

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX

Théorèmes d'approximation dans les adèles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 8, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES D'APPROXIMATION DANS LES ADELES

par Annette DECOMPS-GUILLOUX

I. Anneau des I-adelles. Définitions. Notations.

I désignera un sous-ensemble fini de P , ensemble de toutes les valuations distinctes de Q , corps des rationnels. o sera la valuation ordinaire, et $Q_o = R$ le corps complété de Q par rapport à la valuation ordinaire, p sera un élément de P , valuation définie par $|p|_p = \frac{1}{p}$, et Q_p le corps complété de Q par rapport à la valuation p -adique.

L'adèle $V_P(Q)$ est l'ensemble des éléments $x = (x_o, x_1, \dots, x_n)$ du produit cartésien de R par tous les corps p -adiques ($x_o \in R, \dots, x_n \in Q_{p_n}$) tels que $|x_n|_{p_n} \leq 1$, sauf au plus pour un nombre fini d'indice n . L'addition et la multiplication composante par composante donnent à $V_P(Q)$ une structure d'anneau.

$V_P(Q)$ contient des sous-anneaux remarquables

$$V_I = \{x \in V_P, x_p = 0 \text{ si } p \notin I\}.$$

Du point de vue topologique, on considère V_I comme isomorphe au produit $\prod_{p \in I} Q_p$.

On notera $|x|_p = |x_p|_p$.

Rappelons l'expression de la décomposition d'Artin [1] dans V_I ($Z[I]$ désigne l'anneau des rationnels dont le dénominateur ne contient que des facteurs p appartenant à $I^- = I$ si $o \notin I$, $I^- = I - \{0\}$ si $o \in I$).

x étant un élément de V_I , il existe une décomposition

$$x = e_I E(x) + \varepsilon_I(x)$$

où $E(x) \in Z[I]$ et ε_I vérifie les inégalités

$$|\varepsilon_I(x)|_p \leq 1 \quad \forall p \in I,$$

$$a \leq \varepsilon_o(x) < a + 1 \quad \text{si } o \in I,$$

$$a \leq -E(x) < a + 1 \quad \text{si } o \notin I.$$

$\varepsilon_0(x)$ désignant la composante réelle de $\varepsilon_I(x)$, a étant fixe, la décomposition est unique.

On prendra toujours dans ce qui suit $a = -\frac{1}{2}$.

II. Nombres α dans V_I .

1. Nombres α réels. Définition. Rappel des propriétés [5].

Un nombre réel $\omega > 1$ est un nombre α s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

associée à une suite u_n d'entiers rationnels, déterminée par la relation de récurrence

$$(R) \quad -\frac{1}{2} \leq u_{n+1} - \frac{u_n^2}{u_{n-1}} < \frac{1}{2},$$

et la donnée de u_0 et u_1 .

Si $u_1 \geq u_0 + \frac{\sqrt{u_0}}{2}$, la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un élément $\alpha \geq 1$.

Si $u_1 > u_0 + \sqrt{u_0}$, dans ce cas $\alpha > 1$ et la suite $\frac{u_n}{\alpha^n}$ converge vers un élément λ .

L'ensemble des nombres α contient les nombres de Pisot (S) et de Salem (T). On ne sait pas s'il contient d'autres éléments.

2. Nombres α_I (α n'appartient pas à I).

(a) Définition.

Un élément ω de V_I , vérifiant $|\omega|_p > 1$, $\forall p \in I$, est un élément de α_I s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} e_I,$$

où u_n est une suite d'éléments de $Z[I]$ déterminée par :

- la donnée de u_0 et u_1 avec $|u_1|_p > |u_0|_p > 1$, $\forall p \in I$,
- la condition (C), $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \geq 0$,
- les relations (R)

$$\left| \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2} \right|_p \leq 1 \quad \forall p \in I .$$

(b) Les relations (R) et la condition (C), et la donnée de u_0 et u_1 , déterminent effectivement une suite d'éléments de $Z[I]$, et l'ensemble α_I est dénombrable.

(R) et (C) entraînent $u_{n+2} = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$ donc, u_0 et u_1 étant donnés, u_n est déterminé $\forall n$.

(c) Etude de la suite $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. - La démonstration comprend les étapes suivantes :

- La suite $|u_n|_p$ est croissante, $\forall p \in I$.

