

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JULIEN QUERRÉ

Ordres maximaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 4, p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

30 novembre 1964

ORDRES MAXIMAUX

par Julien QUERRÉ

Introduction. - La notion d'ordre apparaît dans plusieurs théories.

1° Si K est un corps, tout anneau d'intégrité commutatif unitaire ayant K pour corps des fractions est dit ordre de K .

2° Plus généralement, si R est un ordre de K et Σ une algèbre de dimension finie sur K , on appelle réseau de Σ , tout R -sous-module de Σ , de type fini, qui engendre Σ . Tout anneau qui est réseau de Σ est dit ordre de Σ .

3° Le sous-semi-groupe des éléments entiers d'un groupe ordonné G est appelé cône positif ou ordre de G .

4° Un sous-ensemble S d'un monoïde D est appelé ordre d'Asano de D si :

- S forme un sous-monoïde de D avec élément unité ;
- D est un monoïde-quotient de S selon $D^* \cap S$ (D^* désignant l'ensemble de tous les éléments de D ayant un inverse) :

c'est-à-dire que, pour tout $x \in D$, il existe α et $\alpha' \in D^* \cap S$, tels que

$$\alpha x, x\alpha \in S.$$

Tous les ordres ainsi introduits ont la propriété commune d'intervenir comme élément d'un monoïde résidué vérifiant la condition $\alpha^2 \leq \alpha$. C'est ce qui va justifier l'exposé.

1. Monoïdes clos [3].

Soit G un monoïde résidué. On appellera ordre dans G , tout $m \in G$, tel que $m^2 \leq m$. Quel que soit $x \in G$, $x \cdot x$ et $x \cdot x$ sont des ordres, appelés respectivement ordres à droite et à gauche associés à x . Si $x \in G$, on posera :

$$x^{-1} = (x \cdot x) \cdot x.$$

Un monoïde résidué G sera dit totalement clos (ou α -nomal) si l'ensemble des ordres associés aux éléments de G admet un plus grand élément ε dit élément bimaximum de G ; ε est équirésiduel.

L'équivalence $x \equiv y \ (\alpha_\varepsilon)$, si, et seulement si, $\varepsilon : x = \varepsilon : y$, fournit pour la loi induite, un groupe-quotient G/α_ε homomorphe à G . Ce groupe est isomorphe à $G_\varepsilon = \{\varepsilon : x ; x \in G\}$ muni de la loi

$$(\varepsilon : x) \circ (\varepsilon : y) = \varepsilon : yx .$$

Un monoïde G totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit normalement clos (α -normalement fermé) si, quel que soit $x \in G$, on a

$$\varepsilon : (x \cdot \varepsilon) = \varepsilon : (x \cdot \varepsilon) = \varepsilon : x .$$

Enfin, un monoïde G totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit intégralement clos (α -totalement fermé) si tous les ordres associés sont égaux à ε .

Un monoïde résidué G sera dit B-totalement clos (β -nomal) s'il existe un élément β vérifiant la condition

$$\beta^{-1} = \beta \cdot \beta = \beta \cdot \beta$$

et tel que, pour tout $x \in G$,

$$\beta = x(\beta \cdot x) = (\beta \cdot x)x .$$

β est dit B-élément. Un B-élément s'il existe est unique, c'est un idempotent appartenant au centre de G .

Un monoïde G , B-totalement clos, dont β est le B-élément, sera dit B-normalement clos si, quel que soit $x \in G$, on a

$$(x \cdot x) \cdot \beta = (x \cdot x) \cdot \beta = \beta^{-1} .$$

Enfin, un monoïde intégralement clos, B-totalement clos, sera dit B-intégralement clos.

On montre qu'un monoïde résidué unitaire est un groupe ordonné si, et seulement si, l'élément neutre est B-élément.

2. Ordres maximaux.

Soit G un monoïde résidué. Un ordre de G sera dit maximal s'il n'existe aucun ordre plus grand. Un élément $x \in G$ sera dit normal si ses ordres associés sont maximaux.

