Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paul M. Cohn

Sur une classe d'anneaux héréditaires

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 7, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
19e année, 1965/66, n° 7

10 janvier 1966

SUR UNE CLASSE D'ANNEAUX HÉRÉDITAIRES

par Paul M. COHN

1. - Aujourd'hui il est à la mode de classifier les anneaux en exprimant combien les modules s'écartent des modules projectifs. C'est la dimension homologique, notée $D(R)$ (entendu par rapport aux modules à droite). Le cas $D(R) = 0$ est bien connu : ce sont les anneaux semi-simples. Le cas suivant $D(R) \leqslant 1$, est moins bien connu ; il porte un nom, quand-même : ce sont les anneaux héréditaires, ou bihéréditaires, quand les dimensions à gauche comme à droite sont au plus égales à 1 .

Cette classification est satisfaisante seulement si on regarde les modules projectifs comme entièrement connus, ce qui est loin d'être vrai. Donc on est conduit à un deuxième principe de classification : par la complexité des modules projectifs. Le cas le plus simple est celui où les projectifs sont libres. Cela indique à peu près la classe d'anneaux qui va nous occuper. Mais il faut encore une précision : même si tout projectif est libre, il peut arriver que des modules libres de rangs différents soient isomorphes. Si cela n'arrive jamais, on dit que l'anneau a la propriété de la base invariante (PBI).

2. - Les anneaux à considérer se définissent comme suit :

(a) Ils ont la PBI ;

(b) Tout idéal à droite est libre ;

(c) Tout idéal à gauche est libre.

Un tel anneau se nomme anneau à idéaux libres (AIL).

D'abord, notons qu'il n'y a pas de diviseurs de zéro. Si $a \in R$, alors

$$aR \cong R/N ,$$

où N est annulateur à droite de a dans R . Comme aR est libre, on a :

$$R = N \oplus C , \qquad C \cong aR .$$

Ici N et C sont des idéaux à droite, donc libres, et une comparaison des rangs donne $N = 0$ ou $C = 0$.

Regardons le cas commutatif : un AIL commutatif n'est autre qu'un anneau principal. Car si A est un idéal quelconque, libre, à base a_1 , a_2 , ... , alors si

$A \neq a_1 R$, on a $a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$, d'où une contradiction.

Visiblement tout anneau principal, même non-commutatif, est AIL. Cela nous donne, par exemple, l'anneau des quaternions entiers, ou encore l'anneau d'opérateurs différentiels. De plus, il existe de nombreux exemples d'AIL qui ne sont pas principaux [5] :

(i) Les algèbres associatives libres sur un corps (à un nombre quelconque de générateurs) ;

(ii) Les algèbres de groupes libres sur un corps ;

(iii) Les produits libres de corps gauches (sur un corps donné).

3. - Certaines propriétés d'anneaux principaux continuent d'être vraies pour des AIL. Par exemple : Tout AIL est factoriel.

Définissons le sens de cette phrase. Soit R un anneau sans diviseur de zéro. Etant donné $c \in R$, $c \neq 0$, on associe à chaque factorisation $c = a_1 \dots a_r$ la chaîne des modules

$$R \supseteq a_1 R \supseteq a_1 a_2 R \supseteq \dots a_1 \dots a_r R ,$$

et ses quotients

$$R/a_1 R , \quad a_1 R/a_1 a_2 R \cong R/a_2 R , \dots , R/a_r R .$$

Deux factorisations de c sont dites <u>isomorphes</u> si elles ont même longueur et si leur quotients sont isomorphes (pas nécessairement dans le même ordre).

Maintenant on peut définir un anneau <u>factoriel</u> comme un anneau sans diviseur de zéro, dans lequel chaque élément différent de zéro ou d'une unité admet une factorisation complète (en facteurs extrémaux), et deux factorisations complètes d'un élément quelconque sont isomorphes (cf. [4]).

