

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

KLAUS KEIMEL

Demi-groupes compacts solénoïdaux et cylindriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 19, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMI-GROUPES COMPACTS SOLÉNOÏDAUX ET CYLINDRIQUES

par Klaus KEIMEL

(d'après HOFMANN-MOSTERT [1])

Dans cet exposé, il ne s'agira pas de la théorie générale des demi-groupes compacts ; nous nous proposons de fournir des exemples et classes d'exemples qui sont caractéristiques des demi-groupes compacts. A une exception près, on trouvera ces exemples dans le livre de K. H. HOFMANN et P. S. MOSTERT "Elements of compact semi-groups" qui paraîtra cet été.

1. Preliminaires.

Un demi-groupe topologique est un ensemble S muni d'une structure d'espace topologique séparé et d'une loi de composition associative

$$(x, y) \mapsto xy : S \times S \longrightarrow S$$

de sorte que cette application est continue. Un morphisme de demi-groupes topologiques est un homomorphisme de demi-groupes qui est continu.

A partir de maintenant, notons S un demi-groupe compact possédant un élément unité 1 . On peut définir un pré-ordre sur S par

$$a \leq b \text{ si et seulement si } a \in bS \cap Sb.$$

La relation $\leq$ est en effet un pré-ordre, dont le graphe est fermé dans $S \times S$. La relation d'équivalence associée à cet ordre est la relation $\mathcal{H}$ de Green, définie par

$$a \mathcal{H} b \text{ si et seulement si } a \leq b \text{ et } b \leq a.$$

La relation $\mathcal{H}$ est fermée ; donc $S/\mathcal{H}$ est un espace compact ordonné, le graphe de l'ordre étant fermé. Cela entraîne que chaque élément de $S/\mathcal{H}$ est compris entre un élément maximal et un élément minimal de $S/\mathcal{H}$. Evidemment la classe $H(1)$ de 1 mod $\mathcal{H}$ est la plus grande classe de S mod $\mathcal{H}$. Si e est un élément idempotent de S , alors la classe $H(e)$ de e modulo $\mathcal{H}$ est le groupe maximal dans S contenant e . Il est bien connu que chaque demi-groupe compact admet un idéal minimum M , qui est fermé et qui est réunion des groupes compacts. Ces groupes de l'idéal M sont les classes minimales de S mod $\mathcal{H}$. Ainsi le pré-ordre $\leq$ nous sert à nous donner une image intuitive d'un demi-groupe compact.

Dans un demi-groupe abélien S , l'idéal minimum M est un groupe ; la relation $\mathcal{K}$ est compatible avec la multiplication ; alors $S/\mathcal{K}$ est un demi-groupe compact abélien ordonné.

EXEMPLE 1.1. - Nous noterons par $\underline{\mathbb{H}}$ le demi-groupe additif des nombres réels non négatifs. Nous compactifions $\underline{\mathbb{H}}$ par un élément ∞ , et étendons l'addition de $\underline{\mathbb{H}}$ à $\underline{\mathbb{H}}^* = \underline{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$ par

$$\infty + x = \infty = x + \infty \text{ pour tout } x \in \underline{\mathbb{H}}.$$

Pour tout $r \in \underline{\mathbb{H}}^*$, l'intervalle (r, ∞) est un idéal de $\underline{\mathbb{H}}^*$. Alors

$$\underline{\mathbb{H}}_r^* = \underline{\mathbb{H}}^* / (r, \infty),$$

obtenu à partir de $\underline{\mathbb{H}}^*$ en identifiant l'idéal (r, ∞) à un point, est encore un demi-groupe compact ; et toute image de $\underline{\mathbb{H}}^*$ par un morphisme est isomorphe à $\underline{\mathbb{H}}_r^*$ pour un $r \in \underline{\mathbb{H}}^*$.

2. Demi-groupes solénoïdaux.

EXEMPLE 2.1. - Soient $\underline{\mathbb{R}}$ le groupe des nombres réels et $\underline{\mathbb{Z}}$ le groupe des entiers. Considérons $\underline{\mathbb{H}}^* \times \underline{\mathbb{T}}$, $\underline{\mathbb{T}} = \underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}}$. C'est un demi-groupe compact avec un élément unité. Les classes mod $\mathcal{K}$ sont les cercles $\{r\} \times \underline{\mathbb{T}}$, et on a

$$(\underline{\mathbb{H}}^* \times \underline{\mathbb{T}})/\mathcal{K} \cong \underline{\mathbb{H}}^*.$$

Soit $f : \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{T}}$ l'application canonique. L'ensemble

$$S_f = \{(h, f(h)) ; h \in \underline{\mathbb{H}}\} \cup (\infty \times \underline{\mathbb{T}})$$

est un sous-demi-groupe fermé de $\underline{\mathbb{H}}^* \times \underline{\mathbb{T}}$. Les classes de S_f mod $\mathcal{K}$ ne contiennent qu'un seul point, sauf l'idéal minimal $\infty \times \underline{\mathbb{T}}$. L'application $\sigma_f : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow S_f$, définie par $\sigma_f(h) = (h, f(h))$, est un morphisme dont l'image est partout dense dans S_f .