Si un ordre ω est maximal, $\omega^2 \leq \omega$ implique $\omega \leq \omega \cdot \omega$ et $\omega \leq \omega \cdot \omega$; c'est donc un élément normal.

THÉOREME 2.1. - L'ensemble N des éléments normaux de G est un sous-monoïde résidué de G . Si ω est un ordre maximal, l'ensemble N_ω des éléments normaux de G , ayant ω pour ordre associé à droite et à gauche, est un sous-monoïde résidué de N .

Soient x, y appartenant à N .

$$\begin{cases} x \cdot x \leq xy \cdot xy \\ y \cdot y \leq xy \cdot xy \end{cases} \Rightarrow xy \in N$$

$$\begin{cases} x \cdot x \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \\ y \cdot y \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \in N.$$

De même, $x \cdot y \in N$.

Soient $N_\omega = \{x \in N ; x \cdot x = x \cdot x = \omega\}$, et x et y deux éléments de N_ω .

$$\begin{cases} \omega = x \cdot x \leq xy \cdot xy \\ \omega = y \cdot y \leq xy \cdot xy \end{cases} \Rightarrow xy \in N_\omega$$

$$\begin{cases} \omega = x \cdot x \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \\ \omega = y \cdot y \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \in N_\omega$$

$$\begin{cases} \omega = x \cdot x \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \\ \omega = y \cdot y \leq (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \in N_\omega.$$

N_ω est donc un monoïde intégralement clos d'élément bimaximum ω . L'ensemble

$$\Phi_\omega = \{x^{-1} ; x \in N_\omega\}$$

est donc un groupe pour la loi $x^{-1} \circ y^{-1} = (yx)^{-1}$. On dira que c'est le groupe associé à l'ordre maximal ω .

En particulier, $x \in \Phi_\omega$, si et seulement si $(x^{-1})^{-1} = x$.

Si ω et λ sont deux ordres maximaux distincts, il est immédiat que Φ_ω et Φ_λ sont disjoints. L'élément $f = \omega \cdot \lambda$ sera dit conducteur à gauche de l'ordre maximal λ par rapport à l'ordre maximal ω . On a

$$\begin{aligned} f \cdot f &= \lambda ; & f^{-1} \cdot f^{-1} &= \lambda \\ f \cdot f &= \omega ; & f^{-1} \cdot f^{-1} &= \omega \end{aligned} \quad f^{-1} = \omega \cdot f = \lambda \cdot f.$$

En particulier, ni f , ni f^{-1} , n'appartiennent à l'un des monoïdes N_ω et N_λ . Par contre, si $x \in G$, $y = fx f^{-1} \in N_\omega$ et $z = f^{-1} x f \in N_\lambda$. En effet,

$$\omega = f \cdot f \leq y \cdot y = fx f^{-1} \cdot fx f^{-1} \quad \text{d'où} \quad \omega = y \cdot y,$$

$$\omega = f^{-1} \cdot f^{-1} \leq y \cdot y = fx f^{-1} \cdot fx f^{-1} \quad \text{d'où} \quad \omega = y \cdot y.$$

THÉOREME 2.2. - Si ω et λ sont deux ordres maximaux distincts, leurs groupes associés Φ_λ et Φ_ω sont isomorphes.

(a) L'application de Φ_λ dans N_ω : $u \rightarrow \bar{u} = fu f^{-1}$ est injective.

$$\bar{u} = \bar{v} \implies fuf^{-1} = fvf^{-1},$$

d'où

$$\omega : fuf^{-1} = \omega : fvf^{-1},$$

soit

$$f^{-1} \cdot uf^{-1} = f^{-1} \cdot vf^{-1}.$$

Il vient alors

$$(f^{-1} \cdot uf^{-1}) \cdot f^{-1} = (f^{-1} \cdot vf^{-1}) \cdot f^{-1},$$

d'où

$$(f^{-1} \cdot f^{-1}) \cdot uf^{-1} = (f^{-1} \cdot f^{-1}) \cdot vf^{-1},$$

c'est-à-dire $\lambda \cdot uf^{-1} = \lambda \cdot vf^{-1}$, d'où

$$(\lambda \cdot u) \cdot f^{-1} = (\lambda \cdot v) \cdot f^{-1} \quad \text{et} \quad (f^{-1})^{-1} \cdot u = (f^{-1})^{-1} \cdot v,$$

soit

$$[(f^{-1})^{-1} \cdot u] \cdot f = [(f^{-1})^{-1} \cdot v] \cdot f,$$

d'où $\lambda : u = \lambda : v$, soit $u = v$, puisque u et v sont des fermés dans l'application $x \rightarrow \lambda \cdot (\lambda \cdot x)$.

