

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MOHAMED AMARA

Ensembles fermés de nombres algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 6, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Mohamed AMARA

Nous nous proposons d'étudier les ensembles S_q des nombres algébriques réels, supérieurs à l'unité, introduits par Charles PISOT [7]. Nous rappellerons tout d'abord la définition de ces ensembles.

Définition. - Soit q un entier rationnel non nul. Nous désignerons par S_q un ensemble de nombres algébriques ayant les propriétés suivantes :

1° θ appartient à S_q si $\theta > 1$, et $\frac{1}{\theta}$ est le seul zéro situé dans $|z| \leq 1$ d'un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers tel que $Q(0) = q$.

2° Il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \quad |A(0)| \geq |q| \quad \text{et} \quad |A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Remarques.

1° On ne change pas θ en changeant $Q(z)$ en $-Q(z)$, ou $A(z)$ en $-A(z)$. Nous pouvons supposer que $q \geq 1$ et $A(0) \geq q$.

2° La définition de S_q n'implique pas que $Q(z)$ soit nécessairement irréductible ou primitif. Nous pouvons multiplier Q et A par un même entier, ce qui montre que $S_{q'} \subset S_q$ si q' divise q . En particulier, nous avons $S_1 \subset S_q$, où S_1 est identique à l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

Les ensembles S_q ont la propriété remarquable, établie par SALEM pour $q = 1$, et généralisée par C. PISOT [7], de former un ensemble fermé.

THÉOREME 1. - L'ensemble S_q est fermé.

Tout d'abord, pour tout θ de S_q , nous avons l'inégalité $\theta > 1 + \frac{1}{4q}$, d'où 1 ne peut être point limite de S_q .

La démonstration de ce théorème est basée sur les familles compactes de fractions rationnelles. A toute suite θ_v de S_q tendant vers un nombre fini θ , nous associons la famille des fractions rationnelles $\frac{A_v(z)}{Q_v(z)}$ servant à les définir. De cette famille, nous pouvons extraire une suite convergeant vers une fraction $\frac{A(z)}{Q(z)}$, admettant $\frac{1}{\theta}$ comme pôle, et vérifiant toutes les propriétés pour que θ appartienne à S_q . En considérant les développements de Taylor à l'origine des fonc-

tions $\frac{A_v(z)}{Q_v(z)}$ et $\frac{A(z)}{Q(z)}$:

$$\frac{A_v(z)}{Q_v(z)} \equiv u_{0,v} + \dots + u_{n,v} z^n + \dots$$

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv u_0 + \dots + u_n z^n + \dots$$

Nous savons que les coefficients $u_{n,v}$, pour n fixé, sont égaux à partir d'un certain rang à leur limite u_n , ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{A_v(z)}{Q_v(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} \equiv z^{M(v)} \frac{K_v(z)}{Q \cdot Q_v},$$

ou encore

$$(1) \quad A_v(z) Q(z) - A(z) Q_v(z) \equiv z^{M(v)} K_v(z),$$

$M(v)$ tendant vers l'infini avec v , et $K_v(z)$ désignant un polynôme à coefficients entiers, soit en particulier $|K_v(0)| \geq 1$. La relation (1) nous permet de caractériser l'ensemble dérivé S'_q , et d'établir quelques propriétés des ensembles dérivés successifs $S_q^{(n)}$. SALEM a montré que les $S_1^{(n)}$ ne sont pas vides, il en sera de même pour les $S_q^{(n)}$, $q \geq 1$.

THÉOREME 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément θ fini de S_q appartienne à l'ensemble S'_q est qu'il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers, avec $A(0) \geq q$, et tel que, sur $|z| = 1$,

$$|A(z)| \leq |Q(z)|,$$

l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

La condition nécessaire s'établit en appliquant le théorème de Rouché au premier membre de (1) et en tenant compte du fait que $M(v)$ tend vers l'infini avec v .

Pour la réciproque, nous construisons une suite θ_v de S_q admettant θ comme limite. Pour cela, nous formons la famille :

$$\varphi_v(z) \equiv \frac{A(z) + \varepsilon z^{v+h} P(z)}{Q(z) + \varepsilon z^{v+s} B(z)}; \quad \varepsilon = \pm 1,$$

P et B désignant respectivement les polynômes réciproques de Q et A , s et h les degrés respectifs de Q et A .