- La suite ω_n est convergente dans V_I . On montre pour cela que ω_n est une suite de Cauchy dans Q_p , $\forall p \in I$. On définit donc

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n \quad \text{dans } V_I ,$$

avec $\omega = (\omega_p)$ où $\omega_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$ dans Q_p .

- La suite $\frac{u_n}{\omega}$ a pour limite un élément λ de V_I ; et l'inégalité

$$\left| \lambda - \frac{u_n}{\omega} \right|_p \leq p^{-t_p(n+2)}$$

où l'on pose $\left| \frac{u_1}{u_0} \right|_p = p^{t_p}$; ou encore

$$|\lambda \omega^n - u_n|_p \leq p^{-2t_p n} ,$$

ce qui permet d'envisager la réciproque suivante :

(d) Si l'on considère un élément $\omega \in V_I$ vérifiant $|\omega|_p = p^{t_p}$, $t_p > 0$, $\forall p \in I$ pour lequel il existe un élément $\lambda \in V_I$ tel que, dans la décomposition d'Artin

$$\lambda \omega^n = e_I E(\lambda \omega^n) + \varepsilon_I(\lambda \omega^n) ,$$

on ait

$$|\varepsilon_I(\lambda \omega^n)|_p \leq p^{-2t_p n} \quad \forall p \in I ,$$

alors ω est un élément de α_I .

On montre en effet que la suite $u_n = E(\lambda \omega^n)$ vérifie les relations (R) et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \omega \right|_p = 0 \quad \forall p \in I.$$

(e) L'ensemble α_I est dense dans V_I pour $|\omega|_p > 1$, $\forall p \in I$. Ceci provient du fait que, d'une part, l'ensemble $e_I Z[I]$ est dense dans V_I si $0 \notin I$, et d'autre part, de l'inégalité $|\omega - \omega_0|_p \leq \frac{1}{|u_1|_p}$.

3. Nombres α_I (0 appartient à I).

(a) Définition.

Un élément ω de V_I vérifiant $|\omega|_p > 1$, $\forall p \in I^-$, et $\omega_0 > 1$, est un élément de α_I s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} e_I,$$

où u_n est une suite d'éléments de $Z[I]$ déterminée par :

- la donnée de u_0 et u_1 vérifiant

$$|u_1|_p > |u_0|_p > 1, \quad \forall p \in I^- \quad \text{et} \quad u_1 > u_0 + \sqrt{2u_0};$$

- les relations (R)

$$\left| \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2} \right|_p \leq 1, \quad \forall p \in I^- \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2} < \frac{1}{2}.$$

(b) Les relations (R) et la donnée de u_0 et u_1 déterminent effectivement une suite d'éléments de $Z[I]$, et l'ensemble α_I est dénombrable.

Les relations (R) entraînent en effet que $u_{n+2} = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$, donc, u_0 et u_1 étant donnés, u_n est déterminée $\forall n$.

(c) Etude de la suite $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. - La démonstration comprend les étapes suivantes :

- $|u_n|_p$ est une suite croissante, $\forall p \in I^-$. La suite $\{u_n\}$ est également une suite croissante pour la valuation ordinaire. Pour démontrer ce dernier point, on cherche à quelles conditions sur a et b , la relation (H) $u_n \geq au_{n-1} + b$ avec a et $b > 0$, jointe à (R) entraîne $u_{n+1} \geq au_n + b$. On trouve la condition $u_1 \geq u_0 + \sqrt{2u_0}$ comme étant la meilleure permettant d'assurer la permanence

d'une telle relation $u_n \geq au_{n-1} + b$, $\forall n$ avec

$$a = 1 + \sqrt{\frac{1}{2u_0}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\frac{u_0}{2}}.$$

- La suite $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente dans V_I . On montre pour cela que ω_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, $\forall p \in I^-$ et dans $\mathbb{R}$.

- La suite $\frac{u_n}{\omega^n}$ a pour limite un élément λ de V_I . On a les inégalités

$$\left| \lambda - \frac{u_n}{\omega^n} \right|_p \leq p^{-t_p(n+2)},$$

en posant

$$\left| \frac{u_1}{u_0} \right|_p = p^{t_p}$$

et

$$|u_n - \lambda \omega_0^n| < \frac{1}{2(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 1 - \varepsilon)},$$

décomposition qui est surtout intéressante si $\omega_0 > 2$. En effet, dans ce cas $u_n = E(\lambda \omega^n)$.

