

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES GRAPPY

Idéaux et congruences dans un treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 25, p. 1-15

[<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A10_0>](http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A10_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IDÉAUX ET CONGRUENCES DANS UN TREILLIS (*)

par Jacques GRAPPY

Si pour une congruence θ d'un treillis $\mathcal{C}$, le treillis $\mathcal{C}/\theta$ admet un plus petit élément, cette classe est un idéal I de $\mathcal{C}$, appelé noyau de θ . En général I ne détermine pas θ , et un idéal quelconque de $\mathcal{C}$ n'est pas noyau d'une congruence. L'objet de cet exposé est de caractériser les idéaux qui sont noyaux d'une congruence, et de voir dans quels cas cette congruence est unique. Les résultats donnés ici sont dus à G. GRÄTZER et E. T. SCHMIDT ([3] et [4]), et à M. F. JANOWITZ [5].

1. Définitions.

DEFINITION 1.1. - Un idéal I d'un treillis $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{C}$ vérifiant les deux conditions :

- (1) $i_1 \in I, i_2 \in I \Rightarrow i_1 \vee i_2 \in I$;
- (2) $i \in I, t \in \mathcal{C} \Rightarrow i \wedge t \in I$.

On peut remplacer (2) par (2') :

- (2') $i \in I, t \in \mathcal{C}, t \leq i \Rightarrow t \in I$.

Rappelons les propriétés élémentaires suivantes (voir par exemple [1] ou [2]) :

L'ensemble $\mathfrak{I}$ des idéaux de $\mathcal{C}$ forme une famille de Moore, donc un treillis complet où l'intersection est l'intersection ensembliste, et où l'union est définie par :

$$\bigvee_{\alpha \in A} I_{\alpha} = \{x ; x \leq i_{\alpha_1} \vee \dots \vee i_{\alpha_k}, i_{\alpha_n} \in I_{\alpha_n}\}.$$

PROPOSITION 1.1. - Le treillis $\mathcal{C}$ est modulaire (respectivement distributif) si, et seulement si, $\mathfrak{I}$ est modulaire (respectivement distributif).

La condition est suffisante car l'application, qui à $t \in \mathcal{C}$ fait correspondre l'idéal principal engendré par t : $\bar{t} = \{x ; x \leq t\}$, est un isomorphisme de $\mathcal{C}$

(*) Conférences faites au groupe d'études d'Algèbre dirigé par P. DUBREIL et Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

sur un sous-treillis de $\mathfrak{J}$.

Supposons $\mathfrak{C}$ modulaire par exemple. Soient I, J, K , $I \subseteq K$, trois idéaux de $\mathfrak{C}$. On a toujours :

$$(I \vee J) \cap K \supseteq I \vee (J \cap K) .$$

Soient $t \in (I \vee J) \cap K$, $t \in K$, $t \leq i \vee j$, $i \in I$, $j \in J$. Posons :

$$k = t \vee i \in K .$$

On a alors :

$$t \leq (i \vee j) \wedge k = i \vee (j \wedge k) \in I \vee (J \cap K) .$$

DÉFINITION 1.2. - Une congruence d'un treillis est une relation d'équivalence compatible pour les lois $\vee$ et $\wedge$.

Si θ est une congruence de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}/\theta$ est un treillis. Les classes modulo θ sont convexes, et l'on a la relation importante :

$$x \equiv y \ (\theta) \iff x \vee y \equiv x \wedge y \ (\theta) .$$

Nous utiliserons souvent la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. - Une relation binaire ρ est une congruence si, et seulement si, elle vérifie :

- (1) $a \rho a$, $\forall a \in \mathfrak{C}$,
- (2) $a \rho b \iff (a \wedge b) \rho (a \vee b)$,
- (3) $x \geq y \geq z$, $x \rho y$, $y \rho z \implies x \rho z$,
- (4) $x \geq y$, $x \rho y \implies (x \vee t) \rho (y \vee t)$,
 $\implies (x \wedge t) \rho (y \wedge t)$.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Si elles sont satisfaites, ρ est réflexive et symétrique d'après (1) et (2). Montrons la transitivité. Si $x \rho y$, $y \rho z$, alors $x \rho (x \wedge y)$, $y \rho (y \wedge z)$ et $(x \wedge y) \rho (x \wedge y \wedge z)$ d'après (4). (3) implique alors $x \rho (x \wedge y \wedge z)$, d'où $x \rho (x \wedge z)$ (4). On montre de même $x \rho (x \vee z)$, et finalement $(x \wedge z) \rho (x \vee z)$, c'est-à-dire $x \rho z$, d'après (2).