Cela conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. - Un demi-groupe solénoïdal est un morphisme f de $\underline{\mathbb{H}}$ dans un demi-groupe compact S , dont l'image est partout dense dans S . Si $g : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow T$ est un deuxième demi-groupe solénoïdal, on appelle morphisme de f dans g un morphisme $\varphi : S \rightarrow T$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\underline{H}} & \xrightarrow{f} & S \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \underline{\underline{H}} & \xrightarrow{g} & T
 \end{array}$$

commute.

On a donc bien défini la catégorie des demi-groupes solénoïdaux. C'est évidemment une généralisation de la catégorie des groupes solénoïdaux, qu'on peut définir en remplaçant ci-dessus $\underline{\underline{H}}$ par $\underline{\underline{R}}$, et "demi-groupe compact S " par "groupe compact G ".

La définition entraîne immédiatement le lemme suivant :

LEMME 2.3. - Si $f : \underline{\underline{H}} \rightarrow S$ est un demi-groupe solénoïdal, S est abélien et possède un élément unité $f(0)$. S'il existe un morphisme de demi-groupes solénoïdaux φ de f dans g , alors φ est surjectif et unique.

Le même résultat est valable pour les groupes solénoïdaux. La proposition suivante montre que la catégorie des groupes solénoïdaux est en effet canoniquement plongée dans la catégorie des demi-groupes solénoïdaux.

PROPOSITION 2.4. - Si $f : \underline{\underline{H}} \rightarrow G$ est un demi-groupe solénoïdal et G un groupe, alors f possède une extension $\bar{f} : \underline{\underline{R}} \rightarrow G$ à un groupe solénoïdal. Si réciproquement $f : \underline{\underline{R}} \rightarrow G$ est un groupe solénoïdal, alors $f|_{\underline{\underline{H}}} : \underline{\underline{H}} \rightarrow G$ est un demi-groupe solénoïdal.

Démonstration. - Si $f : \underline{\underline{H}} \rightarrow G$ est un demi-groupe solénoïdal, on définit $\bar{f} : \underline{\underline{R}} \rightarrow G$ par

$$\bar{f}(r) = f(r), \text{ et } \bar{f}(-r) = f(r)^{-1} \text{ pour tout } r \in \underline{\underline{H}}.$$

On vérifie facilement que $\bar{f}$ est un morphisme dont l'image est partout dense dans G . La réciproque est démontrée par le lemme suivant, en prenant $h = 0$.

LEMME 2.5. - Si $f : \underline{\underline{R}} \rightarrow G$ est un groupe solénoïdal, $f((h, \infty))$ est partout dense dans G pour tout $h \in \underline{\underline{H}}$.

Démonstration. - Soit $g \in G$. Le demi-groupe fermé $\Gamma(g) = \{g, g^2, \dots\}^-$ dans G est un demi-groupe compact abélien. Donc son idéal minimal M est un groupe. L'élément neutre de M , étant idempotent, est nécessairement égal à l'élément neutre 1 de G . Alors

$$1.\Gamma(g) \subset M\Gamma(g) \subset M \text{ entraîne } M = \Gamma(g).$$

En particulier, $\Gamma(g)$ est un groupe et contient g^{-1} . Il s'ensuit que chaque

sous-demi-groupe H fermé d'un groupe compact est lui-même un groupe, parce que, pour tout $g \in H$,

$$g^{-1} \in \Gamma(g) \subset H.$$

Appliquons cela au sous-demi-groupe fermé $f([h, \infty))^-$ de G , qui est alors un groupe. Avec $f(s)$ pour $s \geq h$, il contient aussi $f(s)^{-1} = f(-s)$, donc

$$f(\mathbb{R}) \subset f([h, \infty))^- ,$$

ce qui démontre le lemme.

Dans la théorie des groupes compacts, on connaît bien le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. - La catégorie des groupes solénoïdaux possède un objet initial.