$\varphi_v(z)$ admet d'après sa formation exactement un pôle $\frac{1}{\theta_v}$ dans $|z| < 1$ et

vérifie $|\varphi_v(z)| = 1$ sur $|z| = 1$. Nous avons ainsi construit une suite θ_v de S_q , et θ sera limite de cette suite, soit à droite soit à gauche suivant que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

La relation (1) nous permet aussi d'établir :

LEMME 1. - Soit une suite θ_v de S_q tendant vers le nombre fini θ . Une suite extraite de la famille des $\frac{A_v(z)}{Q_v(z)}$ tendra vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$, et pour cette suite partielle nous avons :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left| \frac{A(z)}{Q(z)} \right|^2 \frac{dz}{z} \leq \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left| \frac{A_v(z)}{Q_v(z)} \right|^2 \frac{dz}{z} - \frac{1}{(q\theta)^4}.$$

Du lemme 1, et par une démonstration par récurrence, nous tirons le théorème suivant :

THÉOREME 3. - Si un nombre θ appartient à l'ensemble dérivé $S_q^{(n)}$, il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que $A(0) \geq q$ et que, sur $|z| = 1$, on ait $|A(z)| \leq |Q(z)|$, la valeur moyenne de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ étant au plus égale à $1 - \frac{n}{(q\theta)^4}$.

COROLLAIRE. - Le plus petit élément de l'ensemble $S_q^{(n)}$ est supérieur à $\frac{n^{1/4}}{q}$, et par conséquent augmente indéfiniment avec n .

Il n'existe donc pas de dérivé d'ordre transfini de S_q .

A. Recherche des éléments d'accumulation de S_q .

Nous rappelons en premier lieu les résultats obtenus pour S_1 .

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)}$ la fraction rationnelle définissant un élément de S_1' . L'étude de l'équation $A(z) - Q(z) \equiv z u(z)$, $u(0) = 1$, a permis à MM. DUFRESNOY et PISOT [2] de déterminer le plus petit élément de S_1 , à savoir $\alpha_1 = 1,6180339\dots$, zéro du polynôme $1 + z - z^2$. De plus, par une autre méthode ne faisant appel qu'au "problème des coefficients", ils ont montré dans [3] que l'ensemble des éléments de S_1' inférieurs à 1,8 contient, outre α_1 , le nombre $\alpha_2 = 1,7548776\dots$, zéro du polynôme $1 - z + 2z^2 - z^3$. Par une méthode analogue, Mme GRANDET [6] a montré que 2 est le plus petit élément de S_1' . Elle n'a pas obtenu tous les éléments de S_1' inférieurs à 2, mais toutefois elle a signalé parmi ceux-ci les nombres β_n , zéros des polynômes :

$$\frac{1 - z^{n+1}(2 - z)}{1 - z}, \quad n \geq 1.$$

L'utilisation simultanée des deux méthodes indiquées, et principalement la première, va nous permettre de déterminer tous les éléments de S'_q inférieurs au nombre θ^* , zéro du polynôme $q - 1 + (q - 1)z - (q - 3)z^2 - qz^3$.

En plus de la suite des β_n signalée par Mme GRANDET, l'ensemble des éléments de S'_1 inférieurs à $\theta^* = 2$, contient la suite des α_n , zéros des polynômes :

$$1 - z + z^n(2 - z), \quad n \geq 1.$$

Le nombre 2 est le seul point d'accumulation des nombres α_n et β_n , lesquels vérifient :

$$\alpha_1 = \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1} < \dots < 2.$$

Les éléments de S'_q ($q \geq 2$) inférieurs à θ^* font partie de la suite des $\alpha_{1,q}$, zéros des polynômes :

$$q - 1 + z - qz^2 + z^n(q - 1 + 2z - z^2), \quad n \geq 1,$$

et les nombres $\alpha_{n,q}$ inférieurs à θ^* correspondent à $n \leq 3$, soit

$$\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^*.$$

MM. DUFRESNOY et PISOT dans [4] et [5] ont montré que la recherche des plus petits éléments de S_q et S'_q est intimement liée au "problème des coefficients" d'une fonction méromorphe dans $|z| \leq 1$ et vérifiant $|f(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$.

Soit $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle associée à un élément θ de S_q . Nous dirons que $f(z)$ est de rang infini si $A(z) \equiv \varepsilon z^S Q(1/z)$, $\varepsilon = \pm 1$, de rang infini dans le cas contraire.