(d) L'ensemble α_I est dense dans V_I pour $|\omega|_p > 1$, $\forall p \in I^-$ et $\omega_0 > 1$.

Ceci provient du fait que $\mathbb{Q} e_I$ est dense dans V_I et des inégalités

$$|\omega - \omega_0|_p \leq \frac{1}{|u_1|_p} \quad \text{et} \quad |\omega - \omega_0| < \frac{1}{u_1 - u_0}.$$

III. Méthode de Thue dans les adèles.

1. Méthode de Thue ; résultats dans le domaine réel.

La méthode de Thue pour montrer qu'un élément est algébrique, basée sur le principe des tiroirs, a été reprise par C. PISOT dans [5], et lui a permis d'énoncer le théorème suivant :

Soient α et λ deux nombres réels supérieurs à 1 ; posons

$$\lambda \alpha^n = u_n + \eta_n \quad \text{où} \quad u_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \leq \eta_n < \frac{1}{2}.$$

Si nous supposons que, $\forall n \geq 0$, on ait

$$|\eta_n| \leq \frac{1}{\eta} \quad \text{avec} \quad \eta \geq 2e\alpha(\alpha + 1)(1 + \log \lambda) ,$$

alors α et λ sont algébriques, et α est un nombre de Pisot ou de Salem.

2. Définition de l'ensemble S_I .

S_I est l'ensemble des éléments algébriques θ de V_I tels que $|\theta|_p > 1$, $\forall p \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme $A \in \mathbb{Z}[X]$ ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ;
- les racines de A dans Ω_p (clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$), distinctes de θ pour $p \in I$, appartiennent au disque $|X|_p \leq 1$, $\forall p \in P$.

Des sous-ensembles de S_I sont constitués par les ensembles $S_I^{p'}$ introduits par Françoise BERTRANDIAS dans [2], généralisant les ensembles S_q [6].

3. Méthode de Thue appliquée aux éléments de S_I dans le cas où θ n'appartient pas à I .

(a) Notations. - On considèrera $\theta \in V_I$, $\lambda \in V_I$. On posera

$$\begin{aligned} |\theta|_p &= p^{t_p}, & t_p &> 0 & \quad \forall p \in I, \\ |\lambda|_p &= p^{b_p}, & b_p &> 0 & \quad \forall p \in I; \end{aligned}$$

$$\prod_{p \in I} p^{t_p} = q \quad \prod_{p \in I} p^{b_p} = m.$$

On écrira la décomposition d'Artin

$$\lambda \theta^n = e_I E_I(\lambda \theta^n) + \varepsilon_I(\lambda \theta^n),$$

en posant $u_n = E_I(\lambda \theta^n)$, vérifiant $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$.

(b) Enoncé du théorème.

Soit θ un élément de V_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall p \in I$; s'il existe λ appartenant à V_I et vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall p \in I$, tel que dans la décomposition d'Artin

$$\lambda \theta^n = e_I u_n + \varepsilon_I(\lambda \theta^n)$$

on ait

$$|u_n| < \frac{1}{q^2 e(1 + \log m)} \quad \forall n \geq 0,$$

alors θ et λ sont algébriques, et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - On se propose de trouver des entiers rationnels $a_0, \dots, a_s$ tels que

$$V_n = a_0 u_n + \dots + a_s u_{n+s} = 0 \quad \forall n$$

avec $|a_i| \leq a$, $\forall i = 0, \dots, s$.

On désigne par $\frac{1}{U}$ une borne supérieure pour les u_n .

La démonstration comporte les étapes suivantes :

- Si $U > a(s+1)q$ et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall n$.

On utilise le fait que V_{n+1} étant un élément de $Z[I]$ si $V_{n+1} \prod_{p \in I} |V_{n+1}|_p < 1$, alors $V_{n+1} = 0$.

- On peut trouver, quel que soit l'entier $s \geq 1$, des entiers $a_0, \dots, a_s$ tels que $V_0 = 0$ dès que $a \geq qm^{1/s} - 1$ si $U > a(s+1)q$.