D'abord on note qu'on retombe sur la notion habituelle dans le cas commutatif. De plus, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Tout AIL est factoriel.</u>

<u>Démonstration.</u> - On considère le treillis (cR , R) des idéaux à droites entre cR et R . Si on peut montrer que les idéaux principaux forment un sous-treillis, on peut invoquer le théorème de Jordan-Hölder pour compléter la démonstration, car les idéaux principaux entre cR et R satisfont aux conditions de chaînes.

Nous avons à montrer : $aR \cap bR \neq 0$ implique $aR \cap bR$ et $aR + bR$ sont principaux. Formons la suite exacte

$$0 \longrightarrow aR \cap bR \xrightarrow{f} aR \oplus bR \xrightarrow{g} aR + bR \longrightarrow 0 ,$$

où comme d'habitude $mf = (m , m)$ et $(x , y)g = x - y$. Puisque $aR + bR$ est libre, la suite est scindée, donc

$$aR \oplus bR = (aR \cap bR) \oplus (aR + bR) ,$$

et une comparaison des rangs montre que $aR \cap bR$ et $aR + bR$ sont principaux.

4. - Revenons à la définition d'un anneau factoriel ; il y a deux traits qui la distinguent du cas commutatif : etant données deux factorisations complètes d'un élément de R ,

(1) $$c = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_r$$

on a, par hypothèse, une permutation $i \to i'$ de $(1 , \dots , r)$ telle que

(2) $$R/p_i R \cong R/q_{i'} R .$$

Mais

(i) p_i et $q_{i'}$ ne sont pas forcément associés, et en plus

(ii) en général on n'obtient pas c en rangeant les q dans l'ordre

$$q_{1'} , q_{2'} , \dots , q_{r'} .$$

On peut éviter ces phénomènes en imposant des conditions plus restrictives. Disons que R est <u>factoriel rigide</u>, si R est factoriel, et étant données deux factorisations complètes comme dans (1), on a

$$q_i = u_{i-1}^{-1} p_i u_i , \qquad u_i \text{ inversible}, \qquad u_0 = u_r = 1 .$$

Pour nous orienter, regardons le cas commutatif : il est facile à voir que ce sont des anneaux à valuation discrète (et des corps). Le cas suivant, pour nous, est celui des AIL. On a le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 2.- <u>Tout AIL factoriel rigide est un anneau local</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit a non-inversible dans R . Il suffit de montrer que $1 + a$ est inversible. Puisque R est factoriel, on a : $a = pc$, où p est extrémal. Alors on a l'identité :

$$(1 = pc)p = p(1 + cp) .$$

Si $1 + pc$ n'était pas inversible, on aurait, par rigidité, $1 + pc = pd$ pour un $d \in R$, donc $1 = p(d - c)$, ce qui contredit le fait que p n'est pas inversible.

Donc $1 + pc = 1 + a$ est inversible.

La plupart des exemples d'AIL connus ne sont pas rigides. Citons comme exemple d'anneau factoriel rigide l'anneau des séries formelles à un nombre quelconques d'indéterminées non-commutatives (sur un corps) (cf. [3]).

5. - On pourrait demander si la réciproque du théorème 2 est vraie : est-ce que tout AIL qui est anneau local est anneau factoriel rigide ? La réponse est affirmative, et on a le résultat plus fort que voici :

THÉORÈME 3. - Tout anneau local bihéréditaire est factoriel rigide.

Pour la démonstration, on utilise le résultat de KAPLANSKY [7], d'après lequel tout projectif sur un anneau local est libre. Remarquons que cela se déduit facilement du théorème de Krull-Schmidt dans la forme d'AZUMAYA [1]. Celle-ci montre que si $M = \Sigma \oplus M_1$ est somme directe et $\mathrm{End}\,(M_i)$ est un anneau local, alors chaque facteur direct de M est isomorphe à une somme directe de quelques-uns des M_i.