Montrons enfin la régularité par rapport à $\vee$ par exemple. Si $x \rho y$, alors $x \rho (x \vee y)$, et en utilisant (4) :

$$(x \vee t) \rho (x \vee y \vee t) .$$

De même, $(y \vee t) \rho (x \vee y \vee t)$, d'où :

$$(x \vee t) \rho (y \vee t) .$$

L'ensemble des congruences forme un treillis $\mathcal{C}$, avec les opérations :

$$x \equiv y \left(\bigwedge_{\alpha} \theta_{\alpha} \right) \iff \forall \alpha, x \equiv y \left(\theta_{\alpha} \right),$$

$$x \equiv y \left(\bigvee_{\alpha} \theta_{\alpha} \right) \iff \exists x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y, x_i \equiv x_{i+1} \left(\theta_{\alpha_i} \right).$$

On peut voir facilement que cette dernière définition peut se formuler aussi :

$$x \equiv y \left(\bigvee_{\alpha} \theta_{\alpha} \right) \iff \exists z_0 = x \wedge y < z_1 < \dots < z_n = x \vee y, z_i \equiv z_{i+1} \left(\theta_{\alpha_i} \right).$$

Rappelons enfin que $\mathcal{C}$ vérifie la distributivité généralisée :

$$\theta \wedge \left(\bigvee_{\alpha} \theta_{\alpha} \right) = \bigvee_{\alpha} (\theta \wedge \theta_{\alpha}).$$

2. Faible projectivité.

DÉFINITION 2.1. - On dit que (a, b) est faiblement projectif sur (c, d) , $(a, b, c, d \in \mathcal{C})$, et l'on note $\overline{ab} \longrightarrow \overline{cd}$, s'il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ tels que l'on ait :

$$c \vee d = (\dots((a \vee b) \vee x_1) \wedge x_2 \dots) \vee x_n,$$

$$c \wedge d = (\dots((a \wedge b) \vee x_1) \wedge x_2 \dots) \vee x_n.$$

Remarque. - Si $a < b$ et $c < d$, $d = b \vee x_1$, $c = a \vee x_1$ est équivalent à $b \wedge c \geq a$ et $d = b \wedge x_1$, $c = a \wedge x_1$ équivaut à $a \vee d \leq b$.

Si $\overline{ab} \longrightarrow \overline{cd}$, et si $\theta \in \mathcal{C}$ est telle que $a \equiv b \left(\theta \right)$, alors $c \equiv d \left(\theta \right)$.

DÉFINITION 2.2. - Si $S \subseteq \mathcal{C}$, on notera $\theta_{[S]}$ la plus petite congruence laissant S indivisible. Si $S = \{a, b\}$, on notera θ_{ab} .

PROPOSITION 2.1. - θ_{ab} est définie par :

$$x \equiv y \left(\theta_{ab} \right) \iff \exists y_0 = x \wedge y < y_1 < \dots < y_n = x \vee y, \overline{ab} \longrightarrow \overline{y_i y_{i+1}}.$$

La relation binaire ρ ainsi définie vérifie $\rho \leq \theta_{ab}$, et $a \rho b$. Il suffit de prouver que ρ est une congruence, et pour cela qu'elle vérifie les hypothèses de la proposition 1.2. Les conditions (1), (2) et (3) sont immédiates. (4) résulte de ce que, si $\overline{ab} \longrightarrow \overline{y_i y_{i+1}}$, alors :

$$\overline{ab} \longrightarrow \overline{(y_i \vee t) \cdot (y_{i+1} \vee t)}.$$

THÉOREME 2.1. - Soit $S \subseteq \mathcal{C}$.

$$(1) \text{ On a } \theta[S] = \bigvee_{(a,b) \in S \times S} \theta_{ab}.$$

(2) S est classe d'une congruence, donc de $\theta[S]$, si et seulement si S vérifie la condition :

$$\forall a, b, c \in S, d \in \mathcal{C}, \quad \overline{ab} \longrightarrow \overline{cd} \implies d \in S.$$

La première assertion est immédiate.

Si S est classe pour $\theta[S]$, $a, b, c \in S$ et $\overline{ab} \longrightarrow \overline{cd}$ implique : $c \equiv d \ (\theta_{ab})$, donc $d \in S$. Supposons la condition vérifiée, et soient $s \in S$, $t \in \mathcal{C}$, $y \equiv t \ \theta[S]$. Il existe donc

$$t_0 = s < t_1 < \dots < t_n = t \vee s \quad t_i \equiv t_{i+1} \ (\theta_{a_i b_i}), \quad a_i, b_i \in S.$$

D'après la définition de $\theta_{a_i b_i}$, il existe une suite :

$$k_i^0 = t_i < k_i^1 < \dots < k_i^{l_i} = t_{i+1} \quad \text{avec} \quad \overline{a_i b_i} \longrightarrow \overline{k_i^j k_i^{j+1}}.$$

Supposons que $k_i^j \in S$, alors $k_i^{j+1} \in S$. On montre aussi, par récurrence, que $t \vee s \in S$. Puisque $t < t \vee s$, le raisonnement dual montrera que $s \in S$.

Congruences et idéaux. - Si la congruence θ est telle que $\mathcal{C}/\theta$ ait un plus petit élément, cette classe est un idéal de $\mathcal{C}$, I_θ , appelé noyau de θ . Mais on n'a pas en général $\theta[I_\theta] = \theta$.

A tout idéal I on peut associer $\theta[I]$, cette congruence admet un noyau, qui en général contient strictement I . On peut se poser les problèmes suivants :

(1) Caractériser les idéaux qui sont noyau d'une congruence.

