpha)] = K_\beta \cap \overline{C}_\alpha = 0 , \end{aligned}$$

d'après le choix de β (observer aussi que $C_\alpha \cap \text{Ker } \overline{p}_\alpha = 0$); Q étant extension essentielle de S , il en résulte que :

$$\text{Ker } \overline{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 .$$

La restriction de \overline{p}_α à K_β est ainsi un homomorphisme injectif, et $\overline{p}_\alpha(K_\beta)$ est un sous-module injectif indécomposable de $\overline{p}_\alpha(Q) = C_\alpha$, donc nécessairement identique à C_α ($\overline{p}_\alpha(K_\beta)$ injectif est facteur direct dans C_α indécomposable) :

$$\overline{p}_\alpha(K_\beta) = C_\alpha .$$

Montrons que le sous-module $S' = K_\beta \oplus \overline{C}_\alpha$ est essentiel dans Q . Si $S' \cap C_\alpha = 0$, la somme $C_\alpha + K_\beta + \overline{C}_\alpha$ serait directe (contraire au caractère maximal de

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i = C_\alpha \oplus \overline{C}_\alpha) ;$$

donc :

$$S' \cap C_\alpha \neq 0 .$$

D'autre part, comme $S' \cap C_i = C_i$ pour tout $i \in I - \{\alpha\}$ (puisque $C_i \subseteq \overline{C_\alpha} \subseteq S'$), S' coupe donc toutes les composantes de S suivant des sous-modules non nuls ; et S' est bien essentiel (cf. le théorème 4 du § 4).

Preuve de (b). - Nous nous inspirerons de la méthode utilisée par G. AZUMAYA dans son remarquable théorème 1, de [1].

D'après le (a) précédent, tout C_i est isomorphe à un K_j (au moins un) ; de même, tout K_j est isomorphe à un C_i (au moins un).

Pour $\alpha \in I$, posons

$$I(\alpha) = \{i \mid i \in I, C_i \text{ est isomorphe à } C_\alpha\} ;$$

et pour $\beta \in J$, posons

$$J(\beta) = \{j \mid j \in J, K_j \text{ est isomorphe à } K_\beta\} .$$

La correspondance entre classes d'équivalences $I(\alpha) \longleftrightarrow J(\beta)$ définie par la propriété : il existe $i \in I(\alpha)$ et $j \in J(\beta)$ tels que C_i et K_j soient isomorphes, est visiblement biunivoque.

Si nous prouvons que deux telles classes correspondantes $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ ont même cardinal, il en résultera que les sommes directes

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i \quad \text{et} \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

seront isomorphes composantes par composantes.

Soit donc un ensemble fini $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ d'indices de $I(\alpha)$; par applications successives du (a), nous pouvons trouver β_1, \dots, β_n , dans J , tels que :

$$S^* = K_{\beta_1} \oplus \dots \oplus K_{\beta_n} \oplus \left(\bigoplus_{i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} C_i \right)$$

soit un sous-module essentiel de Q , et que K_{β_h} soit isomorphe à C_{α_h}

$$(h = 1, \dots, n) ;$$

cela entraîne que les β_h sont dans $J(\beta)$ et que si $\text{card } J(\beta)$ est fini, alors $\text{card } I(\alpha)$ est fini, et

$$\text{card } I(\alpha) \leq \text{card } J(\beta) .$$

Si $\text{card } J(\beta)$ est infini, à chaque $j \in J(\beta)$ associons l'ensemble (éventuellement vide) :

$F(j) = \{i \mid i \in I, \bar{p}_i \text{ applique isomorphiquement } K_j \text{ sur } C_i\}$,

$\{\bar{p}_i\}_{i \in I}$ étant une famille (orthogonale) de projecteurs de Q telle que, pour chaque i , \bar{p}_i prolonge le projecteur p_i de $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$ d'image C_i et de noyau

$\bar{C}_i = \bigoplus_{\lambda \neq i} C_\lambda$, et que :

$$\text{Im } \bar{p}_i = C_i \text{ .}$$

Tout d'abord, $F(j) \subseteq I(\alpha)$; d'autre part, $\text{card } F(j)$ est fini, en effet :

Soit $x_j \in K_j - \{0\}$; $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$ étant essentiel dans Q , il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha x_j \in K_j \cap S$; $\alpha x_j \neq 0$. Soit $\{i_1, \dots, i_s\}$ l'ensemble (fini) des indices $i \in I$ tels que $\bar{p}_i(\alpha x_j) = p_i(\alpha x_j) \neq 0$; on a bien

$$F(j) \subseteq \{i_1, \dots, i_s\} \text{ ,}$$

car, pour $i \notin \{i_1, \dots, i_s\}$, la restriction de \bar{p}_i à K_j a un noyau non nul.