Autrement dit, il existe un groupe solénoïdal $\underline{a} : \mathbb{R} \longrightarrow \underline{A}$ tel que, pour tout groupe solénoïdal $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$, il existe un morphisme et un seul $\varphi : \underline{A} \longrightarrow G$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\underline{a}} & \underline{A} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

commute.

On démontre ce théorème en utilisant la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens localement compacts. Le dual d'un groupe solénoïdal $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$ est un monomorphisme $\hat{f}$ du groupe discret $\hat{G}$ dans $\mathbb{R}$. Evidemment, il existe un, et seulement un, homomorphisme $\hat{\varphi}$ de $\hat{G}$ dans $\mathbb{R}_d$, le groupe $\mathbb{R}$ avec la topologie discrète, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{\text{id}} & \mathbb{R}_d \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow \hat{\varphi} \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\hat{f}} & \hat{G} \end{array}$$

commute. Si on traduit cela par dualité dans la catégorie des groupes solénoïdaux, on voit que $\hat{\text{id}} : \mathbb{R} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}_d$ est un objet initial.

On va démontrer le théorème correspondant.

THÉORÈME 2.7. - La catégorie des demi-groupes solénoïdaux possède un objet initial $\sigma : \mathbb{H} \longrightarrow \Sigma$.

On dit aussi : Σ est le demi-groupe solénoïdal universel.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'une généralisation de la cons-

truction de l'exemple 2.1 :

Soit $f : \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow G$ un groupe solénoïdal. Nous considérons dans $\underline{\mathbb{H}}^* \times G$ le sous-ensemble

$$S_f = \{(h, f(h)) ; h \in \underline{\mathbb{H}}\} \cup (\infty \times G) .$$

S_f est un sous-demi-groupe fermé. Soit $\sigma_f : \underline{\mathbb{H}} \longrightarrow S_f$ défini par

$$\sigma_f(h) = (h, f(h)) .$$

Evidemment, σ_f est un isomorphisme de $\underline{\mathbb{H}}$ sur son image.

LEMME 2.8. - $\sigma_f : \underline{\mathbb{H}} \longrightarrow S_f$ est un demi-groupe solénoïdal.

Démonstration. - Il faut démontrer que chaque élément (∞, g) , $g \in G$, peut être approché par des éléments de la forme $(h, f(h))$. C'est le cas si, pour chaque $h \in \underline{\mathbb{H}}$ et chaque voisinage U de g dans G , il existe un $s \geq h$ tel que $f(h) \in U$. Mais cela est démontré par le lemme 2.5.

Soient maintenant $f : \underline{\mathbb{H}} \longrightarrow S$ un demi-groupe solénoïdal, M l'idéal minimal de S qui est un groupe, e l'élément neutre de ce groupe. Alors $g : S \longrightarrow M$, défini par $g(x) = ex$, est un morphisme, et

$$f' = g \circ f : \underline{\mathbb{H}} \longrightarrow M$$

est prolongeable à un groupe solénoïdal.

LEMME 2.9. - Il existe un morphisme $\varphi_1 : S_f \longrightarrow S$ tel que $\varphi_1 \circ \sigma_f = f$.

Démonstration. - On définit l'application $\varphi_1 : S_f \longrightarrow S$ par

$$\varphi_1(h, f'(h)) = f(h) \text{ pour } h \in \underline{\mathbb{H}},$$

$$\varphi_1(\infty, m) = m \text{ pour } m \in M,$$

de façon que $\varphi_1 \circ \sigma_f = f$ soit vrai. φ_1 restreint à chacun de ces deux domaines, est un morphisme. De plus, pour chaque $h \in \underline{\mathbb{H}}$ et $m \in M$,

$$\varphi_1(h, f'(h)) \varphi_1(\infty, m) = f(h)m = f(h)em = f'(h)m = \varphi_1(\infty, f'(h)m),$$

c'est-à-dire que φ_1 est un homomorphisme de demi-groupes. Supposons que

$$(h, f'(h)) = (h, ef(h))$$

tende vers (∞, m) pour un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\underline{\mathbb{H}}^*$. Alors $f(h)$ tend vers $m' \in M$ pour un filtre $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$; donc $ef(h) = f'(h)$ tend vers $em' = m' = m$ pour le filtre $\mathfrak{F}'$. C'est vrai pour tout filtre $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$ tel que $f(h)$ soit convergent par rapport à $\mathfrak{F}'$. Donc

$$f(h) = \varphi_1(h, f'(h)) \text{ tend vers } m = \varphi_1(\infty, m),$$

ce qui démontre la continuité de φ_1 .

