SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

ALFRED FOUQUES

a-idéaux, a-systèmes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1964-1965), exp. nº 9, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A8_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 9

18 janvier 1965

a-IDÉAUX, a-SYSTÈMES

par Alfred FOUQUES

Nous nous proposons de donner un ensemble d'axiomes permettant de prolonger au cas d'un demi-groupe non commutatif la théorie des x-idéaux de K. E. AUBERT [1]. Nous désignerons par D un demi-groupe multiplicatif, par $\mathcal{P}'(D)$ l'ensemble des complexes de D, par XY (ou $X.Y$) l'ensemble des xy, où $x \in X$ et $y \in Y$.

1. Définition des a-idéaux.

Nous appellerons " a-opération à gauche" (resp. à droite, bilatère) une application

$$f : X \in \mathcal{P}'(D) \to \overline{X} \in \mathcal{P}'(D)$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

(A1) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $X \subseteq \overline{X}$,

(A2) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $\forall Y \in \mathcal{P}'(D)$, $X \subseteq \overline{Y} \Longrightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$,

(gA3) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $D\overline{X} \subseteq \overline{X}$ (resp. (dA3) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $\overline{X}D \subseteq \overline{X}$),

(A3) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $D\overline{X} \cup \overline{X}D \subseteq \overline{X}$,

(A4) $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $\forall Y \in \mathcal{P}'(D)$, $\overline{X}\overline{Y} \subseteq \overline{XDY \cup XY}$.

$\overline{X}$ est le a-idéal engendré par X, X un générateur de $\overline{X}$. L'ensemble des a-idéaux définis par f constitue un a-système défini sur D.

Une a-opération est donc une application de fermeture.

Dans la suite, nous supposerons, à moins d'indication contraire, que Φ est un a-système à gauche défini sur D.

2. Structure de demi-treillis ou de treillis d'un a-système.

Nous définirons sur un a-système une relation d'ordre au moyen de l'inclusion des a-idéaux. Cette relation d'ordre définit sur le a-système Φ une structure de demi-treillis complet : l'union $\bigvee \overline{X}_i$, d'une famille non vide $(\overline{X}_i)_{i\in I}$ des a-idéaux étant le a-idéal $\overline{\bigcup X_i}$. Cet a-idéal est d'ailleurs égal à $\overline{\bigcup \overline{X}_i}$. Quand l'union portera sur une famille finie, elle sera appelée "somme", et notée $\sum_{i=1}^{n} \overline{X}_i$, ou encore $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots + \overline{X}_n$.

Si D contient un élément permis à droite, cet élément appartient à tout a-idéal, d'après (A3), et engendre un a-idéal, noté Ω, qui est contenu dans tout a-idéal, d'après (A2). Φ est alors muni d'une structure de treillis complet, la borne inférieure d'une famille non vide $(\overline{X}_i)_{i\in I}$ de a-idéaux étant leur intersection (au sens ensembliste).

3. Produit de deux a-idéaux.

Le produit de deux a-idéaux $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sera le a-idéal $\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$. Il sera noté $\overline{X}\circ\overline{Y}$. Compte tenu des axiomes choisis, $\overline{X}\circ\overline{Y}$ est égal au a-idéal $\overline{XDY} + \overline{XY}$.

La multiplication des a-idéaux est associative. Elle vérifie la propriété de distributivité générale par rapport à l'union. D'autre part, nous avons

$$\overline{X}\circ\overline{Y} \subseteq \overline{Y}\ ,\quad \forall\,\overline{X}\ ,\quad \forall\,\overline{Y}\ .$$

De plus

$$D\circ\overline{X} = \overline{DX}\ ,\quad \overline{X}\circ D = \overline{XD}\ ,\quad \forall\ X\ .$$

Si D contient un élément permis à droite, le a-idéal Ω, engendré par cet élément, est tel que

$$\Omega\circ\overline{X} = \overline{X}\circ\Omega = \Omega\ ,\quad \forall\ \overline{X}\ .$$

Si D contient un élément unité à gauche,

$$D\circ\overline{X} = \overline{DX} = \overline{X} = DX\ .$$

Si D contient un élément unité à droite,

$$\overline{X} \subseteq \overline{X}\circ D = \overline{XD}\ .$$

Si D contient un élément unité d'un côté (ou bilatère),

$$\overline{X}\circ\overline{Y} = \overline{XDY}\ .$$

De même, si D est commutatif, la multiplication se simplifie :

$$\overline{X}\circ\overline{Y} = \overline{XY}\ .$$

4. Résiduation.

Un a-système à gauche est un demi-groupe résidué à droite : étant donnés deux a-idéaux $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, la réunion (ensembliste) des a-idéaux $\overline{Z}$, tels que $\overline{Y}\circ\overline{Z} \subseteq \overline{X}$, est non vide (elle contient en particulier $\overline{X}$) et constitue un a-idéal, c'est le résiduel à droite $\overline{X} \mathbin{.\!\cdot} \overline{Y}$.

