

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-CLAUDE PETIT

Caractérisation algébrique des plans affines munis d'une mesure des triangles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 22,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION ALGÈBRIQUE DES PLANS AFFINES MUNIS D'UNE MESURE DES TRIANGLES

par Jean-Claude PETIT

1. Introduction.

On rappelle que, pour tout triple de points non alignés O, U, V d'un plan affine, on sait construire un corps ternaire K , c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition ternaire $T: K^3 \longrightarrow K$, vérifiant certaines propriétés (voir par exemple [5], p. 31). Réciproquement, la donnée d'un corps ternaire K permet de construire un plan affine dans lequel les points sont les éléments de $K \times K$, et les droites sont les sous-ensembles de points de l'un des deux types suivants :

droite d'équation $x = x_0$, $D = \{(x, y) ; y \in K, x = x_0 \in K\}$,

droite d'équation $y = T(a, x, b)$, $D = \{(x, y) ; x \in K, y = T(a, x, b)\}$,

où a est la pente de la droite et b l'ordonnée à l'origine.

On utilisera les deux lois binaires usuellement définies sur K :

(a) la multiplication définie par : $ab = T(a, b, o)$, pour laquelle $K^* = K - \{o\}$ a une structure de boucle d'élément neutre 1 ,

(b) l'addition définie par : $a + b = T(1, a, b)$, pour laquelle K a une structure de boucle d'élément neutre o . On notera $-b$ l'élément b' déterminé par $b + b' = o$ (opposé à droite de b), et on écrira $a - b$ pour $a + (-b)$.

On rappelle aussi que l'identité $T(a, x, b) = ax + b$ n'est valable que dans certains plans, et qu'en général deux corps ternaires associés à deux repères distincts ne sont pas isomorphes.

L. LESLIEUR a appliqué sa théorie de la mesure des simplexes au cas des triangles d'un plan affine ([2] et [3]) avec les définitions suivantes :

Triangle : triple ordonné de points non alignés.

Mesure des triangles à valeurs dans G : G étant un groupe dont e est l'élément neutre, et dont le centre possède un élément ε avec $\varepsilon^2 = e$, c'est une application $\mathcal{M}$ de l'ensemble des couples ordonnés de triangles dans G :

$$\mathcal{M}[(ABC), (A'B'C')] = \frac{(ABC)}{(A'B'C')} \in G,$$

vérifiant :

$$(M_1) \quad \frac{(ABC)}{(ABC)} = e ,$$

$$(M_2) \quad \frac{(ABC)}{(A'B'C')} \frac{(A'B'C')}{(A''B''C'')} = \frac{(ABC)}{(A''B''C'')} ,$$

(M₃) Si l'on échange deux sommets quelconques d'un des triangles (ABC) ou (A'B'C'), $\frac{(ABC)}{(A'B'C')}$ devient $\varepsilon \frac{(ABC)}{(A'B'C')}$.

- Axiome de parallélisme :

$$(P) \quad BC // OA \text{ implique } \frac{(OAC)}{(OAB)} = e .$$

- Axiome de linéarité :

$$(L) \quad R \in PQ \text{ implique } \frac{(PQA)}{(PQB)} = \frac{(PRA)}{(PRB)} .$$

Dans le cas des plans de Moufang, où le corps ternaire K a les propriétés :

$$T(a, x, b) = ax + b ,$$

K est un groupe abélien pour l'addition,

$$K^* \text{ possède l'associativité restreinte } a^{-1}(ab) = (ba)a^{-1} = b ,$$

L. LESIEUR a prouvé (cf. [3]) :

"Il existe une bijection entre l'ensemble des mesures $\mathbb{M}$ à valeurs dans G vérifiant (L) et (P), et l'ensemble des homomorphismes de la boucle multiplicative d'un corps ternaire du plan dans le groupe G ."

Dans le cas où $G = \{e, \varepsilon\}$, la théorie de la mesure des triangles devient la théorie de l'orientation du plan, et E. GLOCK a donné des conditions nécessaires et suffisantes concernant un homomorphisme de K^* sur G pour que le plan (cf. [1]) coordonné par K soit orientable, sans hypothèses supplémentaires sur le plan.