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$ le développement de Taylor de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ à l'origine. Nous le désignerons par :

$$\frac{A}{Q} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots).$$

Nous savons d'après [4] qu'il existe un polynôme $E_n(z)$, de degré n , avec $E_n(0) = 1$, tel que, si nous posons $D_n(z) \equiv -z^n E_n(1/z)$, le développement de $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ coïncide jusqu'à l'ordre $n - 1$ avec celui de $\frac{A(z)}{Q(z)}$, soit :

$$\frac{D_n}{E_n} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_n, \dots),$$

w_n étant déterminé d'une manière unique. De même, si nous pouvons trouver un polynôme $E_n^*(z)$ de degré n , avec $E_n^*(0) = 1$, tel que si nous posons

$$D_n^*(z) \equiv z^n E_n^*(1/z),$$

le développement de $\frac{D_n^*}{E_n^*}$ s'écrit :

$$\frac{D_n^*}{E_n^*} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_n^*, \dots),$$

w_n^* étant déterminé d'une manière unique. Nous avons alors :

$$(2) \quad w_n \leq u_n \leq w_n^*,$$

l'une des égalités entraînant celle de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ avec $\frac{D_n(z)}{E_n(z)}$ ou $\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)}$; s'il n'y a pas égalité, $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont chacun un zéro et un seul τ_n et τ_n^* dans $|z| \geq 1$ tels que

$$1 \leq \tau_n < \theta < \tau_n^*;$$

si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang infini, les coefficients u_n vérifient des inégalités plus fortes, à savoir :

$$(3) \quad w_n + \frac{1}{q^2} \leq u_n \leq w_n^* - \frac{1}{q^2}, \quad n \geq r.$$

Signalons la relation de récurrence vérifiée par les $D_n(z)$:

$$(4) \quad D_{n+2}(z) \equiv (1+z) D_n(z) - z \cdot \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} D_n(z), \quad n \geq 1.$$

Puisque nous nous intéressons aux éléments de S_q inférieurs à θ^* , de (4) nous tirons :

$$(5) \quad u_{n+1} - w_{n+1} < \frac{1 + \theta^*}{\theta^*} \frac{D_{n+1}(\theta^*)}{D_n(\theta^*)} (u_n - w_n), \quad n \geq 1.$$

Des propriétés des polynômes D_n et de la relation (5), nous déduisons le lemme suivant :

Des propriétés des polynômes D_n et de la relation (5), nous déduisons le lemme suivant :

LEMME 2. - Les fractions rationnelles associées aux éléments de S_q inférieurs à θ^* admettent l'un des développements suivants :

$$(6) \quad (1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots, u_n, \dots) .$$

$$(7) \quad (1, \frac{1}{q}, u_2, \dots, u_n, \dots) \quad 2 \leq q^2 u_2 \leq 3 .$$

$$(8) \quad (1, 2, \dots, u_n, \dots) \quad \text{uniquement pour } q = 1 .$$

Remarque 1. - Les développements (6) déterminent d'une manière unique la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, à savoir :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2) + \varepsilon z^n(q + z - qz^2)}{q - z - qz^2 + \varepsilon qz^n(1 - z^2)} , \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ ou } 0 , \quad \text{et } n \geq 1 .$$

Nous obtenons deux suites admettant pour point d'accumulation $\theta^{(q)}$, zéro du polynôme $q + z - qz^2$. Si $q = 1$, $\theta^{(q)} = \alpha_1$ et, pour $q \geq 2$, $\theta^* < \theta^{(q)}$.

Remarque 2. - Le développement (7) montre qu'il existe un polynôme $u_1(z)$ à coefficients entiers avec $u_1(0) = 1$ et tel que

$$(9) \quad A - Q = z u_1(z) .$$

De plus, si $q^2 u_2 = 3$, il existe un polynôme $u_3(z)$ à coefficients entiers avec $u_3(0) = 1$ et tel que

$$(10) \quad \begin{cases} qE_3 A - qD_3 Q \equiv z^3 u_3(z) \\ qD_3 \equiv q + (q-2)z - (q-3)z^2 - qz^3 . \end{cases}$$

C'est ici qu'intervient le choix de θ^* . θ^* est déterminé de manière que

$$q^2(u_3 - w_3) < 2 .$$

Or il est facile de voir que c'est un entier, et comme (3) sera vraie pour $n \geq 3$, il s'ensuit que

$$q^2(u_3 - w_3) = 1 ,$$

d'où (10).