Le théorème 2.1 donne une solution à ce problème, mais la caractérisation obtenue est peu maniable. Dans la suite, on donnera des conditions nécessaires et des conditions suffisantes qui, pour certains treillis, seront nécessaires et suffisantes.

(2) Caractériser les treillis dans lesquels tout idéal est noyau d'une congruence.

3. Etude de certains éléments d'un treillis et de certains idéaux.

DEFINITION 3.1. - Un élément z d'un treillis $\mathcal{C}$ est dit neutral si, quels que soient a et b dans $\mathcal{C}$, a, b, z engendrent un sous-treillis distributif.

Un élément $s \in \mathcal{C}$ est dit standard si l'on a :

$$(a \vee s) \wedge b = (a \wedge b) \vee (s \wedge b) \quad \forall a \in \mathcal{C}, \quad \forall b \in \mathcal{C}.$$

Un élément $u \in \mathcal{C}$ est dit $\vee$ -distribuant si l'on a :

$$u \vee (a \wedge b) = (u \vee a) \wedge (u \vee b) \quad \forall a \in \mathcal{C}, \quad \forall b \in \mathcal{C} .$$

Un élément $s \in \mathcal{C}$ est dit simplifiable si les relations :

$$s \vee a = s \vee b, \quad s \wedge a = s \wedge b \quad \text{impliquent} \quad a = b .$$

PROPOSITION 3.1. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) s est standard dans $\mathcal{C}$.

(2) La relation θ_s définie dans $\mathcal{C}$ par :

$$x \theta_s y \iff \exists s_1 \leq s, \quad (x \wedge y) \vee s_1 = x \vee y ,$$

est une congruence.

(3) s est $\vee$ -distribuant et simplifiable.

(1) $\implies$ (2). - Il faut vérifier que θ_s satisfait aux quatre conditions de la proposition 1.2.

Seule la deuxième partie de la condition (4) n'est pas évidente. Si $x < y$ et $x \theta_s y$, on a $x \vee s_1 = y$, $s_1 \leq s$. Quel que soit $t \in \mathcal{C}$,

$$y \wedge t = (x \vee s_1) \wedge t \leq (x \vee s) \wedge t = (x \wedge t) \vee (s \wedge t) \leq (x \wedge t) \vee s .$$

Alors :

$$\begin{aligned} y \wedge t &= (y \wedge t) \wedge ((x \wedge t) \vee s) = [(y \wedge t) \wedge (x \wedge t)] \vee [(y \wedge t) \wedge s] \\ &= (x \wedge t) \vee s_2 \quad \text{où} \quad s_2 = (y \wedge t) \wedge s . \end{aligned}$$

On a bien :

$$(x \wedge t) \theta_s (y \wedge t) .$$

(2) $\implies$ (3). - Soit s tel que la relation θ_s est une congruence. Montrons que s est $\vee$ -distribuant.

On a $x \equiv s \vee x \ (\theta_s)$, $y \equiv s \vee y \ (\theta_s)$, donc,

$$x \wedge y \equiv (s \vee x) \wedge (s \vee y) \ (\theta_s) .$$

Il existe alors $s_1 \leq s$ tel que :

$$(x \wedge y) \vee s_1 = (s \vee x) \wedge (s \vee y) .$$

Si l'on prend l'union des deux membres avec s on obtient :

$$(x \wedge y) \vee s = (s \vee x) \wedge (s \vee y) .$$

Montrons que s est simplifiable. Si on a $s \vee a = s \vee b$, $s \wedge a = s \wedge b$, alors :

$a \equiv s \vee a \ (\theta_s)$ et $b \equiv s \vee b \ (\theta_s)$ impliquent $a \equiv b \ (\theta_s)$ et $a \wedge b \equiv a \ (\theta_s)$.

Il existe donc $s_1 \leq s$, $(a \wedge b) \vee s_1 = a$. Il en résulte successivement :

$s_1 \leq a$, $s_1 \leq (s \wedge a) = (s \wedge b)$, $s_1 \leq (a \wedge b)$, et finalement $(a \wedge b) = a$.

De même $(a \wedge b) = b$, et $a = b$.

(3) $\Rightarrow$ (1). - Posons $a = x \wedge (s \vee y)$, $b = (x \wedge s) \vee (x \wedge y)$. On a toujours $b \leq a$. On a successivement :

$$a \vee s = s \vee (x \wedge (s \vee y)) = (s \vee x) \wedge (s \vee y) = s \vee (x \wedge y) = b \vee s,$$

$(a \wedge s) = (x \wedge s) \leq (b \wedge s)$, d'où $(a \wedge s) = (b \wedge s)$, et finalement $a = b$.

Remarque. - θ_s admet $\bar{s}$ pour noyau, et $\theta_s = \theta[\bar{s}]$.

DÉFINITION 3.2. - Un idéal I d'un treillis $\mathcal{C}$ est dit neutral (resp. standard, resp. $\vee$ -distribuant) si I est un élément neutral (resp. standard, resp. $\vee$ -distribuant) du treillis $\mathfrak{I}$ des idéaux de $\mathcal{C}$.