Nous nous proposons de faire une synthèse de ces deux résultats en caractérisant les plans munis d'une mesure $\mathbb{M}$ vérifiant (L) et (P) sans rien supposer de particulier concernant K ou G , excepté la commutativité de G , condition nécessaire d'après [3].

Les méthodes, utilisées dans les deux cas particuliers cités, utilisent les particularités de K ou de G et ne se transposent pas pour le cas général. Pour traiter ce problème, nous avons été amenés à définir et à étudier une mesure des vecteurs à supports parallèles. Indiquons certains des résultats obtenus en renvoyant à [4] pour les démonstrations.

2. Mesure des vecteurs à supports parallèles.

- Vecteur non nul : couple ordonné de points distincts. La droite passant par ces deux points est le support du vecteur.

- Mesure de vecteurs à supports parallèles : c'est une application $\mathcal{M}^*$ de l'ensemble des couples ordonnés de vecteurs non nuls : (AB) , (CD) , avec $AB \parallel CD$, dans G :

$$\mathcal{M}^*[(AB) , (CD)] = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \in G ,$$

qui vérifie :

$$(M_1^*) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = e , \text{ pour tout vecteur } (AB) \text{ non nul.}$$

$$(M_2^*) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} , \text{ pour tout choix de vecteurs non nuls parallèles.}$$

$$(M_3^*) \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \varepsilon \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} , \text{ pour tout couple de vecteurs non nuls parallèles,}$$

e désignant encore l'élément neutre de G et ε étant un élément du centre de G vérifiant $\varepsilon^2 = e$.

On démontre les résultats suivants :

THÉOREME 1. - Etant donnée une géométrie plane affine, munie d'une mesure des triangles $\mathcal{M}$ à valeurs dans G , vérifiant (L) et (P), il existe dans cette géométrie une mesure $\mathcal{M}^*$ des vecteurs à supports parallèles dans G , qui vérifie :

$$(M_0^*) \quad \forall X \notin AB , \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{(XAB)}{(XAC)} .$$

$$(M_4^*) \quad AA' \parallel BB' , \quad AB \neq A'B' \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = e .$$

$\mathcal{M}^*$ est unique et définie par : $X \notin AB$,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{(XAB)}{(XCD)} \quad \text{si on a } AB = CD ,$$

et par :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{(ACB)}{(ACD)} \quad \text{pour } AB \neq CD .$$

THEOREME 2. - Pour $CC_1 // C'C'_1$, avec $C_1 \in AB$, $C'_1 \in AB$, on a :

$$\frac{(ABC)}{(ABC')} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C'C'_1}} .$$

THEOREME 3. - Si (ABC) et $(A'B'C')$ sont deux triangles tels qu'on ait
 $AB // A'B'$, $BC // B'C'$, $CA // C'A'$, on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} .$$

THEOREME 4. - Soient A, B, C, D quatre points alignés tels que A et B soient distincts ainsi que C et D ; soient A', B', C', D' quatre points alignés sur une droite distincte de AB , avec $AA' // BB' // CC' // DD'$, l'une de ces quatre droites pouvant ne pas être définie, on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} .$$

On peut établir d'autres résultats généralisant des propriétés usuelles de la mesure algébrique des vecteurs du plan coordonné par R (par exemple, les théorèmes de Ménélaüs et de Céva sont encore valables, ε remplaçant -1).

3. Utilisation de la mesure des vecteurs pour la recherche de conditions nécessaires.

On définit une application f de K^* dans G en posant $\forall x \in K^*$,

$$f(x) = \frac{\overline{O\langle x \rangle}}{\overline{O\langle 1 \rangle}} ,$$

où $\langle x \rangle$ désigne le point de coordonnées $(0, x)$ dans K . Il est aisé de vérifier que f est l'homomorphisme de K^* sur G utilisé dans [3] (on peut toujours supposer f surjective en prenant $f(K^*)$ au lieu de G). Le corps ternaire K utilisé ici est l'un quelconque des corps ternaires pouvant coordonner le plan muni de $\mathbb{M}^*$.