Remarque 3. - Pour les développements (7), d'après (6), nous avons :

$$0 \leq u_n - w_n \leq 2 \quad \text{pour } n \geq 2 ,$$

$$(1 - z) D_n \equiv 1 - 2z^n + z^{n+1} .$$

Si $\frac{A}{Q}$ est de rang infini, nous devons avoir :

$$1 \leq u_n - w_n \leq 2 \quad \text{pour } n \geq 2 .$$

Si pour tout n , $u_n - w_n = 2$, le développement de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ coïncide avec celui de $\frac{1}{1-2z}$, d'où $\theta = 2$. Par suite, pour les éléments de S'_1 inférieurs à 2, il existe un indice n tel que $u_n - w_n = 1$, d'où :

$$(11) \quad AE_n - QD_n \equiv z^n u_n(z), \quad u_n(0) = 1 .$$

Dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini, il existe un indice n tel que $u_n - w_n = 0$, d'où :

$$\begin{aligned} (1 - z) Q &\equiv 1 - 2z^n + z^{n+1} , \\ (1 - z) A &\equiv 1 - 2z + z^{n+1} . \end{aligned}$$

Nous remarquons que notre étude va se ramener à celle de l'équation

$$(12) \quad A_n(z) - Q_n(z) \equiv z^n u_n(z), \quad u_n(0) = 1 .$$

$A_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers tels que

$$|A_n(z)| \leq |Q_n(z)| \quad \text{sur } |z| = 1 ,$$

l'égalité ayant lieu en un nombre fini de points. De plus $Q_n(z)$ admet exactement n zéros dans $|z| < 1$.

Posons $P_n(z) \equiv \varepsilon_n z^{s_n} Q_n(1/z)$, ε_n choisi de manière que $P_n(0) > 1$.

LEMME 3. - Le polynôme $u_n(z)$ admet tous ses zéros sur $|z| = 1$ et, de plus, distincts.

LEMME 4. - L'équation $Q_n(z) \pm z^m P_n(z) = 0$, où m désigne un entier positif, négatif ou nul, admet au moins $|m + s_n - 2n|$ racines distinctes sur $|z| = 1$.

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle associée à un élément θ de S'_q , $\theta < \theta^*$. Par suite, $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang infini. Posons :

$$P(z) \equiv \varepsilon z^s Q(1/z) \quad \text{et} \quad B(z) \equiv \varepsilon' z^h A(1/z) ,$$

s et h désignant respectivement les degrés de Q et A , ε et ε' étant choisis de manière que $P(0)$ et $B(0)$ soient positifs.

1. Etude des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv (1, 2, \dots)$.

Nous supposons que $\frac{B}{Q}$ admet aussi le développement (8). Le cas où $\frac{B}{Q}$ admet le développement (7) sera étudié ultérieurement. Les polynômes A, B, Q vérifient :

$$(13) \quad AE_{n_1} - QD_{n_1} \equiv z^{n_1} u_{n_1}(z), \quad u_{n_1}(0) = 1,$$

$$(14) \quad BE_{n_2} - QD_{n_2} \equiv z^{n_2} v_{n_2}(z), \quad v_{n_2}(0) = 1,$$

$$\text{avec } (1-z) D_{n_i} \equiv 1 - 2z^{n_i} + z^{n_i+1}.$$

Nous distinguons trois cas :

(a) $h > s$. - L'application des lemmes 3 et 4 aux équations (13) et (14) et à celles qui s'en déduisent, par le changement de z en $\frac{1}{z}$, nous donne en premier lieu $n_1 = n_2$ et ensuite $A \equiv B$. Compte tenu de cette égalité, nous obtenons :

$$A[E_n^2 - z^{2n}] \equiv Q[E_n - D_n + z^n],$$

soit

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z^2}{1 - 2z} \quad \text{et} \quad \theta = 2.$$

(b) $h < s$. - Comme dans le cas précédent, nous montrons tout d'abord que $A \equiv B$. De là nous déduisons $s - h = 2$ et $\varepsilon \varepsilon' = 1$. Le résultat final s'écrit :

$$A[E_n^2 - z^{2(n+1)}] \equiv Q[E_n D_n + z^n],$$

ou encore :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z^n}{1 - z(2 - z^{n+1})}, \quad n \geq 2,$$

d'où la suite des β_n ($n \geq 2$).