(b) L'application $\varphi : \Phi_\lambda \rightarrow \Phi_\omega$ telle que $\varphi(u) = [(\bar{u})^{-1}]^{-1}$ est injective.

Remarquons que $\bar{u} \in N_\omega$ entraîne $(\bar{u})^{-1} \in \Phi_\omega$, puis $[(\bar{u})^{-1}]^{-1} \in \Phi_\omega$.

Soit $\varphi(u) = \varphi(v)$, d'où

$$[\varphi(u)]^{-1} = [\varphi(v)]^{-1}$$

et, puisque $(\bar{u})^{-1} \in \Phi_\omega$,

$$(\bar{u})^{-1} = (\bar{v})^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\omega : fuf^{-1} = \omega : fvf^{-1},$$

ce qui implique $u = v$, d'après (a).

(c) L'application φ est surjective.

Soient $v \in \Phi_\omega$, $w = f^{-1}vf \in N_\lambda$, et $u = (w^{-1})^{-1} \in \Phi_\lambda$, donc $u = \lambda \cdot (\lambda : f^{-1}vf)$.

$$f^{-1} \cdot u = (\lambda \cdot f) \cdot [\lambda \cdot (\lambda : f^{-1}vf)] = \{\lambda : [\lambda : (\lambda : f^{-1}vf)]\} \cdot f$$

$$f^{-1} \cdot u = (\lambda : f^{-1}vf) \cdot f = (\lambda \cdot f) \cdot f^{-1}vf = f^{-1} \cdot f^{-1}vf = \omega \cdot vf$$

$$f^{-1} \cdot uf^{-1} = \omega \cdot vff^{-1} = (\omega \cdot v) \cdot ff^{-1} = (\omega \cdot ff^{-1}) \cdot v = (f^{-1} \cdot f^{-1}) \cdot v = \omega \cdot v,$$

et

$$\omega : (f^{-1} \cdot uf^{-1}) = v.$$

Par ailleurs,

$$[(\bar{u})^{-1}]^{-1} = \omega : (\omega : \bar{u}) = \omega : (f^{-1} \cdot uf^{-1});$$

donc $v = [(\bar{u})^{-1}]^{-1}$, et v a donc pour antécédent $u = (w^{-1})^{-1}$.

(d) φ est un isomorphisme de groupe.

Notons $\star$ la multiplication dans Φ_λ , et $\circ$ la multiplication dans Φ_ω .

$$\varphi(u \star v) = \omega : [\omega : f(u \star v)f^{-1}],$$

or

$$\omega : f(u \star v)f^{-1} = [(\omega \cdot f) \cdot (u \star v)] \cdot f^{-1} = [f^{-1} \cdot (u \star v)] \cdot f^{-1} = [(\lambda \cdot f) \cdot (u \star v)] \cdot f^{-1},$$

d'où

$$\omega : f(u \star v)f^{-1} = [(\lambda \cdot uv) \cdot f] \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot uvf^{-1},$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) \circ \varphi(v) &= [\omega : (\omega : \bar{u})] \circ [\omega : (\omega : \bar{v})] = \omega : [(\omega : \bar{v}) \circ (\omega : \bar{u})] \\ &= \omega : (\omega : \bar{u}\bar{v}), \end{aligned}$$

$$\omega : \bar{u}\bar{v} = \omega : fuf^{-1}fvf^{-1} = [(\omega \cdot fuf^{-1}) \cdot f] \cdot vf^{-1},$$

