MICHEL MENDÈS FRANCE

La répartition modulo 1 de la suite $x\theta^n$ et les ensembles de Cantor

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1964-1965), exp. nº 22, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 22

10 mai 1965

LA RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $x\theta^n$ ET LES ENSEMBLES DE CANTOR

par Michel MENDÈS FRANCE

Dans cet exposé, on rappelle les principaux résultats connus sur la répartition de la suite $x\theta^n$ modulo 1 , et on les complète par quelques remarques.

1. Les théorèmes de Weyl et Koksma.

Rappelons la définition d'une suite équirépartie modulo 1 . Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Si l'expression

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \operatorname{card}\{n \mid u_n \in I \pmod 1 ; n = 1 , 2 , \ldots , p\}$$

existe pour tout intervalle I de $[0 , 1]$, et si elle est égale à la mesure de I , on dit que la suite u est équirépartie modulo 1 ([1] , [2]).

Une famille de suites particulièrement intéressantes est la famille des suites de la forme $(u_n) = (x\theta^n)$, où $x > 0$ et $\theta > 1$. Dès 1916, WEYL démontre que $\theta > 1$ étant fixé, la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tous les nombres x . Vingt ans plus tard, KOKSMA démontre que x étant positif fixé, la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tous les nombres $\theta > 1$ [2]. Depuis, ces résultats ont été précisés, et l'ensemble des couples (x , θ) , qui sont tels que la suite $(x\theta^n)$ n'est pas équirépartie modulo 1 , a donné lieu à de nombreux travaux. ERDÖS et TAYLOR établissent dans [3] que l'ensemble des x, pour lesquels la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie (non équirépartie modulo 1), a une dimension de Hausdorff égale à 1 . Dans une autre direction, PISOT et SALEM ont entrepris une étude détaillée des couples (x , θ) donnant lieu à une mauvaise répartition.

2. Nombres de Pisot-Vijayaraghavan (PV).

On appelle nombre PV un entier algébrique θ plus grand que 1 dont tous les conjugués autres que lui-même sont à l'intérieur du cercle unité ([7] , [8]). On désigne par S l'ensemble des nombres PV. Si x appartient au corps algébrique de θ , on montre facilement que la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie (elle a, en fait, un nombre fini de points d'accumulations). La réciproque est vraie sous la forme suivante : Si θ est un nombre algébrique plus grand que 1, et s'il existe un nombre $x \neq 0$, tel que la suite $(x\theta^n)$ n'ait qu'un nombre fini de points d'accumulations modulo 1, alors θ est un nombre PV et x appartient au corps algébrique de θ [8].

Dans [7], on donne la caractérisation suivante :

$$\theta \in S \iff \exists\, x \neq 0 \text{ tel que } \prod_{m=0}^{\infty} \cos x\theta^m$$

soit un produit infini convergent .

Il sera commode d'écrire l'implication précédente sous la forme équivalente :

$$(1) \qquad \theta \in S \iff \exists\, k \neq 0 \text{ entier tel que } \prod_{m=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m$$

soit un produit infini convergent .

3. L'ensemble de Cantor $C(\theta)$.

Certains des résultats précédents peuvent être complétés par l'introduction de l'ensemble de Cantor $C(\theta)$. Si θ est un nombre réel supérieur à 2 , $C(\theta)$ représente l'ensemble des nombres x de la forme :

$$x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\theta^n} ,$$

où ε_n est : soit 0 , soit 1 . Il est facile de voir que cet ensemble est un ensemble parfait de mesure nulle. La surjection, qui à l'élément $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ du groupe $\{(0), (1)\}^{\mathbb{N}} \sim (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ fait correspondre $x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\theta^n} \in C(\theta)$, permet de munir $C(\theta)$ d'une mesure positive μ (nécessairement singulière), image de la mesure de Haar sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

Appelons alors $\mathcal{P}(\theta)$ la propriété suivante : " μ-presque tous les x sont tels que la suite $(x\theta^n)$ est équirépartie modulo 1 ".