(c) $h = s$. - Il n'existe aucune fraction rationnelle de rang infini, admettant le développement (8) et possédant un pôle supérieur à $\frac{1}{2}$.

2. Etude des $\frac{A(z)}{Q(z)} = (1, \frac{1}{q}, u_2, \dots, u_n, \dots)$.

Les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ vérifient alors la relation (9) :

$$A - Q \equiv z u_1(z).$$

Le développement de $\frac{B}{Q}$ est supposé quelconque. Nous avons seulement l'hypothèse que $B(0) \leq q$. Si $q = 1$, $\frac{B}{Q}$ admettrait l'un des développements (7) ou (9).

(a) $h > s$. - L'application des lemmes (3) et (4) à l'équation (9) et à celle qui s'en déduit, par le changement de z en $\frac{1}{z}$, nous affirme que :

$$q = 1 \quad \text{et} \quad u_3 = 3.$$

Mais alors les polynômes A et Q vérifient de plus (10), et de l'étude de (10) nous déduisons le résultat :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z} \quad \text{et} \quad \theta = 2.$$

(b) $h < s$. - De la même manière que dans le cas précédent, nous obtenons tout d'abord $q = 1$ et $u_2 = 2$. Nous avons deux possibilités suivant que $\frac{B}{Q}$ admet les développements (7) ou (8).

$$- \frac{B}{Q} \equiv (1, 2, \dots).$$

En plus de (9), nous avons :

$$BE_n - QD_n \equiv z^n v_n(z), \quad v_n(0) = 1.$$

L'étude simultanée de ces deux relations nous donne :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z + z^n}{1 - 2z + z^n(1 - z)}, \quad n \geq 3,$$

d'où la suite des α_n ($n \geq 3$).

$$- \frac{B}{Q} \equiv (1, 1, \dots).$$

Tout d'abord nous montrons que $A \equiv B$, et le résultat s'écrit :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{1}{1 - z - z^2} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{Q} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z + z^2 - z^3},$$

d'où α_1 et α_2 .

(c) $h = s$. - Nous étudions tout d'abord le cas où $q^2 u_2 = 3$, cas où les polynômes A et Q vérifient les relations (9) et (10). Nous pouvons montrer que la seule fraction rationnelle associée aux éléments θ de S'_q , inférieurs à θ^* , est celle précisément qui définit le nombre θ^* :

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{q + (q-2)z - (q-2)z^2 - (q-1)z^2}{q + (q-3)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^2}.$$

Pour poursuivre la recherche des fractions rationnelles de développements

$$(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \dots),$$

nous établirons en premier lieu les lemmes suivants :

LEMME 5. - Le degré U_1 de $u_1(z)$ vérifie $U_1 \leq s - 2$. Si $U_1 = s - 2$, $B(0) = q - 1$ ou $B(0) = q = 1$. Pour $U_1 \leq s - 3$, $B(0) = 1$.

LEMME 6. - Il existe un polynôme $V_{n_1}(z)$ à coefficients entiers ou $V_{n_1}(0) = 1$ tel que

$$Q_1 + \varepsilon_1 z B(z) \equiv V_{n_1}(z) [q - z - qz^2 - \varepsilon_2 qz^{n_1}(1 - z^2)],$$

avec $\varepsilon_1 = -1$ pour $U_1 = s - 2$, et $\varepsilon_1 = +1$ pour $U_1 \leq s - 3$.

La démonstration du lemme 6 est basée sur la transformation :

$$f_1(z) \equiv \frac{A + \varepsilon_1 zP}{Q + \varepsilon_1 zB} \equiv (1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots).$$

De la remarque 1 du lemme 2, le résultat s'ensuit.

- Etude du cas $U_1 = s - 2$ et $B(0) = q = 1$. - Dans ce cas, les polynômes Q et P vérifient la relation $P - Q \equiv 2zu_1$, d'où $\frac{P}{Q} \equiv (1, 2, 4, \dots)$ et, d'après la remarque 3 du lemme 2,

$$(1 - z) Q(z) \equiv 1 - 2z^n + z^{n+1}, \quad n \geq 2.$$

D'où la suite des β_n ($n \geq 2$) et la famille des fractions rationnelles associées:

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{(1 - z)(1 - z^n)}{1 - 2z + z^{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

- Etude du cas $U_1 = s - 2$ et $B(0) = q - 1$ ($q \geq 2$). - L'application du lemme 6 nous permet de montrer que les seuls éléments de S'_q inférieurs à θ^* font partie de la suite des $\alpha_{n,q}$ définis par les fractions :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q - z - (q - 1)z^2 + z^n(q - (q - 1)z^2)}{q - 2z - (q - 1)z^2 + z^n(q - z - (q - 1)z^2)},$$

à savoir $\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^*$.