C'est cette partie de la démonstration qui utilise le principe des tiroirs : on dénombre en effet, compte tenu des majorations envisagées, le nombre de valeurs que peut prendre l'expression

$$V'_0 = A_0 |u_0| + \dots + A_s |u_s|$$

où les A_i prennent successivement toutes les valeurs $0, 1, \dots, a$. On a donc $(a+1)^{s+1}$ systèmes, si ce nombre est supérieur au nombre de valeurs que peut prendre l'expression V'_0 , deux expressions de V'_0 sont égales, et leurs coefficients sont distincts. On a donc une expression de V_0 nulle avec des coefficients non tous nuls.

Ceci est réalisé si

$$(a+1)^{s+1} \geq \frac{(s+1) a^s m}{U},$$

et a fortiori si $a+1 > qm^{1/s}$.

- En prenant pour s l'entier défini par $s-1 \leq \log m < s$, et pour a l'entier défini par $a < qm^{1/s} \leq a+1$, l'inégalité $U \geq q^2 e(1 + \log m)$ entraîne $U > a(s+1)q$.

Dans ces conditions, on peut trouver des entiers tels que $V_0 = 0$ réalisant $V_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente donc une fraction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

L'étude du polygone de Newton permet de dire que θ est racine dans V_I du polynôme P

$$P(z) = qz^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_0 = 0 ,$$

où $q = \prod_{p \in I} p^{t_p}$ et $|a_{s-1}|_p = 1$, $\forall p \in I$, et dont toutes les racines complexes sont intérieures au cercle unité ou sur le cercle unité, donc θ est algébrique et appartient à S_I .

D'autre part

$$\lambda = \frac{-\theta P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)} ,$$

λ appartient donc au corps de θ .

4. Méthode de Thue appliquée aux éléments de S_I dans le cas où θ appartient à I .

(a) Notations. - On considèrera $\theta \in V_I$, $\lambda \in V_I$. On posera

$$|\theta|_p = p^{t_p}, \quad t_p > 0, \quad \forall p \in I^- \quad \text{et} \quad \prod_{p \in I^-} p^{t_p} = q ,$$

$$|\lambda|_p = p^{b_p}, \quad b_p > 0, \quad \forall p \in I^- ,$$

$$\prod_{p \in I^-} p^{b_p} = m' \quad \text{et} \quad \lambda_0 \prod_{p \in I^-} p^{b_p} = m .$$

On écrira la décomposition d'Artin

$$\lambda \theta^n = e_I E(\lambda \theta^n) + \varepsilon_I(\lambda \theta^n) ,$$

en prenant $\varepsilon_0(\lambda \theta^n) = \varepsilon_0^{-1/2}(\lambda \theta^n)$ vérifiant $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_0(\lambda \theta^n) < \frac{1}{2}$.

(b) Enoncé du théorème.

Soit θ un élément de V_I vérifiant $|\theta|_p > 1$, $\forall p \in I^-$, et $\theta_0 > 1$;
s'il existe $\lambda \in V_I$ vérifiant $|\lambda|_p > 1$, $\forall p \in I^-$, et $\lambda_0 > 1$, tel que dans la décomposition d'Artin

$$\lambda \theta^n = e_I E(\lambda \theta^n) + \varepsilon_I(\lambda \theta^n)$$

on ait

$$\forall n \geq 0, \quad |\varepsilon_0(\lambda \theta^n)| < \frac{1}{2e q^2 \theta_0 (1 + \theta_0) (1 + \log m)} ,$$

alors θ et λ sont algébriques et $\theta \in S_I$.

(c) Démonstration. - Elle comporte les mêmes étapes que précédemment. Seules les majorations diffèrent ; on désigne par $\frac{1}{\psi}$ la borne supérieure de $\varepsilon_0(\lambda\theta^n)$.

- Si $\psi > (1 + \theta_0)(s + 1) a_q$ et si $V_0 = 0$, alors $V_n = 0$, $\forall n$.

- On peut trouver, quel que soit l'entier $s \geq 1$, des entiers $a_0, \dots, a_s$ tels que $V_0 = 0$, dès que $a \geq 2q\theta_0 m^{1/s} - 1$.