On démontre alors le résultat suivant [5] :

THÉORÈME 1. - *Soit* $\theta > 2$.

(1) *Si pour tout entier* $k \neq 0$, *la série*

$$\Sigma = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

converge, alors $\mathcal{P}(\theta)$ *a lieu*.

(2) La série Σ converge pour presque tous les $\theta > 1$, de sorte que $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie pour presque tous les $\theta > 2$.

D'après la caractérisation (1) de l'ensemble S , il est bien évident que si $\theta \in S$, alors la série Σ diverge pour un entier $k \neq 0$ au moins. Le théorème précédent ne nous donne donc aucun renseignement lorsque $\theta \in S$. Une étude particulière s'impose donc.

On montre alors le résultat suivant [5] :

THÉORÈME 2. - Si $\theta > 2$ et $\theta \in S$, alors la propriété $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu. Plus précisément, μ-presque tous les x sont tels que la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie.

On peut se demander si, sous les hypothèses du théorème, il existe des nombres $x \in C(\theta)$ tels que la suite $(x\theta^n)$ soit équirépartie modulo 1 , ou si au contraire l'implication

$$" \; x \in C(\theta) \implies (x\theta^n) \text{ mal répartie } "$$

est vraie. Nous n'avons pas su résoudre ce problème dans le cas général. Cependant, si $\theta > 2$ est un nombre PV dont tous les conjugués sont à l'intérieur du cercle $|z| < \frac{1}{2}$, alors l'implication précédente a lieu. Ceci se produit en particulier si θ est une unité quadratique de S .

Signalons aussi un théorème qui découle immédiatement d'un résultat de SALEM et ZYGMUND [9] :

THÉORÈME 3. - Si $\theta > 2$ et $\theta \in S$, il existe alors un entier algébrique $\lambda \neq 0$ du corps de θ tel que, pour tout $x \in C(\theta)$, la suite $(\lambda x\theta^n)$ soit mal répartie.

Enfin, avant d'énoncer un dernier résultat, introduisons des notations : $[t]$ (resp. $\{t\}$) désigne la partie entière (resp. fractionnaire) du nombre réel t . $E(\theta)$ représente l'ensemble des nombres x de la forme

$$x = (\theta - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(n)\}]}{\theta^n}$$

où φ est un polynôme réel. On démontre que $E(\theta)$ est contenu dans $C(\theta)$, qu'il est dense dans $C(\theta)$, qu'il a la puissance du continu dans toute portion non vide de $C(\theta)$, et que sa dimension de Hausdorff est nulle.

THÉORÈME 4. - Si $\theta \in S$ et $x \in E(\theta)$, alors la suite $(x\theta^n)$ est mal répartie. De façon plus précise, l'adhérence $A(x)$ de l'ensemble des points $x\theta^n$, $n \in \mathbb{N}$, a une dimension de Hausdorff nulle (voir [5]).

Ce théorème et les remarques qui précèdent constituent une généralisation des résultats obtenus dans [6].

Remarque. - On sait que l'ensemble des x, pour lesquels la suite $(x\lambda_n)$, $(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant q > 1)$, n'est pas équirépartie modulo 1, a la puissance du continu sur chaque intervalle (voir [4] par exemple). Le théorème 4 précise ce résultat dans le cas $\lambda_n = \theta^n$, $\theta \in S$, en ce sens qu'il permet de construire effectivement un ensemble de points x, ayant la puissance du continu sur chaque intervalle et tel que $(x\theta^n)$ soit mal répartie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[2] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.

[3] ERDÖS (P.) and TAYLOR (S. J.). - On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 598-615.

[4] MÉLA (Jean-François). - Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres et points exceptionnel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964, p. 533-538.

[5] MENDÈS FRANCE (Michel). - Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 11, 9 p.

[6] MENDÈS FRANCE (Michel). - Un ensemble de nombres non normaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 18, 1964/65, n° 2, 6 p.

[7] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali Scuola di Pisa, t. 7, 1938, p. 205-248.

[8] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.

[9] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Pjateckij-Šapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.