Un idéal I est dit projectif si les relations :

$$(a \vee x) \geq (b \vee x), \quad (a \wedge x) \geq (b \wedge x), \quad a \in I \quad \text{impliquent} \quad b \in I.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ possède un zéro, I est dit 0-projectif si :

$$(a \vee x) \geq (b \vee x), \quad (a \wedge x) = (b \wedge x) = 0, \quad a \in I \quad \text{impliquent} \quad b \in I.$$

Enfin, I sera appelé un p-idéal si :

$$(a \vee x) = (b \vee x), \quad (a \wedge x) = (b \wedge x) = 0, \quad a \in I \quad \text{impliquent} \quad b \in I.$$

PROPOSITION 3.2. - Les propriétés suivantes sont équivalentes dans un treillis $\mathcal{C}$:

(1) S est un idéal standard.

(2) La relation θ_S définie dans $\mathcal{C}$ par :

$$x \equiv y \ (\theta_S) \iff \exists s \in S, \quad (x \wedge y) \vee s = (x \vee y),$$

est une congruence.

(1) $\Rightarrow$ (2). - Si S est standard, on sait que l'on peut définir une congruence θ_S de $\mathfrak{I}$ par :

$$X \equiv Y \ (\theta_S) \iff \exists S_1 \subseteq S, \quad (X \cap Y) \vee S_1 = (X \vee Y) \ .$$

Or $\mathcal{C}$ est isomorphe à un sous-treillis $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathfrak{A}$. Montrons que l'image $\overline{\theta_S}$ de θ_S dans $\overline{\mathcal{C}}$ n'est autre que la restriction $\overline{\theta_S}$ de θ_S à $\overline{\mathcal{C}}$. Soient $X = \overline{x}$, $Y = \overline{y}$, $X \equiv Y \ (\theta_S)$. Il existe $S_1 \subseteq S$ tel que :

$$(\overline{x \wedge y}) \vee S_1 = \overline{(x \vee y)} \ .$$

Alors il existe $s \in S_1 \subseteq S$, $(x \vee y) \leq (x \wedge y) \vee s$, et on a l'égalité, car $(x \wedge y) \vee s_1$ appartient à $\overline{(x \vee y)}$. Donc $\overline{\theta_S} \leq \overline{\theta_S}$. On a immédiatement $\overline{\theta_S} \leq \overline{\theta_S}$.

(2) $\implies$ (1). - Soient X et Y deux idéaux de $\mathcal{C}$. Posons :

$$A = (S \vee X) \cap Y, \quad B = (S \cap Y) \vee (S \cap X) \ .$$

On doit montrer $A \subseteq B$. Soit $y \in A$, $y \in Y$ et $y \leq (s \vee x)$, $s \in S$, $x \in X$.

On a : $x \equiv s \vee x \ (\theta_S)$, d'où :

$$y = (s \vee x) \wedge y \equiv x \wedge y \ (\theta_S) \ .$$

Il existe donc $s_1 \in S$: $y = (x \wedge y) \vee s_1$. Or $s_1 \leq y$, donc $s_1 \in S \cap Y$, et $y \in B$.

PROPOSITION 3.3. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) I est un idéal $\vee$ -distribuant.

(2) $t \leq (x \vee a) \wedge (y \vee b)$, $x, y \in I \implies \exists z \in I$, $t \leq z \vee (a \wedge b)$.

(3) On définit une congruence dans $\mathcal{C}$ par :

$$x \equiv y \ (\theta_I) \iff \exists a \in I, \quad (x \vee a) = (y \vee a) \ .$$

(1) $\implies$ (2). - Cela résulte de l'égalité :

$$I \vee (\overline{a \wedge b}) = (I \vee \overline{a}) \cap (I \vee \overline{b}) \ .$$

(2) $\implies$ (3). - Vérifions les conditions de la proposition 1.2. La première est évidente.

Si $x \equiv y \ (\theta_I)$, on a $(x \vee a) = (y \vee a)$, $a \in I$. Alors :

$$x \vee y \vee a = x \vee a = y \vee a \quad \text{et} \quad x \vee y \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a) \ .$$

Il existe $b \in I$ tel que :

$$x \vee y \vee a \leq b \vee (x \wedge y) \quad \text{et} \quad x \vee y \vee a \vee b = (a \vee b) \vee (x \wedge y) \ ,$$

donc $x \wedge y \equiv x \vee y \ (\theta_I)$.

La troisième condition est évidente, ainsi que la première partie de la quatrième.