- En prenant s entier défini par $s - 1 \leq \log m < s$, et a entier défini par $a < 2q\theta_0 m^{1/s} \leq a + 1$, l'inégalité

$$\psi \geq 2e(1 + \theta_0)\theta_0 q^2(1 + \log m) \quad \text{entraîne} \quad \psi > (1 + \theta_0)(s + 1) a_q.$$

- θ est racine dans V_I d'un polynôme

$$P(z) = qz^s + a_{s-1} z^{s-1} + \dots + a_0$$

où $q = \prod_{p \in I^-} p^t$, et

$$|a_{s-1}|_p = 1 \quad \forall p \in I^-,$$

dont toutes les racines complexes sont intérieures au cercle unité sauf θ_0 , donc $\theta \in S_I$ et $\lambda = \frac{-\theta P(1/\theta)}{Q'(1/\theta)}$.

IV. Etude de l'ensemble S_I

1. I se réduit à un seul élément $\{p\}$.

Dans ce cas, S_I est l'ensemble $\mathcal{A}$ introduit par C. CHABAUTY [3].

Rappelons-en la définition :

Un élément θ de $\mathbb{Q}_p$ vérifiant $|\theta|_p > 1$ appartient à $\mathcal{A}$ s'il est racine d'une équation de la forme

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_{s-1} x + a_s = 0$$

(où les a_i sont des entiers rationnels, t un entier rationnel > 0), dont tous les zéros sont dans $|z| \leq 1$, dans $\mathbb{C}$, dans $|z|_p \leq 1$, dans Ω_p .

On notera $|\theta_i|$ les modules des racines de P dans $\mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $|\theta_i|_p$ les valeurs absolues p -adiques des conjugués de θ dans Ω_p , $i = 2, \dots, s$. CHABAUTY introduit les sous-ensembles

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\theta, \theta \in \mathcal{A}, |\theta_i|_p < 1 \text{ pour } i = 2, \dots, s\}, \\ \mathcal{C} &= \{\theta, \theta \in \mathcal{A}, |\theta_i|_p < 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, s\}, \\ \mathcal{O} &= \mathcal{B} \cap \mathcal{C}.\end{aligned}$$

L'étude des éléments de $\mathcal{B}$ n'appartenant pas à $\mathcal{O}$, et de $\mathcal{A}$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire tels que le polynôme P a effectivement une racine sur le cercle unité complexe, donc la racine imaginaire conjuguée (en supposant que la racine considérée est différente de ± 1 , ce qui serait sans intérêt) permet de constater dans ce cas que P se décompose sous la forme

$$P(x) = P_1(x) \Pi(x),$$

où $P_1(x)$ est un polynôme n'ayant aucune racine sur le cercle unité complexe, $\Pi(x)$ un polynôme réciproque dont toutes les racines complexes sont sur le cercle unité.

θ est racine de P_1 ou de Π , si θ est racine de P_1 , $\theta \in \mathcal{C}$ ou $\mathcal{O}$, ce qui permet de classer les éléments de $\mathcal{A}$ en deux ensembles que l'on appellera S_p et T_p , mettant en évidence l'analogie existant avec les nombres de Pisot et Salem.

Définitions.

On appellera S_p , ou plutôt S_p^0 suivant la notation de F. BERTRANDIAS, l'ensemble des éléments θ de $\mathcal{Q}_p$, $|\theta|_p > 1$, racine d'un polynôme de la forme

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_{s-1} x^{s-1} + a_s = 0,$$

où $|a_1|_p = 1$ (ce qui implique que tous les zéros de P sont intérieurs au cercle unité p -adique ou sur ce cercle, sauf θ) et dont tous les zéros complexes sont intérieurs au cercle unité.

On notera T_p l'ensemble des éléments θ de $\mathcal{Q}_p$, $|\theta|_p > 1$, racine d'un polynôme réciproque P :

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_1 x + p^t,$$

où $|a_1|_p = 1$, $t > 0$ (ce qui implique que P a un zéro extérieur au cercle unité dans $\mathcal{Q}_p$, soit θ , un zéro intérieur, et tous les autres zéros de P sont sur le cercle unité), et dont tous les zéros appartiennent au cercle unité dans $\mathcal{C}$.

D'après le résultat de CHABAUTY, S_p^0 est fermé.