Par contre, un a-système à gauche n'est pas nécessairement un demi-groupe résidué à gauche : l'ensemble des $\overline{Z}$, tels que $\overline{Z}\circ\overline{Y} \subseteq \overline{X}$, peut être vide. Si cet ensemble n'est pas vide, la réunion de ces $\overline{Z}$ est un a-idéal qui est le résiduel à gauche $\overline{X} \;^{\bullet}\!. \overline{Y}$. Toutefois, si D contient un élément permis à droite, l'ensemble des $\overline{Z}$ précédents n'est pas vide puisqu'il contient au moins le a-idéal Ω, et le a-système est alors résidué à gauche.

Nous pouvons énoncer la condition suivante : Un a-système à gauche est résidué à gauche si, et seulement si, pour tout **couple** $\overline{X}$, $\overline{Y}$ de a-idéaux, il existe au moins un $x \in D$ tel que $x\overline{Y} \subseteq \overline{X}$. Cette condition étant vérifiée, $\overline{X} \;^{\bullet}\!. \overline{Y}$ est l'ensemble des $x \in D$ tels que $x\overline{Y} \subseteq \overline{X}$. Par contre, $\overline{X} \,.^{\bullet}\, \overline{Y}$, qui existe toujours, est seulement contenu dans l'ensemble des $x \in D$ tels que $\overline{Y}x \subseteq \overline{X}$, mais ne lui est pas nécessairement égal.

5. Exemples.

5.1. - L'application qui, à un complexe X d'un demi-groupe (resp. d'un anneau), associe l'idéal à gauche, au sens ordinaire dans un demi-groupe (resp. dans un anneau), est une a-opération à gauche.

5.2. - L'application qui, à un complexe X d'un demi-groupe (resp. d'un anneau), associe l'idéal bilatère au sens ordinaire dans un demi-groupe (resp. dans un anneau), est une a-opération à gauche, à droite, ou bilatère.

5.3. - Soit D un ensemble muni de deux lois partout définies, l'une notée multiplicativement, l'autre notée &, la multiplication étant associative et doublement distributive par rapport à la loi &. L'application qui, au complexe X de D, associe la partie stable pour la loi & engendrée par le complexe $X \cup DX$ est une a-opération à gauche.

Cas particuliers :

Si D est un groupoïde (pour une loi notée $\star$) avec élément idempotent a, en posant

$$xy = a \quad \text{et} \quad x \,\&\, y = x \star y \;, \quad \forall\, x \,,\, y \;,$$

le a-idéal $\overline{X}$ est la partie stable pour la loi du groupoïde engendrée par $X \cup \{a\}$.

Si D est un demi-groupe avec zéro, en posant

$$x \,\&\, y = 0 \;, \quad \forall\, x \quad \text{et} \quad \forall\, y \;,$$

$\overline{X}$ est l'idéal à gauche, au sens ordinaire, engendré par X, c'est-à-dire $X \cup DX$.

Si D est un groupe (pour une loi notée $\star$, l'élément neutre étant noté 0, l'inverse de a étant noté a^{-1}), en posant

$$\forall\, x \text{ et } y\,, \qquad xy = 0 \text{ et } x \,\&\, y = x \star y^{-1}\,,$$

$\overline{X}$ est le sous-groupe de D engendré par X . (Bien entendu, si D est considéré comme demi-groupe par rapport à la loi de groupe, le seul a-système que l'on puisse définir sur D est celui où $\overline{X} = D$, $\forall\, X$).

Si D est un anneau, en posant

$$x \,\&\, y = x - y\,, \quad \forall\, x \text{ et } y\,,$$

$\overline{X}$ est l'idéal à gauche, au sens ordinaire, engendré par X . Si D contient un élément unité, ou si D est de caractéristique 2 , on obtient le même a-système en prenant comme loi & l'addition.

Si la loi & est en plus associative, D est un demi-anneau (ALMEIDA COSTA), $\overline{X}$ est l'idéal à gauche, au sens idéal dans un demi-anneau, engendré par X .