Soient x, y, t , $x \equiv y \ (\theta_I)$, $(x \vee a) = (y \vee a)$ avec $x \leq y$, $a \in I$.
Alors :

$$(x \vee a) \wedge (t \vee a) = (y \vee a) \wedge (t \vee a) .$$

On a de plus :

$$(x \vee a) \wedge (t \vee a) \leq b \vee (x \wedge t) \quad b \in I$$

$$(y \vee a) \wedge (t \vee a) \geq a \vee (y \wedge t) ,$$

et finalement :

$$(y \wedge t) \vee a \vee b = (x \wedge t) \vee a \vee b ,$$

soit :

$$x \wedge t \equiv y \wedge t \ (\theta_I) .$$

(3) $\implies$ (1). - Posons $X = I \vee (A \cap B)$, $Y = (I \vee A) \cap (I \vee B)$, $A, B \in \mathcal{J}$.
Soit $x \in X$:

$$x < i \vee a, \quad i \in I, \quad a \in A \quad \text{et} \quad x \leq j \vee b, \quad j \in I, \quad b \in B .$$

On peut supposer $i = j$. On a alors :

$$a \equiv i \vee a \ (\theta_I), \quad b \equiv i \vee b \ (\theta_I) ,$$

donc :

$$z = (i \vee a) \wedge (i \vee b) \equiv a \wedge b \ (\theta_I) .$$

Il existe donc $t \in I$ tel que :

$$z \vee t = (a \wedge b) \vee t .$$

Or on a $x \leq z$, d'où $x \leq (a \wedge b) \vee t$ qui montre que x appartient à Y . On a donc bien $X = Y$.

PROPOSITION 3.4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) I est projectif.
- (2) $a \in I$, $x \wedge y \in I \implies (a \vee x) \wedge y \in I$.
- (3) $a \in I$, $b \in I$, $(x \wedge y) \in I \implies (a \vee x) \wedge (b \vee y) \in I$.
- (4) $a \in I$, $b \wedge x \in I$, $a \vee x \geq b \vee x \implies b \in I$.

(1) $\implies$ (2). - On a successivement :

$$[(a \vee x) \wedge y] \vee x \leq a \vee x = [a \vee (x \wedge y)] \vee x ,$$

$$[(a \vee x) \wedge y] \wedge x = x \wedge y \leq [a \vee (x \wedge y)] \wedge x .$$

Comme $a \vee (x \wedge y) \in I$, il en résulte : $(a \vee x) \wedge y \in I$.

(2) $\Rightarrow$ (3). - En appliquant deux fois l'hypothèse, il vient :

$$(a \vee x) \wedge y \in I \quad \text{puis} \quad (a \vee x) \wedge (b \vee y) \in I .$$

(3) $\Rightarrow$ (4). - a et $b \wedge x$ appartenant à I , on a :

$$(a \vee b) \wedge (a \vee x) \in I \quad \text{et} \quad b \leq (a \vee b) \wedge (a \vee x) ,$$

d'où $b \in I$.

(4) $\Rightarrow$ (1). - C'est évident.

PROPOSITION 3.5. - On a les implications :

Idéal neutral $\Rightarrow$ Idéal standard $\Rightarrow$ Idéal $\vee$ -distribuant $\Rightarrow$ noyau d'une congruence $\Rightarrow$ Idéal projectif.

Si $\mathcal{C}$ a un zéro :

Idéal projectif $\Rightarrow$ Idéal 0-projectif $\Rightarrow$ p-idéal.

Si I est $\vee$ -distribuant, θ_I (prop. 3.3) est une congruence, et l'on a même $\theta_I = \theta[I]$. I est le noyau de θ_I .

De même, si S est standard, $\theta_S = \theta[S]$ admet S comme noyau. Une telle congruence sera dite standard.

Soit I le noyau d'une congruence θ , et soient :

$$a \in I, \quad b \wedge x \in I \quad a \vee x \geq b \vee x .$$

Alors $a \equiv a \wedge x \ (\theta)$, d'où $a \vee x \equiv x \ (\theta)$, et aussi $b \vee x \equiv x \ (\theta)$; alors :

$$b = (b \vee x) \wedge b \equiv b \wedge x \ (\theta) .$$

Puisque $b \wedge x \in I$, il en résulte $b \in I$, et I est projectif.

PROPOSITION 3.6. - Soient θ et φ deux congruences de $\mathcal{C}$.

θ et φ commutent $\iff \{a \leq b \leq c, \ a \equiv b \ (\theta), \ b \equiv c \ (\varphi) \Rightarrow \exists d, \ a \leq d \leq c, \ a \equiv d \ (\varphi), \ d \equiv c \ (\theta)\} .$

Si θ et φ commutent, soient $a < b < c$, $a \equiv b \ (\theta)$, $b \equiv c \ (\varphi)$. Il existe d' tel que $a \equiv d' \ (\varphi)$, $d' \equiv c \ (\theta)$. Il n'y a qu'à prendre $d = (a \vee d') \wedge c$.