Prouvons d'abord la propriété suivante :

$$(F_1) \quad \frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{\langle a' \rangle \langle b' \rangle}} = f(b - a) f(b' - a')^{-1} .$$

$$f[(a + x) - (b + x)] = f[(x + a) - (x + b)] = f(a - b) .$$

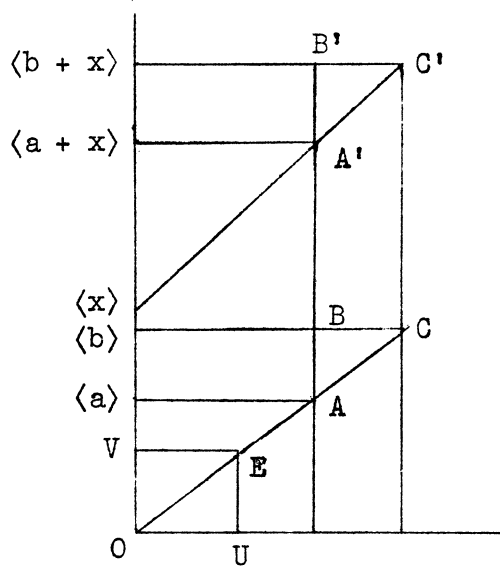


fig. 1

En appliquant (M_4^*) et le théorème 3, on obtient (fig. 1) :

$$\frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{\langle a + x \rangle \langle b + x \rangle}} = e .$$

D'où, en faisant le produit, il vient :

$$\frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{\langle a + x \rangle \langle b + x \rangle}} = e^3 = e .$$

Si on applique ce résultat avec $b = -a$, on trouve :

$$\frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{\langle 0 \rangle \langle b - a \rangle}} = e ,$$

soit encore :

$$\frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{0 \langle b - a \rangle}}{\overline{OV}} = f(b - a) ,$$

d'où résulte la première partie de (F_1). Pour terminer la démonstration, on applique ce résultat à

$$\frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{\langle a + x \rangle \langle b + x \rangle}} = e = \frac{\overline{\langle a \rangle \langle b \rangle}}{\overline{\langle x + a \rangle \langle x + b \rangle}} ,$$

cette dernière égalité provenant d'une simple application de (M_4^*).

(F_1) permet d'exprimer $\mathcal{M}$ à l'aide de f . Il suffit pour cela de savoir calculer $\frac{(ABP)}{(ABQ)}$, car toute valeur $\frac{(ABC)}{(A'B'C')}$ est le produit d'un nombre fini de telles expressions.

Si AB rencontre OV ($V = \langle 1 \rangle$), la parallèle à OV menée par Q rencontre AB en Q' , et celle menée par P rencontre AB en P' . D'après le théorème 2, on obtient :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{P'P}}{\overline{Q'Q}} = \frac{\overline{\langle y_{P'} \rangle \langle y_P \rangle}}{\overline{\langle y_{Q'} \rangle \langle y_Q \rangle}} \quad (\text{fig. 2}).$$

Si AB est parallèle à OV (fig. 3), on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{IP'}}{\overline{IQ'}} \quad \text{grâce à (L) et (P).}$$

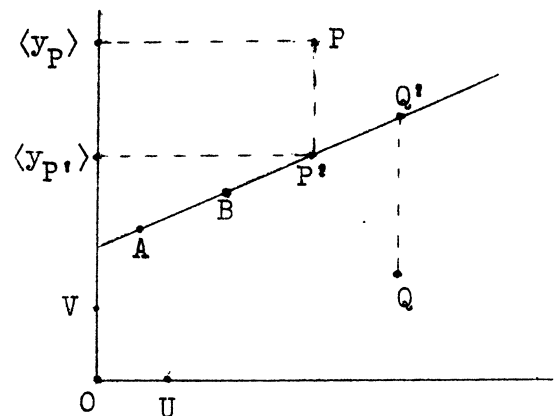


fig. 2

D'après le théorème 4, on a aussi :

$$\frac{\overline{IP'}}{\overline{IQ'}} = \frac{\overline{\langle c \rangle \langle p \rangle}}{\overline{\langle c \rangle \langle q \rangle}} ,$$

où p et q sont les abscisses de P et Q , et où $x = c$ est l'équation de AB . Il vient donc :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{\overline{\langle c \rangle \langle p \rangle}}{\overline{\langle c \rangle \langle q \rangle}} .$$

En appliquant (F_1) au calcul de ces expressions, on obtient :

THEOREME 5.