$$\begin{aligned} (\omega \cdot fuf^{-1}) \cdot f &= (\omega \cdot f) \cdot fuf^{-1} = (f^{-1} \cdot f^{-1}) \cdot fu = \lambda \cdot fu \\ &= (\lambda \cdot u) \cdot f = (\lambda \cdot f) \cdot u = f^{-1} \cdot u, \end{aligned}$$

donc

$$\omega : \bar{u}\bar{v} = f^{-1} \cdot uvf^{-1},$$

d'où

$$\omega : \bar{u}\bar{v} = \omega : f(u \star v)f^{-1},$$

soit

$$\omega : (\omega : \bar{u}\bar{v}) = \omega : (\omega : f(u\star v)f^{-1}) ,$$

finalement

$$\varphi(u\star v) = \varphi(u) \circ \varphi(v) .$$

Remarque. - L'application de ce théorème au monoïde résidué des parties P_G d'un groupe serait sans intérêt, G étant évidemment un ordre maximal, s'il n'était pas possible d'introduire une notion d'ordre maximal plus forte.

On appellera ordre maximal propre S de P_G un élément tel que $S = S \cdot S = S \cdot S$ et qui n'est contenu dans aucun autre ordre que G .

Si S et U sont deux ordres maximaux propres de P_G dont le conducteur $F = S \cdot U$ n'est pas vide, alors le théorème précédent subsiste.

3. Sous-monoïdes résidués ou non d'un monoïde résidué et ayant une image homomorphe et isotone à un groupe.

Un monoïde ordonné ayant une image homomorphe et isotone à un groupe sera dit quasi-clos.

On appellera ordre- α d'un monoïde résidué G , un élément α tel que

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha = \alpha .$$

LEMME 3.1. - Si α est un ordre- α , tel que, pour tout $m \in G$, on a $\alpha m \cdot \alpha m \leq \alpha$ et $m \alpha \cdot m \alpha \leq \alpha$, alors α est équirésiduel.

$$\alpha m \cdot \alpha m \leq \alpha \implies (\alpha m \cdot m) \cdot \alpha m \leq \alpha \cdot m \implies \alpha \cdot \alpha m \leq \alpha \cdot m \text{ d'où } \alpha \cdot m \leq \alpha \cdot m .$$

De même,

$$m \alpha \cdot m \alpha \leq \alpha \implies (m \alpha \cdot m) \cdot m \alpha \leq \alpha \cdot m \implies \alpha \cdot m \alpha \leq \alpha \cdot m \implies \alpha \cdot m \leq \alpha \cdot m .$$

Si α est un ordre- α , notons D_α l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations

$$(\alpha \cdot x) \cdot (\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x) \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha .$$

D_α n'est pas vide, puisque $\alpha \in D_\alpha$.

LEMME 3.2. - Pour tout $x \in D_\alpha$, on a $\alpha \cdot x = \alpha \cdot x$.

$$(\alpha \cdot \alpha x) \cdot (\alpha \cdot \alpha x) = [(\alpha \cdot \alpha) \cdot x] \cdot [(\alpha \cdot \alpha) \cdot x] = \alpha \geq \alpha x \cdot \alpha x$$

$$(\alpha \cdot x \alpha) \cdot (\alpha \cdot x \alpha) = [(\alpha \cdot \alpha) \cdot x] \cdot [(\alpha \cdot \alpha) \cdot x] = \alpha \geq x \alpha \cdot x \alpha .$$

Le lemme 3.1 donne alors le résultat.

LEMME 3.3. - Si $x \in D_\alpha$, alors $\alpha : x \in D_\alpha$, et l'application $x \rightarrow \alpha : (\alpha : x)$ est une fermeture dans D_α .

$$\alpha = (\alpha : x) \cdot (\alpha : x) \leq [\alpha \cdot (\alpha : x)] \cdot [\alpha \cdot (\alpha : x)] \leq [\alpha \cdot (\alpha : x)] \cdot x = (\alpha : x) \cdot (\alpha : x) = \alpha$$

$$\alpha = (\alpha : x) \cdot (\alpha : x) \leq [\alpha \cdot (\alpha : x)] \cdot [\alpha \cdot (\alpha : x)] \leq [\alpha \cdot (\alpha : x)] \cdot x = (\alpha : x) \cdot (\alpha : x) = \alpha.$$

Donc, si $x \in D_\alpha$, il en est de même de $\alpha : x$, donc aussi de $\alpha : (\alpha : x)$, et l'application $x \rightarrow \alpha : (\alpha : x)$ dans D_α est la restriction de celle définie dans G .