Les $F(j)$ recouvrent $I(\alpha)$ lorsque j décrit $J(\beta)$, puisque, pour chaque $i \in I(\alpha)$, il existe $j \in K_j$ tel que K_j soit appliqué isomorphiquement sur C_i par \bar{p}_i (d'après (a)) :

$$I(\alpha) = \bigcup_{j \in J(\beta)} F(j) \text{ ,}$$

$J(\beta)$ étant de cardinal infini, il en résulte :

$$\text{card } I(\alpha) \leq \text{card } J(\beta) \text{ .}$$

Dans tous les cas, $\text{card } I(\alpha) \leq \text{card } J(\beta)$; et en échangeant les rôles de $I(\alpha)$ et $J(\beta)$, il vient :

$$\text{card } I(\alpha) = \text{card } J(\beta) \text{ .}$$

Il existe donc une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ qui applique chaque classe $I(\alpha)$ sur son associée $J(\beta)$, et pour chaque $i \in I(\alpha)$, il existe un isomorphisme

$$C_i \xrightarrow{\psi_i} K_{\sigma(i)} \text{ ;}$$

définissons alors l'isomorphisme :

$$S \xrightarrow{\Psi} T \text{ par } \Psi = \bigoplus_{i \in I} \psi_i \text{ .}$$

Q étant injectif, Ψ se prolonge en un endomorphisme φ de Q ;

$$0 = \text{Ker } \Psi = \text{Ker } \varphi \cap S \quad \text{entraîne} \quad \text{Ker } \varphi = 0 ,$$

car S est essentiel. φ est injectif, et $\varphi(Q)$ est sous-module injectif extension essentielle de $\varphi(S) = \Psi(S) = T$; Q est donc extension essentielle de $\varphi(Q)$ injectif, et $Q = \varphi(Q)$.

La bijection σ et l'automorphisme φ ainsi construits ont bien les propriétés voulues.

Remarque 1. - Il existe des modules injectifs Q riches en co-irréductibles pour lesquels les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles sont distinctes de Q . Par exemple, soit $A = \prod_{i \in I} A_i$ l'anneau produit d'une famille infinie de corps A_i tous isomorphes à un corps commutatif K ; désignons par q_i les injections canoniques attachées au produit A .

Il est aisé de contrôler que chacun des $q_i(A_i)$ est un A -module simple injectif (donc indécomposable), et que $S = \bigoplus_{i \in I} q_i(A_i)$ est un sous-module essentiel du A -module A . A est d'autre part un A -module isomorphe au produit des A -modules injectifs $q_i(A_i)$; A est donc A -module injectif (enveloppe injective du A -module S) .

Remarque 2. - Dans les conditions de la proposition 6, Q est enveloppe injective de S et de T (puisque S et T sont essentiels dans Q , d'après le théorème 4 du § 4).

2° Cas d'un module injectif quelconque. - Soient

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i \quad \text{et} \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles d'un module injectif Q (nulles si Q est privé de co-irréductibles). Introduisons un sous-module K de Q maximal parmi ceux qui sont privés de co-irréductibles ; le corollaire du théorème 1 du § 2 donne alors :

$$Q = E(S) \oplus K = E(T) \oplus K ,$$

$E(S)$ et $E(T)$ désignant des enveloppes injectives de S et T dans Q . Soit θ l'isomorphisme composé :

$$E(S) \rightarrow Q/K \rightarrow E(T) ;$$

$E(S)$ étant extension essentielle de S , $\theta(E(S)) = E(T)$ est extension essentielle de $\theta(S) = \bigoplus_{i \in I} \theta(C_i)$; $E(T)$ est riche en co-irréductibles (la condition (c) du

théorème 3, § 4, est réalisée) ; la proposition 6 s'applique aux sommes $\theta(S)$ et T :

Il existe une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ et un automorphisme Ψ de $E(T)$ tels que

$$\forall i \in I, \quad \Psi(\theta(C_i)) = K_{\sigma(i)} .$$

Définissons l'automorphisme Ψ de Q , comme étant la somme de $\Psi \circ \theta$ sur $E(S)$ et de l'identité sur K , nous obtenons ainsi le théorème suivant.

THÉOREME 5. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules injectifs indécomposables d'un module injectif Q :

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i, \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j ;$$

il existe alors un automorphisme φ de Q et une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ tels que :

$$\forall i \in I, \quad \varphi(C_i) = K_{\sigma(i)} .$$

Comme toute somme directe maximale de co-irréductibles de Q peut être étendue en une somme directe maximale d'injectifs indécomposables (cf. proposition 4 du § 1), ce théorème 5 permet de donner la définition suivante :

DEFINITION. - On appelle dimension d'un module injectif Q , le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de Q ; ce cardinal qui se note $\dim Q$ ne dépend pas du choix d'une telle famille.