Si AB a pour équation : $y = T(u, x, v)$, on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f[y_P - T(u, x_P, v)] f[y_Q - T(u, x_Q, v)]^{-1} .$$

Si AB a pour équation : $x = c$, on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f(x_P - c) f(x_Q - c)^{-1} .$$

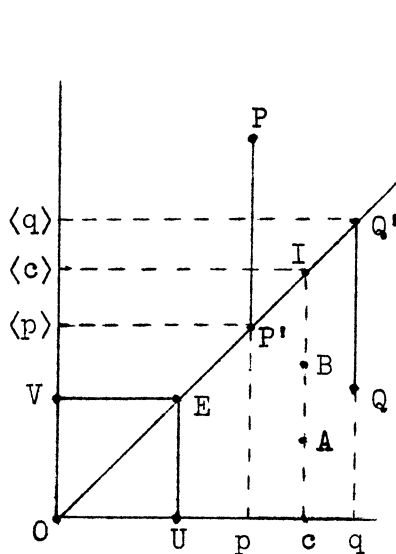


fig. 3

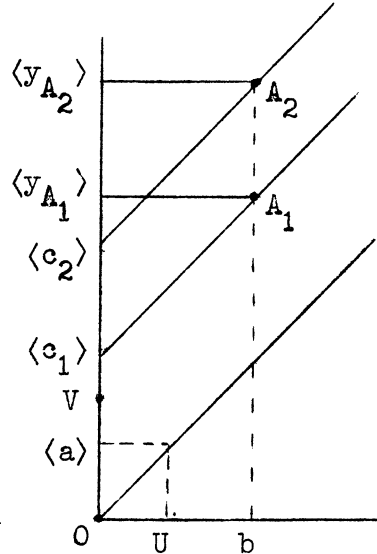


fig. 4

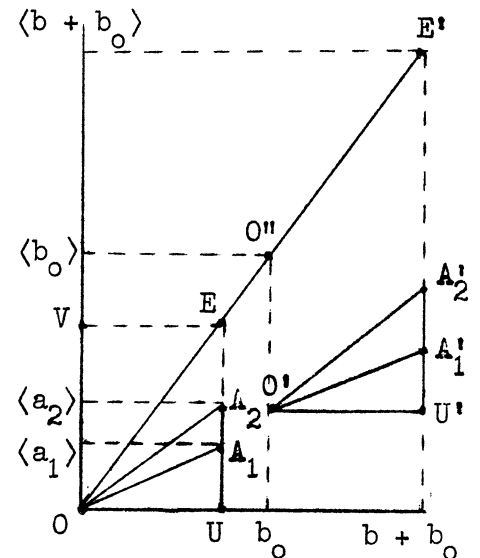


fig. 5

On déduit de (F_1) avec $a = b' = 1$, $a' = b = 0$, la propriété :

$$(F_2) \quad f(-1) = \varepsilon .$$

Soient $y_{A_1} = T(a, b, c_1)$ et $y_{A_2} = T(a, b, c_2)$ avec $c_1 \neq c_2$,

$$A_1 = (b, y_{A_1}), \quad A_2 = (b, y_{A_2}) \quad (\text{voir fig. 4}) .$$

Avec (M_4^*) , on obtient :

$$\frac{\overline{\langle y_{A_1} \rangle \langle y_{A_2} \rangle}}{\overline{A_1 A_2}} \frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{\langle c_1 \rangle \langle c_2 \rangle}} = e^2 = \frac{\overline{\langle y_{A_1} \rangle \langle y_{A_2} \rangle}}{\overline{\langle c_1 \rangle \langle c_2 \rangle}} .$$

Par application de (F_1) , il vient :

$$(F_3) \quad f[T(a, b, c_1) - T(a, b, c_2)] = f(c_1 - c_2) \text{ pour } c_1 \neq c_2 .$$

Considérons maintenant deux droites d'équation respective :

$$y = T(a_1, x, c_1) \quad \text{et} \quad y = T(a_2, x, c_2) ,$$

qui se coupent au point O' d'abscisse b_0 , c'est-à-dire qu'on a :

$$T(a_1, b_0, c_1) = T(a_2, b_0, c_2) \quad (\text{cf. fig. 5}) .$$

On suppose en outre : $a_1 \neq a_2$.