Réciproquement, soient a, b, c , $a \equiv b \ (\theta)$, $b \equiv c \ (\varphi)$. On a :

$$a \equiv a \wedge b \ (\theta), \quad b \equiv b \wedge c \ (\varphi) \quad \text{et} \quad a \wedge b \equiv a \wedge b \wedge c \ (\varphi) .$$

Il existe donc d_1 ,

$$a \geq d_1 \geq a \wedge b \wedge c \quad \text{avec} \quad a \equiv d_1 \quad (\varphi), \quad d_1 \equiv a \wedge b \wedge c \quad (\theta) .$$

De même, il existe d_2 ,

$$a \wedge b \wedge c \leq d_2 \leq c \quad a \wedge b \wedge c \equiv d_2 \quad (\varphi), \quad d_2 \equiv c \quad (\theta) .$$

Alors $d_1 \equiv d_1 \vee d_2 \quad (\varphi)$, $d_1 \vee d_2 \equiv d_2 \quad (\theta)$, et finalement :

$$a \equiv d_1 \vee d_2 \quad (\varphi), \quad d_1 \vee d_2 \equiv c \quad (\theta) .$$

PROPOSITION 3.7. - Les congruences standard commutent.

Soient θ et φ standards, de noyaux I et K . Si $a < b < c$,

$$a \equiv b \quad (\theta), \quad b \equiv c \quad (\varphi),$$

il existe $i \in I$, $k \in K$, $a \vee i = b$, $b \vee k = c$. Alors :

$$a \equiv a \vee k \quad (\varphi) \quad \text{et} \quad a \vee k \equiv c \quad (\theta) .$$

PROPOSITION 3.8. - Soit $\mathcal{C}$ un treillis distributif dont les congruences commutent. Alors $\mathcal{C}$ est relativement complété.

LEMME. - Si $\mathcal{C}$ est distributif, les relations suivantes sont équivalentes :

- (1) $a < b$, $c < d$, $\overline{ab} \longrightarrow \overline{cd}$.
- (2) $\exists x_1, x_2$, $c = (a \vee x_1) \wedge x_2$, $d = (b \vee x_1) \wedge x_2$.
- (3) $c = (a \vee c) \wedge d = (a \wedge d) \vee c$, $d = (b \vee c) \wedge d = (b \wedge d) \vee c$.
- (4) $c \geq a \wedge d$, $d \leq b \vee c$.

Il est évident que (3) $\iff$ (4) et (4) $\implies$ (1).

(1) $\implies$ (2). - Si $\overline{ab} \longrightarrow \overline{cd}$, il existe $y_1, y_2, \dots, y_n$ tels que :

$$c = (\dots((a \vee y_1) \wedge y_2) \dots) \wedge y_n,$$

$$d = (\dots((b \vee y_1) \wedge y_2) \dots) \wedge y_n.$$

Si $n > 3$, on se ramène à $n - 1$ éléments :

$$(a \vee y_1) \wedge y_2 = (a \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2),$$

$$[(a \vee y_1) \wedge y_2] \vee y_3 = (a \wedge y_2) \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee y_3].$$

L'ordre des signes $\vee$ et $\wedge$ importe peu, puisque :

$$(a \vee x_1) \wedge x_2 = (a \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). - On voit aisément que l'on peut prendre $x_1 = c$, $x_2 = d$.

Démonstration de la proposition. - Soient $a \leq b \leq c$. On a : $a \equiv b \ (\theta_{ab})$, $b \equiv c \ (\theta_{bc})$. Donc il existe d , $a \leq d \leq c$,

$$a \equiv d \ (\theta_{bc}) \quad \text{et} \quad d \equiv c \ (\theta_{ab}) .$$

Il existe donc : $y_0 = a \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = d$, $\overline{bc} \longrightarrow \overline{y_i y_{i+1}}$. Utilisant le lemme, on a $y_i \geq y_{i+1} \wedge b$, d'où $a \geq d \wedge b$ et $a = d \wedge b$. De même, $c = d \vee b$, et d est un complément relatif de b dans $[a, c]$.

4. Relations entre congruences et idéaux d'un treillis.

DÉFINITION 4.1. - Un treillis $\mathcal{C}$ est dit complémenté par sections, si quel que soit $x \in \mathcal{C}$, il existe $a \leq x$ tel que tous les intervalles $[a, b]$, $a < b$, soient complémentés.

Si $\mathcal{C}$ admet un zéro, cela revient à dire que tous les intervalles $[0, b]$ sont complémentés.

THÉOREME 4.1. - Soit $\mathcal{C}$ un treillis complémenté par sections. Si θ est une congruence admettant un noyau I , I est un idéal standard, et $\theta = \theta_I$.

Soient $a \leq b$, $a \equiv b \ (\theta)$. Il existe $d \in I$, $d_1 \leq a$, tel que $[d, b]$ soit complémenté. Si c est un complément de a dans $[d, b]$, $a \vee c = b$, $a \wedge c = d$, on a alors $d \equiv c \ (\theta)$, soit : $c \in I$.

Réciproquement, si $a \leq b$, et $a \vee c = b$ avec $c \in I$, alors :

$$c \equiv c \wedge a \ (\theta) \quad \text{et} \quad b = a \vee c \equiv a \ (\theta) .$$

On a donc :

$$x \equiv y \ (\theta) \iff \exists c \in I, (x \wedge y) \vee c = x \vee y .$$

Il en résulte que I est standard, d'après la proposition 3.2, et que

$$\theta = \theta_I = \theta_{[I]} .$$

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{C}$ un treillis modulaire relativement complémenté. Si une congruence θ admet un noyau I , I est un idéal neutral, et θ est déterminée par I .