LEMME 2.10. - Il existe un morphisme $\varphi_2 : \Sigma \longrightarrow S_f$, tel que $\varphi_2 \circ \sigma = \sigma_f$.

Démonstration. - Le demi-groupe solénoïdal $f' : \underline{H} \longrightarrow M$ est prolongeable à un groupe solénoïdal $\bar{f}' : \underline{R} \longrightarrow M$ d'après 2.4. D'après le théorème 2.6, il existe un morphisme $\psi : \underline{A} \longrightarrow M$ tel que $\psi \circ \underline{a} = \bar{f}'$. Alors

$$\text{id} \times \psi : \underline{H}^* \times \underline{A} \longrightarrow \underline{H}^* \times M$$

est un morphisme. Soit $\varphi_2 = (\text{id} \times \psi)|_{\Sigma}$. L'image de φ_2 est S_f , parce que, pour l'ensemble des $\sigma(h)$ partout dense dans Σ , on a

$$\varphi_2 \circ \sigma(h) = \varphi_2(h, \underline{a}(h)) = (h, \psi \circ \underline{a}(h)) = (h, f'(h)) = \sigma_f(h).$$

Maintenant la démonstration du théorème 2.7 est facile parce que, d'après 2.9 et 2.10, nous avons un morphisme $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 : \Sigma \longrightarrow S$ qui vérifie

$$\varphi \circ \sigma = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \sigma = \varphi_1 \circ \sigma_f = f,$$

et qui est unique d'après 2.3.

Le lemme 2.9 donne en même temps la structure de tous les demi-groupes solénoïdaux : $\varphi_1 : S_f \longrightarrow S$ induit un morphisme

$$\varphi_{\mathcal{K}} : S_f / \mathcal{K} \longrightarrow S / \mathcal{K}.$$

Donc $S / \mathcal{K}$ est isomorphe à $\underline{H}_r^*$ pour un r de $\underline{H}^*$, parce que $S_f / \mathcal{K}$ est isomorphe à $\underline{H}^*$. Il n'est pas difficile de voir que S est isomorphe au sous-demi-groupe

$$\{(h, f'(h)) ; h \in \underline{H}^* \setminus [r, \infty)\} \cup (\infty \times M)$$

de $\underline{H}_r^* \times M$. On en tire que, pour chaque demi-groupe solénoïdal $f : \underline{H} \longrightarrow S$, $S / \mathcal{K}$ est isomorphe à $\underline{H}_r^*$ pour un $r \in \underline{H}^*$.

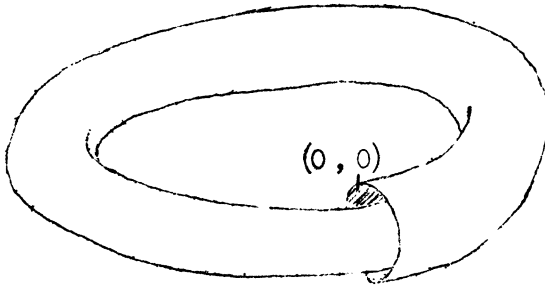
3. Demi-groupes cylindriques.

DÉFINITION 3.1. - On appelle demi-groupe cylindrique chaque demi-groupe compact S qui est image de $\Sigma \times G$ par un morphisme, où G est un groupe compact quelconque, Σ le demi-groupe solénoïdal universel du théorème 2.7.

On remarque que, dans $\Sigma \times G$, la relation $\mathcal{K}$ est compatible avec la multiplication, et $(\Sigma \times G) / \mathcal{K}$ est isomorphe à $\underline{H}^*$. Pour un demi-groupe cylindrique S quelconque, la relation $\mathcal{K}$ est alors compatible avec la multiplication, et $S / \mathcal{K} = \underline{H}_r^*$ pour un $r \in \underline{H}^*$.

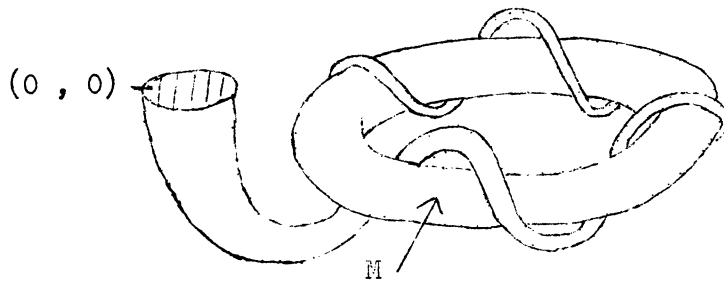
Pour chaque groupe compact G , $S = \underline{\mathbb{H}}^* \times G$ est un demi-groupe cylindrique.