Soient respectivement U' , A'_1 , A'_2 , les intersections de la droite d'équation $x = b + b_0$, ($b \neq 0$), avec les droites issues de O' de pentes 0 , a_1 , a_2 . Soient respectivement U , A_1 , A_2 les points de coordonnées $(1, 0)$, $(1, a_1)$, $(1, a_2)$. Les triangles $(O'U'A'_1)$ et $(O'A'_1A'_2)$ ont leurs trois côtés respectivement parallèles aux trois côtés de (OUA_1) et (OA_1A_2) . Nous pouvons appliquer le théorème 3 deux fois pour obtenir :

$$\frac{\overline{A'_1 A'_2}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\overline{O'A'_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{O'U'}}{\overline{OU}} .$$

Or en appliquant deux fois le théorème 4, nous obtenons :

$$\frac{\overline{O'U'}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{O''E'}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{\langle b_0 \rangle \langle b + b_0 \rangle}}{\overline{OV}} ,$$

d'où

$$\frac{\overline{\langle T(a_1, b + b_0, c_1) \rangle \langle T(a_2, b + b_0, c_2) \rangle}}{\overline{\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle}} = \frac{\overline{\langle b_0 \rangle \langle b + b_0 \rangle}}{\overline{OV}} .$$

Utilisons maintenant (F_1) , il vient :

$$f[T(a_2, b + b_0, c_2) - T(a_1, b + b_0, c_2)] f(a_2 - a_1)^{-1} = f[(b + b_0) - b_0] = f(b) .$$

D'où :

(F₄) De $T(a_1, b_0, c_1) = T(a_2, b_0, c_2)$, avec $a_1 \neq a_2$ et $b \neq 0$, il résulte :

$$f[T(a_2, b + b_0, c_2) - T(a_1, b + b_0, c_1)] = f(a_1 - a_2) f(b) .$$

4. Suffisance des propriétés (F₃) et (F₄).

Soit K un corps ternaire coordonnant une géométrie plane ; soit f un homomorphisme de la boucle multiplicative K* sur un groupe commutatif G, tel que f ait les propriétés (F₃) et (F₄). D'après [3], la détermination de la mesure $\mathfrak{M}$ équivaut à la définition de :

$$\mathfrak{M}[(ABP), (ABQ)] = \frac{(ABP)}{(ABQ)} ,$$

avec les propriétés (O_i) suivantes :

$$(O_1) \quad \frac{(ABC)}{(ABC)} = e ,$$

$$(O_2) \quad \frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{(ABP)}{(ABP)} \frac{(ABR)}{(ABQ)} ,$$

$$(O_3) \quad \frac{(OAC)}{(OAB)} \frac{(OBA)}{(OBC)} \frac{(OCB)}{(OCA)} = \varepsilon ,$$

$$(O_4) \quad \frac{(OAB)}{(OAC)} = \frac{(AOB)}{(AOC)} .$$

D'après le théorème 5, posons par définition :

Si AB a pour équation $y = T(u, x, v)$:

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f[y_P - T(u, x_P, v)] f[y_Q - T(u, x_Q, v)]^{-1} .$$

Si AB a pour équation $x = c$:

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = f(x_P - c) f(x_Q - c)^{-1} .$$

Seule la propriété (O₃) ne résulte pas immédiatement de la définition. Démontrons tout d'abord :

$$(F_5) \quad \forall a \in K, \quad \forall b \in K, \quad a \neq b, \quad f(b - a) = f(-1) f(a - b) .$$