LEMME 3.4. - D_α est un sous-monoïde de G .

Etablissons que, si $x \in D_\alpha$, $\alpha_{\alpha:x} = \alpha_\alpha$. Posons $y^* = \alpha : (\alpha : y)$, $y \in D_\alpha$, d'où

$$y^* \cdot y^* = y^* \cdot y^* = \alpha.$$

Donc,

$$\alpha_{y^*} \subseteq \alpha_{y^* \cdot y^*} = \alpha_\alpha;$$

mais,

$$\alpha_\alpha \subseteq \alpha_{\alpha:(\alpha:y)} = \alpha_{y^*},$$

d'où

$$\alpha_{y^*} = \alpha_\alpha.$$

En particulier, si $y = \alpha : x$, on a

$$\alpha_{y^*} = \alpha_\alpha = \alpha_{\alpha:x},$$

car $y^* = y$.

$\alpha_{\alpha:x} = \alpha_\alpha$ entraîne $\alpha : (\alpha : x') = (\alpha : x) : [(\alpha : x) : x']$; si $x' \in D_\alpha$, on a

$$\alpha = (\alpha : x') : (\alpha : x') = \{(\alpha : x) : [\alpha : xx']\} : x' = (\alpha : xx') : (\alpha : xx').$$

Donc $x, x' \in D_\alpha \implies xx' \in D_\alpha$.

THÉOREME 3.1. - Il y a bijection entre l'ensemble des ordres- α et l'ensemble des sous-monoïdes quasi-clos maximaux de G .

Soient α un ordre- α , et D_α le sous-monoïde précédemment défini qui lui est associé. Les lemmes précédents et les théorèmes 10, 12, 13 de [1] permettent d'affirmer que D_α est quasi-clos. L'homomorphisme isotone est ici la fermeture $x \rightarrow \alpha : (\alpha : x)$, et on peut prendre pour groupe-image $\bar{\Phi}_\alpha = \{\alpha : x ; x \in D_\alpha\}$ muni de la loi $(\alpha : x) \circ (\alpha : y) = \alpha : yx$.

Remarque. - Si D_α est résidué, c'est alors un monoïde totalement clos, d'élément bimaximum α .

Soient α un ordre- α , et Γ_α l'ensemble des $x \in D_\alpha$ vérifiant les relations

$$\alpha \cdot (x \cdot \alpha) = \alpha \cdot (x \cdot \alpha) = \alpha : x ;$$

Γ_α n'est pas vide, puisque $\alpha \in \Gamma_\alpha$.

Evidemment, si $x \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \cdot x = \alpha \cdot x$. De plus,

$$\alpha(x \cdot \alpha) \cdot \alpha(x \cdot \alpha) \leq [\alpha \cdot \alpha(x \cdot \alpha)] \cdot [\alpha \cdot \alpha(x \cdot \alpha)] = \alpha$$

$$(x \cdot \alpha)\alpha \cdot (x \cdot \alpha)\alpha \leq [\alpha \cdot (x \cdot \alpha)\alpha] \cdot [\alpha \cdot (x \cdot \alpha)\alpha] = \alpha ,$$

donc, selon le lemme 3.2,

$$\alpha \cdot (x \cdot \alpha) = \alpha \cdot (x \cdot \alpha) .$$

On aurait de même

$$\alpha \cdot (x \cdot \alpha) = \alpha \cdot (x \cdot \alpha) .$$

LEMME 3.5. - Si $x \in \Gamma_\alpha$, alors $\alpha : x \in \Gamma_\alpha$, et l'application $x \rightarrow \alpha : (x)$ est une fermeture dans Γ_α .