EXEMPLE 3.2. - Soit S_f le demi-groupe de l'exemple 2.1. Soit S le demi-groupe cylindrique $S_f \times \underline{\mathbb{T}}$, où $\underline{\mathbb{T}} = \underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}}$. L'idéal minimal de S est un tore $\underline{\mathbb{T}}^2$. Intuitivement, S est un tuyau isomorphe à $\underline{\mathbb{H}} \times \underline{\mathbb{T}}$ qui s'enroule autour de l'idéal minimal qui est un tore.



EXEMPLE 3.3. - Il est bien connu qu'il existe un demi-groupe solénoïdal

$$f : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow \underline{\mathbb{T}}^2.$$



Dans le demi-groupe cylindrique $P = S_f \times \underline{\mathbb{T}}$, nous appelons ρ la relation d'équivalence dont les classes se réduisent à un point au dehors de l'idéal minimal M , et sont égales à $(\infty, g) \times \underline{\mathbb{T}}$ dans M . La relation ρ est fermée et compatible avec la multiplication. Alors $S = P/\rho$ est un demi-groupe cylindrique, dont l'idéal minimal est isomorphe au tore $\underline{\mathbb{T}}^2$. Ce demi-groupe n'est pas isomorphe au demi-groupe de l'exemple 3.2.

On appelle demi-groupe à un paramètre, un morphisme $f : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow S$.

PROPOSITION 3.4. - Soient S un demi-groupe compact, G un sous-groupe fermé de S , $f : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow S$ un demi-groupe à un paramètre tel que $f(0) \in G$ et $f(\underline{\mathbb{H}}) \subset Z(G)$, le centralisateur de G ; alors il existe un morphisme, et un seul, $\varphi : \Sigma \times G \rightarrow S$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathbb{H}} & \xrightarrow{F} & \Sigma \times G & \xleftarrow{\psi} & G \\ & \searrow f & \downarrow \varphi & \swarrow \text{injection} & \\ & & S & & \end{array}$$

où ψ est défini par $\psi(g) = ((0, 0), g)$ et F par $F(h) = (\sigma(h), 1)$.

Démonstration. - Le morphisme $f : \underline{\mathbb{H}} \rightarrow f(\underline{\mathbb{H}})^-$ est un demi-groupe solénoïdal. D'après le théorème 2.7, il existe un morphisme et un seul $\varphi_1 : \Sigma \rightarrow f(\underline{\mathbb{H}})^- \subset S$ tel que $\varphi_1 \circ \sigma = f$. Soit $\varphi : \Sigma \times G \rightarrow S$ défini par $\varphi(x, g) = \varphi_1(x)g$, alors φ est une application continue. Le centralisateur

$$Z(G) = \{x ; x \in S, gx = xg \text{ pour tout } g \in G\}$$

est fermé et contient par suite, avec $f(\underline{H})$, $f(\underline{H})^- = \varphi_1(\Sigma)$. Donc φ est aussi un homomorphisme de demi-groupes. La commutativité du diagramme en résulte aussitôt.

Si, en particulier, S est abélien et $f: \underline{H} \rightarrow S$ un demi-groupe à un paramètre, alors il y a dans S un demi-groupe cylindrique image de $\Sigma \times H(f(0))$.

On a des théorèmes très forts sur l'existence des demi-groupes à un paramètre dans les demi-groupes compacts connexes, de sorte que les demi-groupes cylindriques sont les morceaux les plus importants d'un demi-groupe compact connexe [cf. HOFMANN-MOSTERT].

4. Demi-groupes C-solénoïdaux.

Si l'on regarde les groupes compacts où une image de $\underline{\mathbb{R}}^n$ est partout dense, on tombe encore sur les groupes solénoïdaux. Mais $\underline{H}^2$ est partout dense dans $\underline{H}^{*2}$, sans que $\underline{H}^{*2}$ soit un demi-groupe solénoïdal. Donc la généralisation d'un demi-groupe solénoïdal à plusieurs dimensions est raisonnable. On peut procéder comme dans le § 2.

