

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE KOSKAS

Applications de la théorie des hypertas, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 5,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A5_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES HYPERTAS, II.

par Maurice KOSKAS

Nous donnons dans cet exposé d'autres applications de la théorie des hypertas. Nous utilisons les notations déjà employées dans [4] et [5]. En particulier, D est un demi-groupe, $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ est le bi-hypertas qui lui est associé, (E, \mathcal{O}) est un hypertas, $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est un bi-hypertas.

1. Caractérisation des demi-groupes complètement simples sans zéro.

THÉORÈME 1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $(D, \mathcal{R}', \mathcal{L})$ est un bi-hypertas.
- (b) $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L}')$ est un bi-hypertas.
- (c) D est complètement simple sans zéro.
- (d) $ab = cd \implies \exists u \in D : b = ud, c = au.$

Démonstration.

(a) \iff (b). - $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L}')$ est en effet le bi-hypertas inverse de $(D, \mathcal{R}', \mathcal{L})$.

(a) \iff (d). - En effet si a, b sont deux éléments quelconques de D , l'égalité ${}_a\Gamma \circ \mathcal{O}_b = \mathcal{O}_b \circ {}_a\Gamma$ équivaut manifestement à la condition (d).

(c) \implies (d). - Ceci découle immédiatement de la représentation matricielle de Rees des demi-groupes complètement simples sans zéro [6].

(d) \implies (c). - Soient $a, b \in D$. De l'égalité $ab = ab$, il découle l'existence de $u \in D$ tel que $b = ub, a = au$. On a alors $b^2 = ub^2$; il existe donc $v \in D$ tel que $u = bv, b = vb^2$.

De même il existe $w \in D$ tel que $u = wa, a = a^2 w$.

D est donc inversif à gauche et à droite, et, par suite, est réunion de groupes, ceci en vertu d'un résultat de R. CROISOT [3].

On a d'autre part $a = au = abv$. D est donc simple sans zéro.

Un résultat classique [2] permet alors d'affirmer que D est complètement simple sans zéro.

COROLLAIRE. - Tout sous-demi-groupe unitaire D' d'un demi-groupe complètement simple sans zéro est complètement simple sans zéro.

En effet D' vérifie manifestement la condition (d) du précédent théorème.

2. Rappels de résultats.

Nous avons établi dans [4] les résultats suivants :

THÉORÈME 2. - Pour que E contienne un complexe \mathcal{O} -net minimal, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

(a) $\forall x \in E, \exists \mathcal{O} \in \mathcal{O} : \mathcal{O}(x) \neq \emptyset$.

(b) Tout \mathcal{O} -idéal de E , non vide, contient un \mathcal{O} -idéal minimal ⁽¹⁾.

Dans ces conditions le cardinal de tout complexe \mathcal{O} -net minimal est égal au nombre de \mathcal{O} -idéaux minimaux de E .

En appliquant ce théorème à l'hypertas (E, \mathcal{O}') , il vient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Pour que E contienne un complexe \mathcal{O} -générateur minimal, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées.

(a) $E = \mathcal{O}E$.

(b) Tout \mathcal{O} -idéal de E , distinct de E , est contenu dans un \mathcal{O} -idéal maximal ⁽¹⁾.

Dans ces conditions le cardinal de tout complexe \mathcal{O} -générateur minimal est égal au nombre de \mathcal{O} -idéaux maximaux de E .

3. Applications des théorèmes précédents.

(A). - Supposons D abélien et artinien ; D possède alors un complexe net minimal A (car tout idéal non vide contient un idéal minimal). De plus, D étant abélien, il possède au plus un idéal minimal. (Car l'intersection de deux idéaux non vides de D est un idéal non vide.) Il en résulte que A est réduit à un seul élément, autrement dit que D possède un élément net. Il est bien connu que D possède alors un sous-groupe comme idéal, c'est-à-dire est un homogroupe [7].

On a donc établi la proposition suivante (due à P. LEFEBVRE [8]).

PROPOSITION. - Tout demi-groupe abélien et artinien est un homogroupe.