Si $x \in \Gamma_\alpha$, $\alpha \in D_\alpha$ et $\alpha : x \in D_\alpha$ d'après le lemme 3.3. De plus,

$$\alpha \cdot [(\alpha : x) \cdot \alpha] = \alpha \cdot [(\alpha : \alpha) \cdot x] = \alpha \cdot (\alpha : x)$$

$$\alpha \cdot [(\alpha : x) \cdot \alpha] = \alpha \cdot [(\alpha : \alpha) \cdot x] = \alpha \cdot (\alpha : x) .$$

Donc, $\alpha : x \in \Gamma_\alpha$, et aussi $\alpha : (\alpha : x)$, et l'application $x \rightarrow \alpha : (x)$ dans Γ_α est la restriction de celle définie dans D_α .

LEMME 3.6. - Γ_α est un sous-monoïde de D_α .

Soient x et y deux éléments de Γ_α ; donc, d'après le lemme 3.4, $xy \in D_\alpha$. D'autre part,

$\alpha : (x \cdot \alpha) = \alpha : (x \cdot \alpha) = \alpha : x$ entraîne $x \cdot \alpha \equiv x \cdot \alpha \equiv x \cdot (\alpha_\alpha)$, α_α étant régulière à droite pour la multiplication $xy \equiv (x \cdot \alpha)y \cdot (\alpha_\alpha)$; or,

$$(x \cdot \alpha)y \leq xy \cdot \alpha \leq (xy)^* \cdot \alpha .$$

Mais,

$$(xy)^* \cdot \alpha = [\alpha \cdot (\alpha \cdot xy)] \cdot \alpha = (\alpha : \alpha) \cdot (\alpha \cdot xy) = (xy)^* ,$$

donc, en raison de la convexité des classes,

$$xy \cdot \alpha \equiv xy \ (\alpha_\alpha) \quad \text{et aussi} \quad xy \cdot \alpha \equiv xy \ (\alpha_\alpha) .$$

Donc, $xy \in \Gamma_\alpha$.

LEMME 3.7. - Γ_α est un sous-monoïde résidué, normalement clos de G , d'élément bimaximum α .

$$(a) \text{ Si } x, y \in \Gamma_\alpha, \quad (x \cdot y) \cdot \alpha \equiv (x \cdot y) \cdot \alpha \equiv x \cdot y \ (\alpha_\alpha) .$$

Remarquons tout d'abord que $\alpha : y(\alpha : y) = \alpha$, d'où $y(\alpha : y) \equiv \alpha \ (\alpha_\alpha)$; mais $x \cdot \alpha \equiv x \ (\alpha_\alpha)$, d'où, par multiplication à droite,

$$y(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \equiv \alpha x \ (\alpha_\alpha) ;$$

or $\alpha \cdot \alpha x = \alpha \cdot x$, d'où $y(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \equiv x \ (\alpha_\alpha)$.

On a donc

$$(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \leq x \cdot y \leq (\alpha : y) \cdot (\alpha : x) = \alpha : (\alpha : x)y$$

$$y(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \leq y(x \cdot y) \leq y[\alpha : (\alpha : x)y] \leq \alpha : (\alpha : x) ;$$

par convexité de la classe x , $y(x \cdot y) \equiv x \ (\alpha_\alpha)$.

De même,

$$(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \cdot \alpha \leq (x \cdot y) \cdot \alpha \leq [\alpha : (\alpha : x)y] \cdot \alpha = (\alpha : \alpha) \cdot (\alpha : x)y$$

$$[(\alpha : y) \cdot \alpha](x \cdot \alpha) = (\alpha : y)(x \cdot \alpha) \leq (\alpha : y)(x \cdot \alpha) \cdot \alpha ;$$

donc

$$y(\alpha : y)(x \cdot \alpha) \leq y[(x \cdot y) \cdot \alpha] \leq y[\alpha : (\alpha : x)y] \leq \alpha : (\alpha : x) ,$$

d'où, par convexité, $y[(x \cdot y) \cdot \alpha] \equiv x \ (\alpha_\alpha)$.