6. Dimension d'un module quelconque.

La notion précédente de dimension s'étant à un module quelconque au moyen du théorème suivant.

THÉOREME 6. - Soient deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles du module M :

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i, \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j ,$$

$E(C_i)$ et $E(K_j)$ des enveloppes injectives des C_i et des K_j .

Dans ces conditions, il existe une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$, et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i \in I} E(C_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(K_j)$, tels que :

$$\forall i \in I, \quad \varphi(E(C_i)) = E(K_{\sigma(i)}) .$$

Preuve. - Soit $E(M)$ une enveloppe injective de M ; choisissons pour chaque i , une enveloppe injective $E(C_i)$ de C_i dans $E(M)$; alors

$$S' = \sum_{i \in I} E(C_i)$$

est directe (cf. proposition 1, § 1) et formée de composantes $E(C_i)$ injectifs indécomposables. Pour cet ensemble de propriétés, S' est maximale dans $E(M)$, car $E(M)$ est extension essentielle de E :

S'il existait un injectif indécomposable Γ de $E(M)$, indépendant des $E(C_i)$: $S' \cap \Gamma = 0$, $C = M \cap \Gamma \neq 0$ serait alors un co-irréductible de M tel que

$$S \cap C = 0 ,$$

donc indépendant des C_i .

De même on peut étendre $T = \bigoplus_{j \in J} K_j$ en une somme directe maximale dans $E(M)$ d'injectifs indécomposables, $T' = \bigoplus_{j \in J} E(K_j)$. Le théorème 5, appliqué aux sommes S' et T' de l'injectif $E(M)$, donne alors la bijection σ et l'isomorphisme φ cherchés.

DÉFINITION. - On appelle dimension d'un module M , le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de M ; ce cardinal qui se note $\dim M$ ne dépend pas du choix d'une telle famille.

Lorsque $\dim M$ est finie, on retrouve bien-entendu la dimension définie par A. W. GOLDIE dans [7].

La dimension d'un module a les propriétés additives que l'on est en droit d'attendre :

PROPOSITION 7. - Si $M = M_1 \oplus M_2$, alors :

$$\dim M = \dim M_1 + \dim M_2 .$$

Preuve. - Introduire les enveloppes injectives Q_1 et Q_2 de M_1 et M_2 , utiliser le corollaire du théorème 1, et observer que la dimension d'un module est égale à celle de son enveloppe injective.

Nous terminerons par quelques observations sur les \cap -décompositions de 0 (ou de tout autre sous-module, par passage aux quotients).

Au cours de l'étude du théorème 3 du § 4, il a été établi que, dans un module M

riche en co-irréductibles, il était possible de trouver une \cap -décomposition irréductible réduite de 0 :

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i$$

sur toute somme directe maximale de co-irréductibles $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$ donnée dans M , c'est-à-dire telle que,

$$\forall i \in I, \quad X_i \text{ contient } \overline{C}_i = \bigoplus_{j \neq i} C_j, \quad \overline{X}_i = \bigcap_{j \neq i} X_j \text{ contient } C_i;$$

et dans ce cas,

$$\text{card } I = \dim M .$$

De telles \cap -décompositions sont caractérisées par le fait que la famille indépendante de co-irréductibles associés $(\overline{X}_i)_{i \in I}$ est maximale.

Il existe des \cap -décompositions irréductibles réduites de 0 telles que la famille indépendante de co-irréductibles associés $(\overline{X}_i)_{i \in I}$ ne soit pas maximale (considérer le \mathbb{Z} -module produit d'une famille infinie de \mathbb{Z} -modules isomorphes au p -groupe de type p^∞ , p étant un nombre premier fixé).

Les théorèmes 3 et 6 permettent, touchant cette question, d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - Soient M un module riche en co-irréductibles et :

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i, \quad 0 = \bigcap_{j \in J} Y_j$$

deux \cap -décompositions irréductibles réduites de 0 sur des familles indépendantes maximales de co-irréductibles ; il existe alors une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i \in I} E(M|X_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(M|Y_j)$ tels que :

$$\forall i \in I, \quad \varphi(E(M|X_i)) = E(M|Y_{\sigma(i)}) .$$

En effet, le théorème 6 montre que les sommes directes :

$$\bigoplus_{i \in I} E(\overline{X}_i) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j \in J} E(\overline{Y}_j)$$

sont isomorphes, $E(\overline{X}_i)$ et $E(\overline{Y}_j)$ étant des enveloppes injectives de $\overline{X}_i = \bigcap_{\lambda \neq i} X_\lambda$ et de $\overline{Y}_j = \bigcap_{\mu \neq j} Y_\mu$.