L'analogie entre T_p et T est précisée par le théorème suivant :

THÉOREME. - Tout élément de S_p^0 est limite d'éléments de T_p .

La démonstration reprend la méthode introduite par R. SALEM [7].

On considère un élément θ de S_p^0 , zéro d'un polynôme

$$P(x) = p^t x^s + a_1 x^{s-1} + \dots + a_s,$$

et l'on forme la suite des polynômes

$$R_m(x) = x^m P(x) + Q(x).$$

On montre successivement les deux points suivants :

- θ_m zéro de R_m , vérifiant $|\theta_m|_p > 1$, appartient à T_p .

R_m est en effet un polynôme réciproque dont tous les zéros dans C sont sur le cercle unité.

Dans Ω_p , R_m a un zéro extérieur au cercle unité θ_m , un zéro intérieur $\frac{1}{\theta_m}$, tous les autres zéros sont sur le cercle unité.

- Dans Ω_p , on a $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = \theta$.

2. Cas général : I est un sous-ensemble fini de I .

Nous allons chercher à caractériser les éléments de S_I qui n'appartiennent à aucun des sous-ensembles $S_I^{p'}$, où $p' \in P$, c'est-à-dire tels que, $\forall p \in P$, il existe effectivement une racine de A sur $|x|_p = 1$.

Plus précisément, si nous associons à θ la partition (I_h) , $h = 1, \dots, m$, de I relative à l'élément algébrique θ (F. BERTRANDIAS [2], I, § 14), le polynôme minimal de θ , $P_{m_I}(\theta, X)$, polynôme unitaire, s'écrit par définition

$$P_{m_I}(\theta, X) = \prod_{h=1, \dots, m} P_{m_{I_h}}(\theta, X),$$

où les polynômes $P_{m_{I_h}}(\theta, X)$ sont des polynômes irréductibles et distincts deux à deux, et $P_{m_{I_h}}(\theta, X)$ a l'expression

$$P_{m_{I_h}}(\theta, X) q_h = A_h(x),$$

où A_h est un polynôme à coefficients entiers irréductible ayant pour racine θ_{I_h} dans V_{I_h} .

A s'écrit

$$A(x) = qx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = \prod A_h(x) ,$$

où $q = \prod_{p \in I} p^{t_p}$, $t_p > 0$, $|a_{n-1}|_p = 1$, $\forall p \in I$.

La décomposition $A(x) = \prod A_h(x)$ peut présenter deux aspects :

- $\exists$ un élément de la partition I_{h_0} pour lequel $\exists p \in P$ tel que les racines de $A_h(x)$ sont dans $|x|_p < 1$ (sauf $\theta_{I_{h_0}}$ si $p \in I_{h_0}$), alors

$$\theta_{I_{h_0}} \in S_{I_{h_0}}^P .$$

- $\forall h$, le polynôme $A_h(x)$ a au moins une racine sur le cercle unité dans Ω_p , $\forall p \in P$, en particulier pour o .

Nous laisserons le premier cas pour nous intéresser au second.

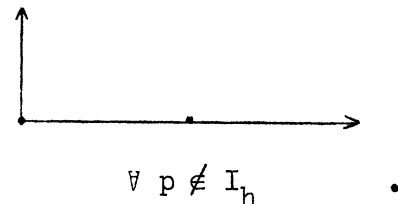
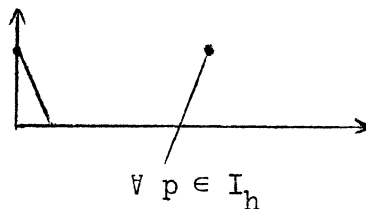
(a) $o \notin I_h$. - A_h a une racine sur le cercle unité, l'imaginaire conjugué de cette racine est également racine, A_h est réciproque et de la forme :

$$A_h(x) = q_h^{(0)} x^s + q_h^{(1)} x^{s-1} + \dots + q_h^{(1)} x + q_h^{(0)} ,$$

où

$$q_h^{(0)} = \prod_{p \in I_h} p^{t_p} \quad |q_h^{(1)}|_p = 1, \quad \forall p \in I_h .$$

Le polygone de Newton a la forme suivante :



(b) $o \in I_h$. - A_h est, dans ce cas, un polynôme réciproque dont une racine complexe est extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres sont sur le cercle unité.