⁽¹⁾ Rappelons que lorsqu'il n'existe pas de \mathcal{O} -idéaux propres, E est considéré à la fois comme un \mathcal{O} -idéal minimal et un \mathcal{O} -idéal maximal.

(G. THIERRIN [7] a montré directement qu'un demi-groupe abélien fini est un homogroupe.)

(B). - Demi-groupes simples. - Supposons que D soit simple, et que la famille F_g de ses idéaux à gauche minimaux soit non vide.

On sait [2] alors que tout idéal à gauche de D est réunion d'idéaux à gauche minimaux. Donc D possède un complexe net à gauche minimal A , de même cardinal que F_g .

D'autre part, si D n'est pas simple à gauche, les idéaux à gauche maximaux de D sont ceux qui sont réunion de tous les idéaux minimaux de D sauf de l'un d'eux. Il y a donc autant d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux, et l'intersection de ces derniers est vide ⁽²⁾.

En outre, il est clair que tout idéal à gauche de D , distinct de D , est contenu dans un idéal à gauche maximal. Puisque on a $D = D^2$, D possède un complexe générateur à gauche, minimal, équipotent à A .

Notons enfin qu'il découle tout de suite de la forme des idéaux à gauche de D que les treillis qu'ils constituent est booléen.

Nous résumons tous ces résultats dans la proposition suivante.

PROPOSITION. - Tout demi-groupe D simple, possédant un idéal à gauche minimal, contient un complexe net à gauche minimal et un complexe générateur à gauche minimal ; ces complexes sont équipotents.

En outre l'intersection des idéaux à gauche maximaux de D est vide ou égale à D , et le treillis des idéaux à gauche de D est booléen.

Nous allons maintenant établir un ensemble de réciproques de cette proposition, fournissant des caractérisations des demi-groupes simples.

PROPOSITION. - Si le treillis des idéaux à gauche de D est booléen, D est simple.

En effet, dans ce cas, le complémentaire d'un idéal à gauche principal est un idéal à gauche. On a donc :

$$x \in Dy \implies y \in Dx \cup \{x\} .$$

Par suite, tout idéal à gauche principal est minimal, D est réunion de ses

⁽²⁾ Si D était simple à gauche, cette intersection serait égale à D .

idéaux à gauche minimaux, donc est simple.

PROPOSITION. - Si l'intersection des idéaux à gauche maximaux de D est vide, D est simple.

Nous démontrons cette proposition en établissant deux lemmes sur les hypertas.

LEMME. - S'il existe des \mathcal{O} -idéaux propres, et si E est réunion de ses \mathcal{O} -idéaux minimaux, alors l'intersection des \mathcal{O} -idéaux maximaux de E est vide, et de plus E est réunion de ses \mathcal{O}' -idéaux minimaux.

Ce lemme est évident, car les \mathcal{O} -idéaux maximaux de E sont les ensembles qui sont réunion de tous les \mathcal{O} -idéaux minimaux de E sauf de l'un d'eux, et donc ont une intersection vide. De plus tout \mathcal{O}' -idéal minimal est le complémentaire d'un \mathcal{O} -idéal maximal.

En appliquant ce lemme à l'hypertas (E, \mathcal{O}') , on obtient le lemme suivant.

LEMME. - Si l'intersection des \mathcal{O} -idéaux maximaux de E est vide, E est réunion de ses \mathcal{O} -idéaux minimaux.

Ce lemme appliqué au tas (D, \mathcal{O}) entraîne que D est réunion de ses idéaux à gauche minimaux, donc est simple. C. Q. F. D.

4. Comparaison du cardinal de l'ensemble des \mathcal{O} -idéaux minimaux et du cardinal de l'ensemble des \mathcal{O} -idéaux maximaux.

Pour effectuer cette comparaison, supposons que E possède un complexe K , \mathcal{O} -net minimal, et un complexe G , \mathcal{O} -générateur minimal. Nous avons vu que le cardinal de K (resp. de G) est égal au cardinal de la famille des \mathcal{O} -idéaux minimaux (resp. maximaux). Il suffit donc de comparer $\text{card } K$ et $\text{card } G$.