On définit pour cela $c \neq 0$ par $a = c + b$, et on remarque :

$$T(0, b, b - a) = b - a = T(1, b, -a) ,$$

ce qui permet d'obtenir avec (F₄) :

$$f(b - a) = f[T(0, a, b - a) - T(1, a, -a)] = f(0 - 1) f(c) = f(-1) f(c) ;$$

de même, on a :

$$T(o, b, o) = o = T(1, b, -b),$$

qui donne avec (F_4) :

$$f(c) = f(1c) = f(1 - o) f(c) = f[T(1, a, -b) - T(o, a, o)] = f(a - b).$$

Il en résulte (F_5) de façon évidente. De plus, f étant un homomorphisme, on a $f(1) = e$. On obtient alors, avec $a = o$ et $b = 1$:

$$(F_6) \quad f(-1)^2 = e.$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$z = \frac{(OAC)}{(OAB)} \frac{(OBA)}{(OBC)} \frac{(OCB)}{(OCA)}.$$

Premier cas. - Aucune des droites OA , OB , OC n'est parallèle à OV .

Soient :

$$y = T(a, x, a') \quad \text{l'équation de } OA,$$

$$y = T(b, x, b') \quad \text{celle de } OB,$$

$$y = T(c, x, c') \quad \text{celle de } OC.$$

Désignons par x_0 , x_A , x_B , x_C les abscisses respectives de O , A , B , C .
On a donc :

$$y_A = T(a, x_A, a'), \quad y_B = T(b, x_B, b'), \quad y_C = T(c, x_C, c'),$$

et aussi

$$y_0 = T(a, x_0, a') = T(b, x_0, b') = T(c, x_0, c').$$

En appliquant la définition choisie, et en adoptant dans G l'écriture :
 $rs^{-1} = s^{-1}r = \frac{r}{s}$ (possible, car G est commutatif), on obtient :

$$z = \frac{f[y_C - T(a, x_C, a')] f[y_A - T(b, x_A, b')] f[y_B - T(c, x_B, c')]}{f[y_B - T(a, x_B, b')] f[y_C - T(b, x_C, b')] f[y_A - T(c, x_A, c')]}.$$

En appliquant (F_4) , on trouve par exemple :

$$f[y_C - T(a, x_C, a')] = f[T(c, x_C, c') - T(a, x_C, a')] = f(c - a) f(c''),$$

où c'' est défini par $c'' + x_0 = x_C$ et est, par conséquent, différent de o , puisque OC n'est pas parallèle à OV . On a bien $c \neq a$, puisque (OAC) est un triangle, et de plus $T(c, x_0, c') = T(a, x_0, a')$ figure dans les hypothèses. Il vient alors :

$$z = \frac{f(c-a) f(a-b) f(b-c) f(c'') f(a'') f(b'')}{f(b-a) f(c-b) f(a-c) f(b'') f(c'') f(a'')} ,$$

soit avec (F_5) et (F_6) : $z = f(-1)$.

Deuxième cas. - Une des droites OA , OB , OC est parallèle à OV .

Remarquons qu'alors une seule d'entre elles l'est, sinon l'un des triangles (OAB) , (OBC) , (OCA) n'existerait pas. On peut toujours supposer que c'est OA qui est parallèle à OV . Avec les notations précédentes, il en résulte $c'' \neq 0$, $b'' \neq 0$. Un calcul analogue au précédent donne :

$$z = \frac{f(x_C - x_0) f[y_A - T(b, x_A, b')] f[y_B - T(c, x_B, c')]}{f(x_B - x_0) f[y_C - T(b, x_C, b')] f[y_A - T(c, x_A, c')]} \\ = \frac{f[(c'' + x_0) - x_0] f[(b - c)b'']}{f[(b'' + x_0) - x_0] f[(c - b)c'']} ,$$

car on a $y_A - T(b, x_A, b') = y_A - y_0 = y_A - T(c, x_A, c')$.