Comme R a évidemment la PBI, il est AIL. Soit $aR \cap bR \neq 0$, alors

$$aR + bR = dR \ , \quad a = da_0 \ , \quad b = db_0 \ , \quad a_0 u - b_0 v = 1 \ ,$$

donc a_0 ou b_0 est inversible et $aR \supseteq bR$ ou $bR \supseteq aR$.

Maintenant soit $c = p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_r$, alors $p_1 R \cap q_1 R \neq 0$ et comme p_1 et q_1 sont extrémaux, on a $p_1 R = q_1 R$. Il s'ensuit que $q_1 = p_1 u_1$, ou u_1 est inversible, d'où le résultat par récurrence.

Le théorème 3 nous permet d'obtenir des informations supplémentaires sur les anneaux locaux héréditaires. Par exemple, on peut montrer que le centre d'un anneau local bihéréditaire est un corps ou un anneau de valuation discrète, et dans ce dernier cas tout élément de R a la forme $c = p^k u$ (u inversible).

6. - Terminons par un exemple d'un anneau avec la PBI dont tout idéal à droite est libre, mais non à gauche.

Il est bien connu qu'une puissance directe infinie Z^N des entiers n'est plus libre (comme groupe abélien). Cela a été généralisé par S. CHASE [2], qui a montré que l'hypothèse : "R^N est projectif" est très restrictive. Par exemple, on peut déduire de ses résultats le lemme suivant.

LEMME. - Si R est factoriel, à PBI, et n'est pas un corps, alors R^N n'est pas projectif (pour la démonstration, voir [6]).

Soit k un corps avec un endomorphisme σ qui n'est pas surjectif, et prenons $R = K[[x , \sigma]]$, l'anneau des séries formelles $\sum x^n \alpha_n$ $(d_n \in k)$ avec la règle de commutation

$$\alpha x = x\alpha^\sigma .$$

Evidemment, R est un anneau local à idéal maximal xR . Tout idéal à droite est principal, parce que tout élément $\neq 0$ est de la forme $x^n u$ (u inversible) ; donc R est factoriel. Il reste à trouver un idéal à gauche qui n'est pas libre. Le lemme montre que R^N n'est pas projectif. Soit $\lambda \in k$, $\lambda \notin k^\sigma$, alors l'ensemble $\{x\lambda x\}$ $(n = 0 , 1 , \dots)$ est libre à gauche, et pour chaque suite d'éléments a_n de R , $\sum a_n x\lambda x^n$ est un élément de R . L'ensemble de ces éléments est un idéal isomorphe à R^N , et par conséquent n'est pas projectif.

Cela montre que les conditions (b) et (c) dans la définition de AIL sont indépendantes. Un autre exemple qui montre leur indépendance, ainsi qu'un exemple qui montre l'indépendance de (a), ont été donné par SKORNJAKOV [8].

Remarquons que l'exemple précédent nous donne un anneau local, noethérien à droite, sans diviseur de zéro, dont les dimensions à droite et à gauche sont différentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZUMAYA (G.). - Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remark-Schmidt's theorem, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 117-124.

[2] CHASE (S. U.). - On direct sums and products of modules, Pacific J. math., t. 12, 1962, p. 847-854.

[3] COHN (Paul M.). - Factorization in non-commutative power series rings, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 58, 1962, p. 452-464.

[4] COHN (Paul M.). - Non-commutative unique factorisation domains, Trans. Amer. math. Soc., t. 109, 1963, p. 313-331.

[5] COHN (Paul M.). - Free ideal rings, J. of Algebra, t. 1, 1964, p. 47-69.

[6] COHN (Paul M.). - Hereditary local rings, Nagoya math. J. (à paraître).

[7] KAPLANSKY (I.). - Projective modules, Ann. of Math. t. 68, 1958, p. 372-377.

[8] SKORNJAKOV (L. A.). - O Konovskikh Kol'tsakh, Algebra i Logika Seminar, 4, 1959, n° 3, p. 5-30.