Le polygone de Newton présente la même allure que précédemment.

Ces différentes remarques nous amènent donc à introduire un nouvel ensemble T_I .

Définition de T_I .

T_I est l'ensemble des éléments θ algébriques de V_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$,

$\forall p \in I$, et $\theta_0 > 1$ si $0 \in I$, et pour lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes :

- θ est racine de A dans V_I ;
- A est un polynôme réciproque de la forme

$$A(x) = qx^s + q_1 x^{s-1} + \dots + q_1 x + q ,$$

où $q = \prod_{p \in I^-} p^t$ et $|q_1|_p = 1$, $\forall p \in I^-$;

- les racines de A dans C sont toutes sur le cercle unité si $0 \notin I$.

A a dans C une racine θ_0 extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres racines sont sur le cercle unité si $0 \in I$.

Dans ces conditions, si $(I_h)_{h=1, \dots, m}$ est la partition de I relative à θ , et $A(x) = \prod A_h(x)$, la décomposition de A correspondante, tous les facteurs A_h sont réciproques, et toutes leurs racines complexes sont sur le cercle unité (à l'exception d'un polynôme A_h si $0 \in I$, qui a une racine intérieure au cercle unité, une extérieure, toutes les autres appartenant au cercle unité).

D'autre part, l'égalité

$$qx^s + q_1 x^{s-1} + \dots + q_1 x + q = \prod (q_h^{(0)} x^{s_h} + q_h^{(1)} x^{s_h-1} + \dots + q_h^{(1)} x + q_h^{(0)})$$

entraîne $q = \prod q_h^{(0)}$,

$$q^{(1)} = \sum_{h_j=1, \dots, m} (\prod q_{h_i}^{(0)}) q_{h_j}^{(1)} ,$$

et par conséquent $|q_{h_j}|_p = 1$; A_{h_j} a donc, dans Ω_p , pour $p \in I_{h_j}$, une racine extérieure au cercle unité, une intérieure ; toutes les autres sont sur le cercle unité.

Donc $\theta_{I_{h_j}} \notin S_{I_{h_j}}^{p'}$ pour $p \in I_{h_j}$. Si $p \notin I_{h_j}$, il est évident que $\theta_{I_{h_j}} \in S_{I_{h_j}}^{p'}$.

Le théorème suivant permet de préciser l'analogie entre les éléments introduits et les nombres de Pisot et de Salem.

THÉORÈME. - Tout élément de S_I^0 est limite d'éléments de T_I .

Démonstration. - Soit θ un élément de V_I appartenant à S_I^0 , racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[z]$:

$$P(z) = qz^s + q_1 z^{s-1} + \dots + q_s ,$$

où

$$q = \prod_{p \in I^-} p^t \quad \text{et} \quad |q_1|_p = 1, \quad \forall p \in I^-,$$

dont les racines complexes sont dans $|z| < 1$ (sauf θ_0 si $p \in I$).

Formons $R_m(z) = z^m P(z) + Q(z)$ qui est un polynôme réciproque.

(a) $R_m(z)$ a une racine $\theta_m \in T_I$. - $R_m(z)$ a, pour $p \in I^-$, une racine $\theta_{m,p}$ extérieure à $|z|_p = 1$, une racine intérieure; toutes ses autres racines sont sur le cercle unité.

Pour $p \notin I$, $R_m(z)$ a toutes ses racines sur $|z|_p = 1$.

Dans $\mathbb{C}$, si $0 \notin I$, on montre que $R_m(z)$ a $m + s$ racines sur le cercle unité.

Si $0 \in I$, une démonstration analogue à la démonstration de R. SALEM permet de conclure que R_m a une racine intérieure au cercle unité, une racine extérieure; toutes les autres racines appartiennent au cercle unité.

θ_m est donc un élément de T_I .

(b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = \theta$, élément de S_I^0 . - On montre les deux points suivants :

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{m,p} = \theta_p$, $\forall p \in I^-$.

La démonstration est analogue au cas où I se réduit à un seul élément.

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_{m,0} = \theta_0$, si $0 \in I$.

La démonstration est analogue à celle de R. SALEM.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).
- [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.
- [4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup., Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.
- [5] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946-1947, p. 153-160.
- [6] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.
- [7] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.