Si $\mathcal{C}$ est modulaire, il en est de même de $\mathfrak{J}$. Or dans un treillis modulaire, un élément standard est neutral (voir par exemple [6], p. 4).

THÉOREME 4.2. - Soit $\mathcal{C}$ un treillis complémenté par sections. Alors tout idéal projectif est standard.

Si $\mathcal{C}$ admet un zéro, tout idéal 0-projectif est standard.

Si de plus $\mathcal{C}$ est relativement complémenté, un p-idéal est un idéal standard.

1° Supposons que $\mathcal{C}$ ait un zéro, et montrons qu'un idéal 0-projectif I est standard. D'après le théorème 4.1, il suffit de montrer que I est noyau d'une congruence.

Considérons la relation θ :

$$x \theta y \iff \exists t \in I, (x \wedge y) \vee t = x \vee y, \quad x \wedge y \wedge t = 0.$$

Montrons que θ vérifie les conditions de la proposition 1.2. Les deux premières sont évidentes.

Soient $x \leq y \leq z$, $x \vee t = y$, $y \vee s = z$, $t \in I$, $s \in I$. On a :

$$x \vee (s \vee t) = z.$$

Soit u un complément de $x \wedge (s \vee t)$ dans $s \vee t$. Alors $a \vee u = z$, $a \wedge u = 0$, et $u \in I$. Donc :

$$x \equiv z \quad (\theta).$$

Soient $x \leq y$, $x \vee t = y$, $x \wedge t = 0$, $t \in I$. Si $u \in \mathcal{C}$, $(x \vee u) \vee t = y \vee u$. Soit s un complément de $(x \vee u) \wedge t$ dans t . Alors $s \in I$, et

$$(x \vee u) \vee s = y \vee u, \quad (x \vee u) \wedge s = 0,$$

et

$$x \vee u \equiv y \vee u \quad (\theta).$$

Prenons un complément s de $x \wedge u$ dans $y \wedge u$. On a :

$$x \wedge s = x \wedge (y \wedge u) \wedge s = x \wedge u \wedge s = 0 = x \wedge t,$$

$$x \vee s \leq y = x \vee t.$$

Comme I est 0-projectif, il en résulte : $s \in I$, et $x \wedge u \equiv y \wedge u \quad (\theta)$. La relation θ est donc une congruence, et son noyau est I .

2° Soit I un idéal projectif de $\mathcal{C}$. Notons $S(x)$ l'ensemble des majorants de x . Quel que soit $a \in \mathcal{C}$, il existe $x \leq a$ tel que $S(x)$ soit complémenté par sections. Alors $I \cap S(x)$ est 0-projectif dans $S(x)$, donc standard dans $S(x)$. Il en résulte aisément que I est standard dans $\mathcal{C}$.

3° Si $\mathcal{C}$ a un zéro, et est relativement complémenté, montrons qu'un p-idéal est 0-projectif.

Si $a \vee x \geq b \vee x$, $a \wedge x = b \wedge x = 0$, $a \in I$; soit u un complément de $b \vee x$

dans $\{b, (a \vee x)\}$. Alors $u \vee x = a \vee x$, $u \wedge x = a \wedge x = 0$, d'où $u \in I$, puis $b \in I$.

THÉOREME 4.3. - Tout idéal d'un treillis est classe d'au moins une congruence si, et seulement si, $\mathcal{C}$ est distributif.

Condition nécessaire. - Si $\mathcal{C}$ n'est pas distributif, il existe un sous-treillis du type S ou T. Soit alors $I = \bar{a}$.

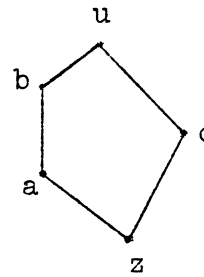
Si θ admet I pour noyau, on a :

$$a \equiv z \ (\theta), \quad u = a \vee c \equiv c \ (\theta),$$

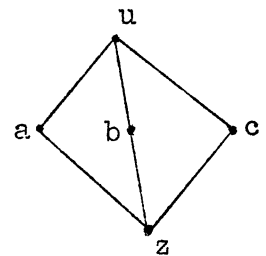
$$b \equiv c \wedge b = z \ (\theta),$$

ce qui est absurde, car $b \notin I$.

Condition suffisante. - Si $\mathcal{C}$ est distributif, $\mathcal{C}$ l'est aussi, et tout idéal est standard.



(S)



(T)

THÉOREME 4.4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Tout idéal est classe d'une congruence unique, et toute congruence admet un noyau.

(2) $\mathcal{C}$ est un treillis avec zéro, distributif et complété par sections.

(1) $\Rightarrow$ (2). - L'hypothèse implique que $\mathcal{C}$ est distributif d'après le théorème précédent. Toutes les congruences sont standards, donc commutent, et $\mathcal{C}$ est relativement complété d'après la proposition 3.8.