Si D est un treillis distributif (où l'union et l'intersection sont notées respectivement $\vee$ et $\wedge$), en posant,

$$\forall\, x \text{ et } y\,, \qquad xy = x \wedge y \text{ et } x \,\&\, y = x \vee y\,,$$

$\overline{X}$ est l'idéal, au sens idéal dans un treillis, engendré par X .

5.4. - Soit Φ un a-système à gauche défini sur D , le a-idéal engendré par X étant noté $\overline{X}$. Soit $\overline{A}$ un a-idéal particulier de Φ tel que $\overline{A}D \subseteq \overline{A}$. L'application qui, au complexe X , associe le complexe $X_a = \overline{X} + \overline{A}$, est une a-opération à gauche.

5.5. - Sur le demi-groupe $D = \{a\,,\, b\,,\, c\}$, où la multiplication est donnée par le tableau ci-dessous

	a	b	c
a	a	b	a
b	a	b	b
c	a	b	c

nous pouvons définir une a-opération à gauche en prenant

$$\overline{X} = \begin{cases} \{a\} & \text{si } X = \{a\}\,, \\ \{a\,,\, b\} & \text{si } b \in X \text{ et } c \notin X\,, \\ D & \text{si } c \in X\,. \end{cases}$$

Le a-système obtenu n'est pas résidué à gauche . De plus, si $\overline{X} = \{a\}$, nous avons $\overline{X} \mathbin{.\!\cdot} \overline{X} = \overline{X}$, ce qui est strictement contenu dans l'ensemble des $x \in D$ tels que $\overline{X}x \subseteq \overline{X}$, car ce dernier ensemble est $\{a\,,\, c\}$.

6. Comparaison des a-systèmes.

Φ et Ψ étant deux a-systèmes (à gauche ou bilatères) définis sur D, Φ sera dit "plus fin" que Ψ si, $\forall X$, le a-idéal engendré par X dans Φ est contenu dans le a-idéal engendré par X dans Ψ, ou, ce qui revient au même, si tout a-idéal de Ψ est un a-idéal de Φ.

L'ensemble E des a-systèmes à gauche, que l'on peut définir sur D, ordonné par la relation " Φ est plus fin que Ψ " est un treillis complet.

Si $(\Phi_i)_{i\in I}$ est une famille de a-systèmes à gauche définis sur D, X_i étant le a-idéal engendré par X dans Φ_i, l'application $X \to \overline{X} = \bigcap_i X_i$ est une a-opération à gauche et le a-système qu'elle définit est le moins fin de tous les a-systèmes plus fins que tous les Φ_i. E est donc un $\cap$-demi-treillis complet. De plus, E contient un élément universel : le a-système dans lequel $\overline{X} = D$ pour tout complexe X. E est donc un treillis complet (cf. [3], p. 35).

7. a-système bilatère associé à un a-système à gauche.

Φ étant un a-système à gauche, l'application qui, au complexe X, associe le complexe $\overline{X} + \overline{X}\circ D$, est une a-opération bilatère, et le a-système qu'elle définit est le plus fin des a-systèmes bilatères moins fins que Φ. Ce a-système Ψ est le " a-système bilatère associé à Φ ".

Si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont deux a-idéaux de Ψ, leur somme et leur produit dans Ψ coïncident avec leur somme et leur produit dans Φ.

Si Φ est le a-système formé par les idéaux au sens ordinaire d'un demi-groupe (resp. d'un anneau), Ψ est alors le a-système formé par les idéaux bilatères au sens ordinaire du demi-groupe (resp. de l'anneau).

Si D contient un élément permis à droite et si τ est le a-système bilatère associé à Φ, Φ est alors une (τ)-algèbre de Lesieur et Croisot (cf. [4]).

8. a-systèmes de caractère fini.

Un a-système à gauche est dit de caractère fini si, $\forall X \in \mathcal{P}'(D)$, $\overline{X}$ est la réunion (au sens ensembliste) des $\overline{Y}$, où Y parcourt l'ensemble des parties finies non vides de X.

Les a-systèmes des exemples 5.1, 5.2, 5.3, 5.5 sont de caractère fini.