D'autre part, $\overline{X}_i \cap X_i = 0$ entraîne que $\overline{X}_i \approx (X_i \oplus \overline{X}_i)|X_i$ (sous-module non nul

du module co-irréductible $M|X_i$; ce qui signifie que les enveloppes injectives de \overline{X}_i et de $M|X_i$ sont isomorphes.

Remarque 1. - Lorsque les \cap -décompositions irréductibles réduites de 0 ,

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i, \quad 0 = \bigcap_{j \in J} Y_j,$$

définissent des familles indépendantes non maximales de co-irréductibles

$$\left(\bigcap_{\lambda \neq i} X_\lambda \right)_{i \in I}, \quad \left(\bigcap_{\mu \neq j} Y_\mu \right)_{j \in J},$$

le problème de l'égalité des cardinaux de I et de J se pose.

Observons à ce sujet que, dans son fascicule d'algèbre linéaire (cf. [2]), N. BOURBAKI propose, au § (e) de l'exercice 23, p. 271, et sans condition explicite de finitude, d'établir l'égalité de ces cardinaux en utilisant l'exercice 21 (d) ; ce dernier exercice suppose (explicitement) que les familles d'injectifs indécomposables considérés sont finies. D'ailleurs, la preuve de l'exercice 21 (d) utilise à son tour l'exercice 16 (b) qui donne l'intéressante caractérisation suivante :

"Une famille de sous-modules \cap -irréductibles, $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$, d'un module F , est une décomposition irréductible réduite de 0 dans F si, et seulement si, l'homomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\lambda \in L} (F|E_\lambda)$$

est essentiel" ; aucune condition supplémentaire n'apparaît dans le libellé de cet exercice ; or, φ n'est défini que sous l'une des hypothèses suivantes :

(a) φ est restreint au sous-module F_0 de F constitué des éléments x de F pour lesquels il n'existe qu'un nombre fini d'indices λ pour lesquels $x \notin E_\lambda$. Dans ce cas l'assertion annoncée est vraie.

(b) La somme directe $\bigoplus_{\lambda \in L} (F|E_\lambda)$ est remplacée par le produit $\prod_{\lambda \in L} (F|E_\lambda)$; mais alors φ n'est pas essentiel pour toutes les \cap -décompositions réduites de 0 : soit $F = \bigoplus_{\lambda \in L} G_\lambda$, où G_λ est, pour tout λ , un \mathbb{Z} -module isomorphe au p -groupe abélien de type p^∞ (indécomposable et divisible) ; posons

$$E_\lambda = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} G_\mu.$$

$(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une \cap -décomposition irréductible réduite de 0 ,

$$F \xrightarrow{\varphi} \prod_{\lambda \in L} (F|E_\lambda) \approx \prod_{\lambda \in L} G_\lambda$$

est le plongement canonique de F dans $\prod_{\lambda \in L} G_\lambda$, et le \mathbb{Z} -module injectif $\prod_{\lambda \in L} G_\lambda$ n'est pas extension essentielle du \mathbb{Z} -module injectif F , lorsque le cardinal de L est infini.

Remarque 2. - Nous n'avons pas abordé, dans ce travail, l'étude particulière des anneaux riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles ; signalons à ce sujet, que G. RENAULT a établi tout récemment le résultat : dans un anneau réduit A et riche en idéaux à gauche co-irréductibles, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ implique $xy = yx = 0$ (cf. [14]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AZUMAYA (G.). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.
- [2] BOURBAKI (N.). - Algèbre linéaire, Chap. 2, 3e éd. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).
- [3] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injective Moduln, Arch. der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.
- [4] FORT (J.). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les (\mathcal{C}) -algèbres, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 1, 1964, IV + 167 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [5] FORT (J.). - Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, p. 1239-1242.
- [6] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings under ascending chain conditions, Proc. London math. Soc., 3e série, t. 8, 1958, p. 589-608.
- [7] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., 3e série, t. 10, 1960, p. 201-220.
- [8] JACOBSON (N.). - Structure of rings, 2e éd. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 37).
- [9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémor. Sc. math., 154, 117 p.).
- [10] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407.
- [11] MATLIS (E.). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
- [12] RENAULT (G.). - Sous-modules compléments dans un A -module M , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 3222-3225.
- [13] RENAULT (G.). - Etude des sous-modules compléments dans un A -module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 16, 12 p.
- [14] RENAULT (G.). - Anneaux réduits non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 1, 9 p.