- Etude du cas $U_1 \leq s - 3$. - Dans l'étude de ce cas, nous nous inspirerons de la démonstration utilisée par MM. DUFRESNOY et PISOT pour montrer que α_1 est

le plus petit élément de S'_1 . Nous utiliserons certains de leurs résultats qui restent valables pour $q \geq 1$, et nous établirons le théorème suivant :

THÉOREME 4. - Supposons qu'il existe deux polynômes à coefficients entiers V_{n_p} , avec $V_{n_p}(0) = 1$, et $Q_{n_p} \equiv q^{(p)} - z - q^{(p)} z^2 + \varepsilon_2 z^{n_p} q^{(p)} (1 - z^2)$, ($\varepsilon_2 = \pm 1$), tels que :

$$Q(z) + \varepsilon_1 z^p B(z) \equiv V_{n_p} Q_{n_p}.$$

Alors, nous avons :

$$U_1 \equiv V_{n_p} \equiv 1.$$

Nous savons, d'après le lemme 6, qu'il existe un polynôme V_{n_1} , $V_{n_1}(0) = 1$, tel que :

$$Q + zB \equiv V_{n_1} [q - z - qz^2 + \varepsilon_2 qz^{n_1} (1 - z^2)], \quad n_1 \geq 1.$$

Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème 4, d'où :

$$(14) \quad \begin{cases} A - Q \equiv z \\ Q + zB \equiv q - z - qz^2 - \varepsilon qz^{n-1} (1 - z^2), \end{cases} \quad n \geq 2.$$

- Cas où $q = 1$. - Alors $B(z)$ est identique à A . Nous déduisons la suite des α_n ($n \geq 2$) et la suite des fractions associées :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{(1 - z)(1 + z^n)}{1 - 2z + z^n(1 - z)}, \quad n \geq 2;$$

résultat valable pour $n \geq 1$, en ajoutant celui obtenu dans la remarque 1 du lemme 2.

- Cas où $q \geq 2$. - Pour $s \geq 4$, nous utilisons la transformation

$$\varphi(z) \equiv \frac{A - P}{Q - B}.$$

En tenant compte de (14), nous trouvons que :

$$\varphi \equiv (1, \frac{1}{q-1}, \frac{1}{(q-1)^2}, \dots).$$

Il existe donc un polynôme $V_n(z)$ tel que :

$$(15) \quad Q - B \equiv V_n [q - 1 - z - (q - 1)z^2 + \varepsilon_2 z^n (q - 1)(1 - z^2)],$$

et d'après le théorème 4, $V_n \equiv 1$.

Les relations (14) et (15) donnent alors :

$$Q(z) \equiv q - 2z - (q-1)z^2 - \varepsilon z^n(1-z),$$

et tout nombre θ de S_q , défini par $Q(z)$, sera supérieur à θ^* , cas à éliminer.

Pour $s = 3$, nous avons :

$$Q(z) \equiv q - 2z - qz^2 + z^3 \quad \text{ou} \quad q - 2z + q_2 z^2 - z^3,$$

et les nombres θ correspondants sont supérieurs à θ^* .

L'ensemble de nos résultats peuvent être résumés dans les théorèmes suivants :

THÉOREME 5. - Les éléments de S'_1 inférieurs à 2 sont les nombres α_n et β_n .
Le nombre 2 est le plus petit élément de S'_1 .

Remarque. - Pour tout élément α_n ($n \geq 3$), nous avons mis en évidence l'existence de trois polynômes $A(z)$. D'après le théorème 2, nous pouvons former six suites admettant α_n pour point d'accumulation. Pour tout β_n , nous ne pouvons former que quatre suites ayant β_n pour limite.

THÉOREME 6. - Les quatre plus petits éléments de S'_q sont respectivement $\alpha_{1,q}$, $\alpha_{2,q}$, $\alpha_{3,q}$, θ^* .