Pour cela, remarquons que K et G sont des complexes \mathcal{O}' -nets. ((E, \mathcal{O}') est l'hypertas stable associé à (E, \mathcal{O}) .) Supposons un moment que, moyennant certaines hypothèses, on ait montré que K est \mathcal{O}' -net minimal ⁽³⁾. Dans ce cas, G contient un complexe \mathcal{O}' -net minimal, équipotent à K , et par la suite on a :

$$\text{card } K \leq \text{card } G .$$

En d'autres termes, il y a moins de \mathcal{O} -idéaux minimaux que de \mathcal{O} -idéaux maximaux.

⁽³⁾ Pour cela nous utiliserons le critère suivant :

Un complexe K de E , \mathcal{O} -net, est \mathcal{O} -net minimal si

$$x \in K, \quad \mathcal{O}(x) \cap K \neq \emptyset \implies \mathcal{O}(x) \cap K = \{x\} .$$

Le théorème suivant fournit une catégorie importante d'hypertas pour lesquels cette conclusion est valable.

THÉORÈME 4. - Si (E, \mathcal{O}) vérifie la condition notée (R)

$$x \in \mathcal{O}(u), y \in \mathcal{O}'(u) \implies \mathcal{O}x \cap \mathcal{O}y \neq \emptyset.$$

Alors tout complexe K , \mathcal{O} -net minimal, est aussi \mathcal{O}'' -net minimal.

Démonstration. - Il faut montrer que si $k, k' \in K$, $\varphi \in \mathcal{O}''$, et si $k \in \varphi(k')$, on a $k = k'$.

φ est composée d'applications appartenant à \mathcal{O} ou à \mathcal{O}' , c'est-à-dire d'applications de la forme $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}' \in \mathcal{O}'$.

Supposons que ces applications soient au nombre de n . On va faire une récurrence sur n .

$n = 1$. - On a $k \in \mathcal{O}(k')$ ou $k \in \mathcal{O}'(k')$, avec $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$; soit

$$k \in \mathcal{O}(k') \text{ ou } k' \in \mathcal{O}'(k).$$

Ces relations entraînent $k = k'$, puisque K est \mathcal{O} -net minimal.

On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante : si φ est composée de n applications appartenant à $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$, $k = k'$. Montrons que l'on a la même conclusion lorsque φ est composée de $n + 1$ applications appartenant à $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$.

Compte tenu de la relation $\mathcal{O}' \circ \mathcal{O}' = \mathcal{O}'$, deux cas peuvent se présenter :

$$\varphi = \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}; \quad \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 \in \mathcal{O}, \quad \varphi_4, \dots, \varphi_{n+1} \in \mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$$

ou bien

$$\varphi = \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}; \quad \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 \in \mathcal{O}, \quad \varphi_4, \dots, \varphi_{n+1} \in \mathcal{O} \cup \mathcal{O}'.$$

Ces deux cas se traitent de la même façon. Supposons, par exemple, le second réalisé. On a donc :

$$k \in \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}(k').$$

Il existe $x, y \in E$ tels que :

$$k \in \mathcal{O}_1(x), \quad y \in \mathcal{O}_2(x) \cap (\mathcal{O}_3 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1})(k').$$

En vertu de la condition (R) appliquée à k et y , il existe \mathcal{O} et $\mathcal{O}' \in \mathcal{O}$ tels que $\mathcal{O}(k) \cap \mathcal{O}'(y) \neq \emptyset$.

On a $k \in \vartheta \Gamma \circ \vartheta'(y)$, soit :

$$k \in \vartheta \Gamma \circ (\vartheta' \circ \vartheta_3) \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}(k') .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne $k = k'$.

C. Q. F. D.

Exemple d'hypertas vérifiant la condition (R) .

(a) Si (E, \mathcal{Q}) est un tas, et si \mathcal{Q} est un demi-groupe abélien, (E, \mathcal{Q}) vérifie la condition (R) .