Appliquons (F_4) au calcul de $f[(c'' + x_0) - x_0]$. Prenons pour cela :

$$T(a_2, b_0, c_2) = T(1, 0, x_0) = x_0 = T(0, 0, x_0) = T(a_1, b_0, c_1) ,$$

on a bien $a_2 \neq a_1$, on prend de plus $b = c'' \neq 0$ (en effet, OC n'est pas parallèle à OV) . Il vient :

$$f[T(1, c'', x_0) - T(0, c'', x_0)] = f(1 - 0) f(c'') ,$$

donc $f[(c'' + x_0) - x_0] = f(c'')$.

On procède de même avec b'' qui n'est pas nul non plus pour une raison analogue. Grâce à (F_5) , on trouve alors $z = f(-1)$. Donc, dans tous les cas, on a :

$$\frac{(OAC)}{(OAB)} \frac{(OBA)}{(OBC)} \frac{(OCB)}{(OCA)} = f(-1) \quad \text{avec} \quad f(-1)^2 = e .$$

(O_3) est donc vérifié avec la valeur $\epsilon = f(-1)$.

On a obtenu ainsi une mesure $\mathfrak{M}$. Satisfait-elle à (L) et (P) ?

La validité de (L) est évidente puisque la définition de $\mathfrak{M}[(ABP), (ABQ)]$ ne dépend que de la droite AB et non des points A et B . Il est aisé de vérifier la validité de (P) (cf. [1], p. 358).

Si AB a pour équation $y = T(u, x, v)$, et si P et Q sont deux points de la droite d'équation $y = T(u, x, v')$, $v' \neq v$, d'abscisses respectives p et q , on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{f[T(u, p, v') - T(u, p, v)]}{f[T(u, q, v') - T(u, q, v)]} = \frac{f(v' - v)}{f(v' - v)} = e \quad \text{d'après } (F_3) .$$

Si AB a pour équation $x = c$, et si P et Q sont deux points de la droite d'équation $x = p \neq c$, on a :

$$\frac{(ABP)}{(ABQ)} = \frac{f(p - c)}{f(p - c)} = e .$$

Remarquons que (F_3) et (F_4) permettent d'obtenir $\mathbb{M}$ vérifiant (L) et (P), mais que (F_4) seul permet d'obtenir $\mathbb{M}$ vérifiant (L).

D'où le résultat fondamental, qui donne la caractérisation algébrique cherchée.

THÉORÈME 6.

M désignant l'ensemble des mesures des triangles du plan vérifiant (L) et (P), et à valeurs sur G ,

F désignant l'ensemble des homomorphismes de la boucle K^* (d'un corps ternaire quelconque K coordonnant le plan) sur le groupe commutatif G , vérifiant (F_3) et (F_4) ,

l'application $p : M \longrightarrow F$, définie par $f = p(\mathbb{M})$ avec $\forall x \in K^*$,

$$f(x) = \mathbb{M}[(OU\langle x \rangle), (OUV)] ,$$

où O, U, V sont les points de coordonnées (o, o) , $(1, o)$ et $(o, 1)$ dans K , est une bijection.

L'application $p^{-1} : F \longrightarrow M$ est définie par $p^{-1}(f)[(ABP), (ABQ)]$, qui vaut

$$f[y_P - T(u, x_P, v)] f[y_Q - T(u, x_Q, v)]^{-1} ,$$

si l'équation de AB est $y = T(u, x, v)$,

$$f(x_P - c) f(x_Q - c)^{-1} ,$$

si l'équation de AB est $x = c$.

L'élément $\varepsilon \in G$, associé à la mesure $p^{-1}(f)$, vaut $f(\rightarrow 1)$.

En effet, l'existence des deux applications de M dans F et de F dans M est établie dans la démonstration précédente, et on vérifie à l'aide des formules du théorème 5 qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