Comme propriétés des a-systèmes de caractère fini, nous pouvons citer :

a. Si Φ est de caractère fini et si x appartient à l'union d'une famille infinie $(\overline{X}_i)_{i\in I}$ de a-idéaux, il existe une sous-famille finie $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n\}$ telle que $x \in \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots + \overline{X}_n$.

b. L'ensemble des a-idéaux d'un a-système de caractère fini forme une famille $\cup$-inductive.

c. Si Φ est de caractère fini et si D possède un élément permis à droite, le treillis complet des a-idéaux est faiblement $\cap$-continu, autrement dit, si $(\overline{Y}_i)_{i\in I}$ est une chaîne croissante de a-idéaux,

$$\overline{X} \cap (\bigvee \overline{Y}_i) = \bigvee (\overline{X} \cap \overline{Y}_i) .$$

d. Il y a équivalence entre les trois conditions :

(CM) Tout ensemble non vide de a-idéaux contient au moins un élément maximal,

(CA) Toute chaîne strictement croissante de a-idéaux est finie,

(GF) et (CF) Tout a-idéal admet un générateur fini et le a-système est de caractère fini.

Les conditions (GF) et (CF) sont indépendantes. L'ensemble des idéaux d'un anneau non noethérien fournit un exemple de a-système vérifiant (CF), mais non (GF). D'autre part, soit D un ensemble infini d'éléments, soient 0 et a deux éléments distincts de D . Sur D nous pouvons définir une structure de demi-groupe en prenant comme loi

$$xy = 0 , \qquad \forall x \text{ et } \forall y ,$$

et nous pouvons définir un a-système en posant

$$\overline{X} = \begin{cases} X \cup \{0\} & \text{si } X \text{ est fini et si } a \notin X , \\ D & \text{si } X \text{ est infini ou si } a \in X . \end{cases}$$

Ce a-système vérifie (GF), mais non (CF).

De façon précise : Pour qu'un a-système, où tout a-idéal admet un générateur fini, soit de caractère fini, il faut et il suffit que de tout générateur d'un a-idéal on puisse extraire un générateur fini.

e. Si D contient un élément permis à droite, si Φ est un a-système distinct du a-système impropre (a-système dans lequel $\overline{X} = D$, $\forall X$), de caractère fini, si $\overline{A}$ est un a-idéal distinct de Ω admettant un générateur fini, tout a-idéal appartenant à l'ensemble Ψ des a-idéaux strictement contenus dans $\overline{A}$ est contenu dans un élément maximal de Ψ .

9. Comparaison avec la théorie de K. E. AUBERT.

K. E. AUBERT a défini dans le cas d'un demi-groupe commutatif (cf. [1], p. 1 ; [2], p. 1) la notion de x-idéaux en prenant les axiomes suivants :

$$(1) \quad A \subseteq A_x ,$$

$$(2) \quad A \subseteq B_x \implies A_x \subseteq B_x ,$$

$$(3') \quad A.B_x \subseteq B_x ,$$

$$(3'') \quad A.B_x \subseteq (AB)_x .$$

Le système d'axiomes proposé au § 1 ci-dessus est équivalent au système de K. E. AUBERT, dans le cas où D est un demi-groupe commutatif.

Dans le cas non commutatif, AUBERT a proposé (cf. [2], p. 1) de définir les x-idéaux à gauche en remplaçant l'axiome (3") par l'axiome

$$(g3'') \quad B_x A \subseteq (BA)_x .$$

Les notions de a-idéaux et de x-idéaux à gauche ne sont plus équivalentes. Par exemple, l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau non commutatif constitue un a-système à gauche (et un a-système à droite), mais ne constitue pas en général un x-système à gauche.

LESIEUR et CROISOT ont proposé ([5], p. 87), à la place de l'axiome (g3"), l'axiome plus faible

$$(A) \quad \overline{X}Y \subseteq \overline{XY} ,$$

mais alors certaines propriétés des a-idéaux ne sont plus nécessairement satisfaites. Par exemple, pour que la multiplication des idéaux (toujours définie par $\overline{X} \circ \overline{Y} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$) soit associative, il faut et il suffit que l'on ait en outre la condition

$$X\overline{Y} \subseteq \overline{XY} , \text{ si } Y = \overline{U}\,\overline{V} .$$

De même, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

a. La multiplication est distributive par rapport à l'union,

b. Le groupoïde formé par les idéaux est résidué à droite,

c. $\overline{X}\,\overline{Y} \subseteq \overline{XY}$, $\forall\ \overline{X}$ et $\forall\ Y$ de la forme $Y = \bigcup_i \overline{Y}_i$.

L'axiome (A4) semble donc être le plus propre à généraliser la théorie de K. E. AUBERT.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT (Karl E.). - Theory of x-ideals, Acta Mathematica, t. 107, 1962, p. 1-52.

[2] AUBERT (Karl E.). - Sur la théorie des x-idéaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, exposé n° 6, 9 p.

[3] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I., Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles] ; p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).