(b) Même conclusion si E est réunion de ses \mathcal{Q} -idéaux minimaux et est tel que, pour tout $x \in E$, il existe $\vartheta \in \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{Q}(x) \neq \emptyset$.

Dans ce cas en effet, les relations $x \in \mathcal{Q}(u)$, $y \in \vartheta'(u)$ entraînent que x et y appartiennent à un même \mathcal{Q} -idéal minimal L . On a $L = \mathcal{Q}x$, donc y appartient à $\mathcal{Q}x$.

On peut maintenant appliquer le théorème précédent à l'hypertas (E, \mathcal{Q}') . Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Si (E, \mathcal{Q}) vérifie la condition notée (R')

$$\mathcal{Q}x \cap \mathcal{Q}y \neq \emptyset \implies \exists u \in E : x \in \mathcal{Q}u, y \in \mathcal{Q}u,$$

alors tout complexe G , \mathcal{Q} -générateur minimal est \mathcal{Q}' -net minimal.

La démonstration est évidente car (E, \mathcal{Q}) vérifie la condition (R) si et seulement si (E, \mathcal{Q}') vérifie la condition (R') .

Exemples d'hypertas vérifiant la condition (R') .

(a) Si (E, \mathcal{Q}) est injectif et surjectif, et si \mathcal{Q} est un demi-groupe abélien, (E, \mathcal{Q}) vérifie la condition (R') .

En effet (E, \mathcal{Q}') est alors un tas vérifiant la condition (R) .

(b) Même conclusion si E est réunion de ses \mathcal{Q} -idéaux minimaux et vérifie $E = \mathcal{Q}E$.

Dans ce cas, en effet, la relation $\mathcal{Q}x \cap \mathcal{Q}y \neq \emptyset$ entraîne que x et y appartiennent à un même idéal minimal L . Il existe d'autre part $u \in E$, tel que x appartient à $\mathcal{Q}u$. On a alors $L = \mathcal{Q}u$.

Applications des théorèmes 5 et 6.

Rappel. - Etant donnée une partie A de D , nous posons :

$$\mathcal{R}(A) = \{x \in D : x^n \in A \text{ pour un } n > 0\}$$

$$\text{si } n > 0, A^{(n)} = \{x \in D, \exists a \in A : x = a^n\}.$$

PROPOSITION - Si D possède un complexe A tel que $D = \mathcal{R}(A)$, minimal pour cette condition, et un complexe B tel que $D = \bigcup_{n>0} B^{(n)}$, minimal pour cette condition, on a :

$$\text{card } A \leq \text{card } B.$$

Démonstration. - Soit \mathcal{P} le demi-groupe abélien constitué par les applications de la forme $x \rightarrow x^n$ ($x \in D$, n entier > 0).

(D, \mathcal{P}) est un tas vérifiant la condition (R), A est \mathcal{P} -net minimal, B est \mathcal{P} -générateur minimal.

La proposition découle alors du théorème 5.

C. Q. F. D.

Soit maintenant un demi-hypergroupe H. Examinons quand l'hypertas (H, \mathcal{L}) vérifie les conditions (R) ou (R').

Il est immédiat que (H, \mathcal{L}) vérifie la condition (R) si et seulement si

$$x \in H * u, y \in H * u \implies H * x \cap H * y \neq \emptyset.$$

Cette condition est notée (R'_g) .

D'autre part, (H, \mathcal{L}) vérifie la condition (R') si et seulement si

$$H * x \cap H * y \neq \emptyset \implies \exists u \in H : x \in H * u, y \in H * u.$$

Cette condition est notée (R''_g) .

(Evidemment ces conditions sont également définies lorsque H est remplacé par D.)

Il découle alors des théorèmes 5 et 6 le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Supposons que H possède un complexe net à gauche minimal K, et un complexe générateur à gauche minimal G⁽⁴⁾.

(a) Si H vérifie la condition (R'_g) , on a

$$\text{card } K \leq \text{card } G;$$

⁽⁴⁾ Ceci est réalisé par exemple lorsque H est artinien et noethérien à gauche, et vérifie $H * H = H$.

il y a moins d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux.