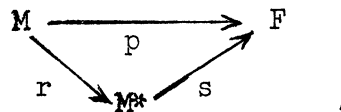
En fait, nous avons utilisé comme intermédiaire une mesure des vecteurs $\mathbb{M}^*$, et si on désigne par $\mathbb{M}^*_i$ l'ensemble de ces mesures vérifiant $(\mathbb{M}^*_i)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$, avec la propriété suivante :

$$(M_5) \quad OA \neq OB, \quad B' \in OB, \quad B' \neq O, \quad A' \in OA, \quad A' \neq O, \quad AB // A'B' \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} ,$$

le théorème 1 permet de définir une application $r : M \longrightarrow M^*$. On démontre (cf. [4]), en définissant une application $s : M^* \longrightarrow M$ par $s(\mathbb{M}^*) = f$, avec $\forall x \in K^*$,

$$f(x) = \mathbb{M}^*(O\langle x \rangle, OV) :$$

THÉOREME 7. - Chacune des applications p, r, s est une bijection, et on a $p = s \circ r$:



5. Exemples de plans munis de $\mathbb{M}$ et de $\mathbb{M}^*$.

Pour un plan arguésien, qui est un cas particulier de plan de Moufang, K est un corps, et on trouve dans [3] le résultat suivant :

Pour tout plan coordonné par un corps, il existe une mesure des triangles vérifiant (L) et (P), et prenant ses valeurs dans le groupe quotient K^*/G , où G est le sous-groupe commutateur de K^* .

On retrouve évidemment ainsi avec $K = \mathbb{R}$ les mesures usuelles des triangles et des vecteurs du plan. Remarquons cependant qu'en prenant pour groupe G le sous-groupe multiplicatif des réels positifs et $\varepsilon = 1$, on trouve la mesure des segments à supports parallèles.

Pour des exemples plus généraux, citons les résultats que nous avons obtenus dans [4]. Rappelons qu'un corps ternaire K est un groupe cartésien (cf. [5], p. 90) lorsqu'on a : $T(a, x, b) = ax + b$, et que l'addition est une loi de groupe. Il est dit commutatif lorsque ce groupe l'est.

THÉOREME 8. - On peut plonger tout groupe cartésien commutatif K dans un groupe cartésien commutatif S_K , tel que le plan coordonné par S_K soit muni d'une mesure des triangles à valeurs sur $\mathbb{Z}$, groupe additif des entiers, vérifiant (L) et (P).

Pour des choix convenables de K , on obtient avec les S_K :

THÉOREME 9. - Il existe des quasi-corps distributifs, des quasi-corps avec une seule distributivité à droite ou à gauche, des groupes cartésiens commutatifs sans

aucune distributivité coordonnant des plans munis d'une mesure des triangles à valeurs sur Z , vérifiant (L) et (P).

THÉOREME 10. - Il existe, pour tout corps commutatif ayant plus de deux éléments, un plan coordonné par un quasi-corps distributif non associatif muni d'une mesure des triangles à valeur sur K^* et vérifiant (L) et (P).

Pour conclure, indiquons les formes simplifiées que prennent (F_3) et (F_4) dans les cas particuliers suivants :

Si K est un groupe cartésien commutatif, (F_3) est vérifié et (F_4) s'écrit :

$$f[a_1(b + b_a) + c_1 - c_2 - a_2(b + b_a)] = f(a_1 - a_2) f(b) \quad .$$

Si K est un quasi-corps à droite, (F_4) s'écrit :

$$f(a_1 b - a_2 b) = f(a_1 - a_2) f(b) \quad .$$

Si K est un quasi-corps distributif, (F_3) et (F_4) sont vérifiées pour tout f .

Ce dernier cas contient celui des quasi-corps alternatifs traité dans [3], et comme (F_3) et (F_4) sont les conditions données dans [1] (p. 357), notre théorème 6 donne bien la synthèse évoquée dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GLOCK (E.). - Die Orientierungsfunktionen eines affinen Raumes, Math. Z., t. 78, 1962, p. 319-360.
- [2] LESIEUR (L.). - Théorie algébrique de l'orientation et de la mesure des simplexes, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 37, 1958, p. 245-264.
- [3] LESIEUR (L.). - Sur la mesure des triangles en géométrie affine plane, Math. Z., t. 93, 1966, p. 334-344.
- [4] PETIT (J.-C.). - Mesure des triangles et mesure des vecteurs à supports parallèles dans une géométrie plane affine, Math. Z., t. 94, 1966, p. 271-306.
- [5] PICKERT (G.). - Projektive Ebenen. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, 80).