Pour ces éléments, il n'existe qu'un polynôme $A(z)$, alors que pour les éléments de S'_1 nous avons montré l'existence d'au moins deux polynômes $A(z)$. Cette différence vient du fait que la condition $A(0) \geq q$ est naturelle pour S_1 , alors que c'est une restriction pour $q \geq 2$.

B. Recherche des plus petits éléments de S_q .

Nous avons déjà déterminé le plus petit élément de S'_q , à savoir $\alpha_{1,q}$ défini par la fraction rationnelle :

$$\frac{A_1}{Q_1} \equiv \frac{q + (q-1)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^3}{q + (q-2)z - qz^2 - (q-1)z^3}$$

(et aussi $\frac{1-z^2}{1-z-z^2}$ pour $q = 1$). D'après le théorème 2, nous pouvons former les suites de S_q tendant vers $\alpha_{1,q}$ à droite et à gauche. Nous trouvons deux

suites θ_n et $\hat{\theta}_n$, respectivement zéros des polynômes P_n et $\hat{P}_n$:

$$(1 - z^2) P_n \equiv A_1 - z^{2n} P_1, \quad n \geq 1; \quad (1 - z) P_{2n+1} \equiv A_1 - z^{2n+1} P_1, \quad n \geq 0,$$

$$\hat{P}_{2n} \equiv A_1 + z^{2n} P_1, \quad n \geq 1; \quad (1 + z) \hat{P}_{2n+1} \equiv A_1 + z^{2n+1} P_1, \quad n \geq 0;$$

nous formons en plus les suites θ'_n et $\hat{\theta}'_n$, respectivement zéros de :

$$P'_n(z) \equiv q(1 - z^2) + z^n(q + z - qz^2), \quad n \geq 1,$$

$$\hat{P}'_n(z) \equiv q(1 - z^2) - z^n(q + z - qz^2), \quad n \geq 1.$$

Nous montrerons que la famille des éléments de S_q inférieurs à $\alpha_{1,q}$ contient, outre $\theta'_{n,1} \leq n \leq 4$ (tous les θ'_n pour $q = 1$), les nombres θ_n et un nombre particulier θ'' , zéro du polynôme :

$$P''(z) \equiv q - z - (q - 2)z^2 - z^3 + z^3[1 + (q - 2)z + 2z^2 - qz^3].$$

De plus, les nombres de S_q , qui sont supérieurs à $\alpha_{1,q}$, mais suffisamment voisins de $\alpha_{1,q}$, appartiennent à la famille des $\hat{\theta}_n$ (et des $\hat{\theta}'_n$ pour $q = 1$).

Les différents nombres mis en évidence vérifient les inégalités :

$$(q \geq 2) \quad \theta_1 = \theta'_1 < \theta'_2 < \theta'_3 < \theta_2 < \theta_3 < \theta^* < \theta'_4 < \theta_4 < \dots < \alpha_{1,q} < \dots < \hat{\theta}_{n+1} < \hat{\theta}_n < \dots.$$

La fraction rationnelle, définissant un élément $\theta < \hat{\theta}_1$, admet le développement :

$$(1, \frac{1}{q}, u_2, \dots) \quad 1 \leq q^2 u_2 \leq 2.$$

Les nombres correspondants à $q^2 u_2 = 1$ étant entièrement déterminés, nous nous intéressons aux fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ telles que :

$$(17) \quad \frac{A}{Q} \equiv (1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \dots, u_n, \dots).$$

Nous appliquons aux développements (17) les propriétés suivantes des polynômes D_n et D_n^* associés :

1° Lorsque $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont connus et que $s \geq n$ (dans le cas où $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s), nous déterminons $D_n(z)$. Nous en déduisons la valeur de w_n . Nous devons avoir $u_n \geq w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

2° Nous formons ensuite le polynôme $D_{n+1}(z)$ par la relation de récurrence (4). Nous devons avoir $D_{n+1}(1) \geq 0$, condition équivalente à $u_n \leq w_n^*$, l'égalité entraînant :

$$\theta = \tau_n^* \quad \text{et} \quad D_{n+1}(z) \equiv (1 - z) D_n^*(z).$$

Si les deux inégalités strictes, $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$, sont satisfaites, nous avons $s \geq n + 1$ dans le cas où $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s .