(b) Si H vérifie la condition (R'_g) , on a

$$\text{card } G \leq \text{card } K ;$$

il y a moins d'idéaux à gauche maximaux que d'idéaux à gauche minimaux.

Nous allons maintenant examiner le cas où H est remplacé par D .

(a) Si D est simple et réunion de ses idéaux à gauche minimaux, il vérifie (R_g) et (R'_g) . On a vu plus haut que D possède un complexe net à gauche minimal, et un complexe générateur à gauche minimal.

On retrouve alors l'égalité déjà mentionné entre les cardinaux de ces complexes.

(b) Si D est abélien, il vérifie (R_g) . Mais dans un tel demi-groupe, il existe au plus un idéal minimal, et donc l'inégalité $\text{card } K \leq \text{card } G$ du théorème 5 est ici sans intérêt.

Toutefois, on peut affiner de la façon suivante l'étude :

D est dit quasi abélien à gauche si

$$\forall a, b, c \in D, \quad abc = bac .$$

Il est clair que D est quasi abélien à gauche si et seulement si le demi-groupe \mathcal{L} des translations à gauche est abélien ; dans ce cas le tas (D, \mathcal{L}) vérifie la condition (R_g) , et on peut lui appliquer le théorème 5.

Nous n'insistons pas.

(c) Rappelons une définition, due à P. DUBREIL [1].

D est dit réversible à gauche si

$$\forall x, y \in D, \quad Dx \cap Dy \neq \emptyset .$$

Evidemment un demi-groupe réversible à gauche vérifie (R_g) .

Voici deux exemples de demi-groupes réversibles à gauche.

Tout homogroupe est réversible à gauche. - En effet, supposons D un homogroupe, et soit e son élément unitif, c'est-à-dire l'élément neutre du groupe g , idéal de D . Soient $x, y \in D$. On a $ex \in g, ey \in g$.

Puisque g est un groupe, il existe $u \in g$, tel que $ex = uey$. Donc

$$Dx \cap Dy \neq \emptyset .$$

Tout demi-groupe réunion de groupes dont les idempotents commutent est réversible à gauche. - Soit D un tel demi-groupe, et soient $x, y \in D$. Il existe e, f

idempotents de D , $x', y' \in D$ tels que $e = x'x$, $f = y'y$. On a

$$fe = fx'x = ef = ey'y.$$

Donc $Dx \cap Dy \neq \emptyset$.

(d) Supposons que D soit une réunion de groupes dont les idempotents commutent, et de plus que, pour tous idempotents $e, f \in D$, il existe un idempotent $g \in D$ tel que $e = ge$, $f = gf$. (Ceci est par exemple réalisé lorsque l'ensemble des idempotents de E forme un treillis.)

Dans ce cas D vérifie non seulement la condition (R_g) , mais aussi la condition (R'_g) .

En effet soient $x, y \in D$. Il existe deux idempotents e et f tels que $x = xe$, $y = yf$. Il existe donc aussi un idempotent g tel que $e = eg$, $f = fg$. On a

$$x = xeg \in Dg, \quad y = yfg \in Dg.$$

De ce qui précède découle tout de suite le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - Supposons D globalement idempotent, artinien et noethérien à gauche (par exemple fini et vérifiant $D^2 = D$).

(a) Si D est réversible à gauche (en particulier si D est un homogroupe, ou une réunion de groupes dont les idempotents commutent), il y a moins d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux.

(b) Si D est réunion de groupes, que deux idempotents quelconques commutent et possèdent un diviseur commun, il y a autant d'idéaux à gauche minimaux que d'idéaux à gauche maximaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, n° 3, 52 p.).
- [2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [3] CROISOT (Robert). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 361-379.
- [4] KOSKAS (Maurice). - Les hypertas, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 10, 42 p.

- [5] KOSKAS (Maurice). - Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes, Séminaire Dubreil-Pisot, : Algèbre et Théorie des nombres, 17e année, 1963/64, n° 3, 22 p.
- [6] REES (D.). - On semi-groups, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.
- [7] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).
- [8] LEFEBVRE (P.). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math., Paris, 1962).
-