DEFINITION 4.1. - Soit C un cône convexe fermé de $\underline{\mathbb{R}}^n$ possédant 0 comme sommet et ne contenant pas une droite entière. C est donc un sous-demi-groupe $\underline{\mathbb{R}}^n$. On appelle demi-groupe C-solénoïdal un morphisme f de C dans un demi-groupe compact S , dont l'image $f(C)$ est partout dense dans S . Si $g: C \rightarrow T$ est un deuxième demi-groupe C-solénoïdal, on appelle morphisme de f dans g chaque morphisme $\varphi: S \rightarrow T$ tel que $\varphi \circ f = g$. On a donc bien défini la catégorie des demi-groupes C-solénoïdaux.

LEMME 4.2. - Si $f: C \rightarrow S$ est un demi-groupe C-solénoïdal, S est abélien. S'il existe un morphisme de f dans $g: C \rightarrow T$, alors ce morphisme $\varphi: S \rightarrow T$ est surjectif et unique.

Supposons dès maintenant que C est un cône de type fini, c'est-à-dire que C est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites Γ_i , $i = 1, \dots, m$, commençant à l'origine.

Les demi-droites Γ_i sont isomorphes à $\underline{H}$. Soit $f_i: \underline{H} \rightarrow \Gamma_i$ un isomorphisme. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^m f_i: \underline{H}^m \rightarrow C$$

est un morphisme surjectif, qu'on peut étendre à une application linéaire de $\underline{\mathbb{R}}^m$ dans $\underline{\mathbb{R}}^n$. Si $f: C \rightarrow S$ est un demi-groupe C-solénoïdal, alors

$$g_i = f \circ f_i : \underline{H} \longrightarrow g_i(\underline{H})^-$$

est un demi-groupe solénoïdal. D'après le théorème 2.7, il existe un morphisme $\bar{g}_i : \Sigma \longrightarrow S$ tel que $\bar{g}_i \circ \sigma = g_i$. Alors

$$\bigoplus_{i=1}^m \bar{g}_i : \Sigma^m \longrightarrow S$$

est un morphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}^m & \xrightarrow{\sigma^m} & \Sigma^m \\ \bigoplus f_i \downarrow & \searrow \bigoplus g_i & \downarrow \bigoplus \bar{g}_i \\ C & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Si les demi-droites Γ_i sont indépendantes dans $\underline{R}^n$, alors $\bigoplus f_i$ est un isomorphisme. En tenant compte de 4.2, on a obtenu que $\sigma^m : \underline{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ soit un objet initial dans la catégorie des demi-groupes $\underline{H}^m$ -solénoïdaux. Si C n'est pas isomorphe à $\underline{H}^m$, alors $\sigma^m : \underline{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ n'est pas un objet de la catégorie des demi-groupes C -solénoïdaux, qui est une sous-catégorie des demi-groupes $\underline{H}^m$ -solénoïdaux.

THÉOREME 4.3. - Si C est un cône de type fini, la catégorie des demi-groupes C -solénoïdaux possède un objet initial.

Démonstration. - Regardons tous les demi-groupes $\underline{H}^m$ -solénoïdaux g qui se factorisent par un demi-groupe C -solénoïdal f . Puisque $\sigma^m : \underline{H}^m \longrightarrow \Sigma^m$ est initial, il existe un morphisme, et un seul, $\varphi_g : \Sigma^m \longrightarrow S$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}^m & \xrightarrow{\sigma^m} & \Sigma^m \\ \downarrow & \searrow g & \downarrow \varphi_g \\ C & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Soit ρ_g la relation d'équivalence fermée sur Σ^m associée au morphisme φ_g . Soit ρ l'intersection de tous les ρ_g ainsi obtenus. Alors ρ est encore une relation d'équivalence fermée sur Σ^m compatible avec la multiplication. Σ^m/ρ est un demi-groupe compact et, pour tout g , il existe un morphisme

$$\varphi'_g : \Sigma^m/\rho \longrightarrow S \text{ tel que } \varphi_g = \varphi'_g \circ \rho^*,$$

où $\rho^* : \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ est l'application canonique. Il y a de plus un morphisme

$\gamma : C \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ qui est un demi-groupe C -solénoïdal. D'après l'unicité de φ'_g (4.2), $\gamma : C \longrightarrow \Sigma^m/\rho$ est un demi-groupe C -solénoïdal initial.

On peut définir des demi-groupes C -cylindriques, au moins dans le cas où C est un cône de type fini. La proposition 3.4 peut être énoncée pour les demi-groupes C -cylindriques également.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HOFMANN (K. H.) and MOSTERT (P. S.). - Elements of compact semigroups (à paraître).
-