Nous associons aux développements (17), celui de $\frac{A_1(z)}{Q_1(z)}$:

$$(18) \quad \frac{A_1}{Q_1} \equiv (1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \dots, v_n, \dots) .$$

Soit N un entier tel que $u_n = v_n$ pour $n < N$ et $u_N \neq v_N$. Nous remarquons que $N \geq 3$. D'autre part, si $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s , nous avons $s \geq N$.

Nous devons distinguer deux cas, suivant que N est pair ou impair.

Avant d'entamer notre étude, signalons le résultat :

LEMME 7. - $k_N = q^2(u_N - v_N)$ est un entier rationnel. Il en est de même pour le nombre $k_{N+1} = q^2(u_{N+1} - v_{N+1}) - 4 \frac{k_N}{q}$.

Cas $N = 2p$. - Nous obtenons :

$$q(1+z) D_{2p}(z) \equiv P_{2p} + z \frac{p+2}{p+1} P_{2p-1} \quad \text{et} \quad w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2} \frac{p+2}{p+1} .$$

Les propriétés de D_{2p} et D_{2p+1} entraînent :

$$-\frac{p+2}{p+1} \leq k_{2p} = q^2(u_{2p} - v_{2p}) \leq \frac{p}{p-1} .$$

En nous limitant aux nombres $\theta < \hat{\theta}_1$, nous obtenons $k_{2p} < 2$. k_{2p} étant entier rationnel d'après le lemme 7, nous avons deux possibilités :

$$(a) \quad k_{2p} = 1 \quad \text{avec} \quad q D_{2p+1} \equiv \hat{P}_{2p-1} .$$

Les propriétés de D_{2p+1} et D_{2p+2} entraînent l'entier rationnel

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) - \frac{4}{q} ,$$

$$-2 \leq k_{2p+1} \leq -2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1} ,$$

$k_{2p+1} = -2$ donne $\theta = \hat{\theta}_{2p-1}$ et $k_{2p+1} \geq -1$, avec $p \leq 4$, $\theta > \hat{\theta}_7$, cas que nous pouvons éliminer en nous restreignant aux nombres $\theta < \hat{\theta}_7$.

$$(b) \quad k_{2p} = -1 \quad \text{avec} \quad q D_{2p+1} \equiv P_{2p-1} .$$

L'entier $k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q}$ vérifie :

$$2 \leq k_{2p+1} \leq 2 + \frac{2(2p-1)}{p^2 + p - 1},$$

$k_{2p+1} = 2$ donne $\theta = \theta_{2p-1}$ et $k_{2p+1} \geq 3$, avec $p = 2$, donne $\theta = \theta''$.

Cas $N = 2p + 1$. - Nous avons $q D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z)$ et $w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{1}{q}$.
L'entier $k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1})$ vérifie :

$$-1 \leq k_{2p+1} \leq 1 + \frac{2(p+1)}{p^2 + p - 1},$$

et comme nous nous limitons aux nombres $\theta < \hat{\theta}_7 < \hat{\theta}_4$, nous avons $k_{2p+1} < 2$.

$$(a) \quad k_{2p+1} = -1 \quad \text{donne} \quad \theta = \theta_{2p},$$

$$(b) \quad k_{2p+1} = 1 \quad \text{avec} \quad q(1+z) D_{2p+2}(z) \equiv \hat{P}_{2p} + \frac{2z}{p+2} P_{2p},$$

et l'entier $k_{2p+2} = q^2(u_{2p+2} - v_{2p+2}) - \frac{4}{q}$ vérifie :

$$-2 - \frac{4}{q} \leq k_{2p+2} \leq -2 + \frac{4}{q}.$$

Ces inégalités seront impossibles si nous nous limitons aux nombres $\theta < \hat{\theta}_{14}$.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - Les nombres $\theta < \hat{\theta}_{14}$ qui n'appartiennent pas aux familles des θ'_n
et $\hat{\theta}'_n$ sont les nombres θ_n , les nombres $\hat{\theta}_n$ ($n \geq 14$), et le nombre θ'' .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMARA (Mohamed). - Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1052-1054.
- [2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 105-133.
- [3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivées successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Paris, 2e série, t. 77, 1953, p. 129-136.
- [4] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.
- [5] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Paris, 2e série, t. 79, 1955, p. 54-64.

- [6] GRANDET-HUGO (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 92, 1965, p. 1-35.
 - [7] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.
 - [8] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.
 - [9] SIEGEL (Carl L.). - Algebraic integers whose conjugate lie in the unit circle, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 597-602.
-