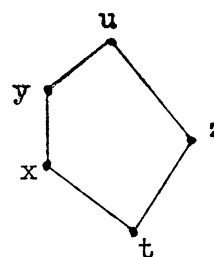
(2) $\Rightarrow$ (1). - Tout idéal est alors standard, et le théorème 4.1 donne l'unicité.

THÉOREME 4.5. - Soit $\mathcal{C}$ un treillis, $a \in \mathcal{C}$. Tout sous-treillis convexe contenant a est classe d'une congruence unique si et seulement si $\mathcal{C}$ est distributif, et tous les intervalles (a, b) , (c, a) , $a \leq b$, $c \leq a$, sont complétés.

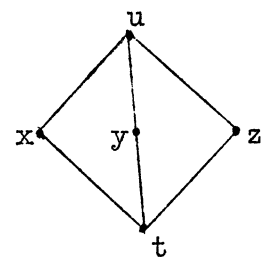
Condition nécessaire. - Si $\mathcal{C}$ est non distributif, il existe un sous-treillis du type S ou T.

$$1^\circ \text{ Si } x \vee a = y \vee a, \quad x \wedge a = y \wedge a.$$

θ_{xy} est différente de l'égalité, donc la classe de a contient par exemple $c > a$.



(S)



(T)

Soit φ ayant $\{(x \wedge y \wedge a), a\}$ pour classe. Alors :

$$x \vee (x \wedge y \wedge a) = x \equiv x \vee a \quad (\varphi) \quad \text{et de même} \quad y \equiv y \vee a \quad (\varphi),$$

d'où :

$$x \equiv y \quad (\varphi) \quad \text{et} \quad \theta_{xy} \leq \varphi.$$

Cela est absurde, car on aurait $c \equiv a \quad (\varphi)$.

2° Sinon, on a par exemple $y \vee a \not\leq x \vee a$.

Soit φ ayant $\{t \wedge a, x \vee a\}$ pour classe. On a $x \equiv t \quad (\varphi)$, et il en résulte, comme on l'a déjà vu $x \equiv y \quad (\varphi)$, puis $x \vee a \equiv y \vee a \quad (\varphi)$, ce qui est absurde.

$\mathcal{C}$ est donc distributif. Soit alors $b \geq a$. $\{a, b\}$ est image homomorphe de $\mathcal{C}$ par l'application $x \longrightarrow (x \vee a) \wedge b$. Donc tout idéal de $\{a, b\}$ est noyau d'une congruence unique de $\{a, b\}$. Le théorème 4.4 implique que $\{a, b\}$ est complémenté.

Condition suffisante. - Soit K un sous-treillis convexe contenant a . Soient $I(K)$ et $I^*(K)$ l'idéal et l'idéal dual engendrés par K . Les hypothèses entraînent (théorème 4.3) que $I(K)$ et $I^*(K)$ sont classes de congruences θ et θ^* . Alors $\theta \wedge \theta^*$ a pour classe $I(K) \cap I^*(K) = K$.

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que $\{a\}$ est classe de l'égalité seulement.

Soient $x \neq y$, $x < y$. On a, par exemple, $x \vee a < y \vee a$. Si b est un complément de $x \vee a$ dans $\{a, (y \vee a)\}$, on aura :

$$x \vee a \equiv y \vee a \quad (\theta_{xy}) \quad \text{donc} \quad b \equiv a \quad (\theta_{xy}).$$

θ_{xy} ne peut avoir $\{a\}$ pour classe.

DÉFINITION 4.2. - Un treillis $\mathcal{C}$ est dit faiblement complémenté, s'il a un zéro et si, quels que soient a et b , il existe $c \neq 0$ tel que $\overline{ab} \longrightarrow \overline{0c}$.

THÉORÈME 4.6. - $\mathcal{C}$ est faiblement complémenté si, et seulement si, l'égalité est la seule congruence ayant 0 pour classe.

Condition nécessaire. - Si $x < y$, il existe c tel que $\overline{xy} \longrightarrow \overline{0c}$. Alors $0 \equiv c \quad (\theta_{xy})$.

Condition suffisante. - Soit $a < b$. On a donc $\theta_{ab} \neq \varepsilon$. Il existe $c \neq 0$, $c \equiv 0 \quad (\theta_{ab})$, et donc des éléments $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = c$, avec $\overline{ab} \longrightarrow \overline{c_i c_{i+1}}$. On a alors $\overline{ab} \longrightarrow \overline{0c_1}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New-York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 25).
 - [2] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).
 - [3] GRÄTZER (G.) and SCHMIDT (E. T.). - Ideals and congruence relations in lattices, *Acta Math. Acad. scient. Hungar.*, t. 9, 1958, p. 137-175.
 - [4] GRÄTZER (G.) and SCHMIDT (E. T.). - Standard ideals in lattices, *Acta Math. Acad. scient. Hungar.*, t. 12, 1961, p. 17-86.
 - [5] JANOWITZ (M. F.). - A characterisation of standard ideals, *Acta Math. Acad. scient. Hungar.*, t. 16, 1965, p. 289-301.
 - [6] MAEDA (Fumitomo). - Kontinuierliche Geometrien. - Berlin, Springer-Verlag, 1958 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 95).
-