On a finalement

$$y(x \cdot y) \equiv y[(x \cdot y) \cdot \alpha] \quad (\alpha_\alpha = \alpha_{y*} \text{ lemme 3.4}) ,$$

donc

$$y^* \cdot y(x \cdot y) = y^* \cdot y[(x \cdot y) \cdot \alpha] ,$$

$$\alpha \cdot (x \cdot y) = \alpha \cdot [(x \cdot y) \cdot \alpha] .$$

On a de même

$$\alpha \cdot (x \cdot y) = \alpha \cdot [(x \cdot y) \cdot \alpha] .$$

(b) Si $x, y \in \Gamma_\alpha$, $x \cdot y$ et $x \cdot y$ sont des éléments de Γ_α .

$$\alpha \cdot [(\alpha : y) \cdot (\alpha : x)] \leq \alpha \cdot (x \cdot y) \leq \alpha \cdot (\alpha : y)(x \cdot \alpha) = [\alpha \cdot (x \cdot \alpha)] \cdot (\alpha : y)$$

$$(\alpha : x)y \leq \alpha \cdot [\alpha \cdot y(\alpha : x)] \leq \alpha \cdot (x \cdot y) \leq (\alpha : x) \cdot (\alpha : y) = \alpha : (\alpha : y)x .$$

Posons

$$p = [\alpha \cdot (x \cdot y)] \cdot [\alpha \cdot (x \cdot y)] .$$

On a $p < [\alpha : (\alpha : y)x] \cdot (\alpha : x)y$. Or,

$$x(\alpha : x) \equiv \alpha \quad (\alpha_\alpha) ,$$

d'où $(\alpha : y)x (\alpha : x)y \equiv (\alpha : y)\alpha y \equiv \alpha \quad (\alpha_\alpha)$, d'où $p \leq \alpha$. De même,

$$q = [\alpha \cdot (x \cdot y)] \cdot [\alpha \cdot (x \cdot y)] \leq \alpha ,$$

d'où, selon le lemme 3.1,

$$\begin{cases} \alpha(x \cdot y) \cdot \alpha(x \cdot y) \leq q \leq \alpha \\ (x \cdot y)\alpha \cdot (x \cdot y)\alpha \leq p \leq \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot (x \cdot y) = \alpha \cdot (x \cdot y) .$$

Donc $p \geq \alpha$ et $q \geq \alpha$, ce qui implique $p = q = \alpha$, puis $x \cdot y \in \Gamma_\alpha$.

On démontrerait de même que $x \cdot y \in \Gamma_\alpha$.

Si $x \in \Gamma_\alpha$, on a

$$x \cdot x \leq (\alpha : x) \cdot (\alpha : x) = \alpha ,$$

donc Γ_α est totalement clos d'élément bimaximum α . Comme de plus

$$x \cdot \alpha \equiv x \cdot \alpha \equiv \alpha \quad (\alpha_\alpha) ,$$

Γ_α est nomalement clos. On pourra donc énoncer :

THÉOREME 3.2. - Il y a bijection entre l'ensemble des ordres- α et l'ensemble des sous-monoïdes nomalement clos maximaux de G .

On notera $\Phi_\alpha = \{\alpha : x ; x \in \Gamma_\alpha\}$ le groupe, pour la loi $(\alpha : x) \circ (\alpha : y) = \alpha : yx$, homomorphe et isotone à Γ_α .

Dans le cas particulier où G est totalement clos d'élément bimaximum ε , ε est un ordre maximal ; si Φ_ε est son groupe associé, on a, a priori, $\Phi_\varepsilon \subseteq G_\varepsilon$, mais si $x \in G_\varepsilon$, il existe y tel que $x = \varepsilon : y$ et $x \in N_\varepsilon$, donc $\varepsilon : x \in \Phi_\varepsilon$ et de même $\varepsilon : (\varepsilon : x) = x \in \Phi_\varepsilon$, donc $G_\varepsilon = \Phi_\varepsilon$.

Naturellement, G contient un sous-monoïde nomalement clos

$$\Gamma_\varepsilon = \{x ; \varepsilon : (x \cdot \varepsilon) = \varepsilon : x = \varepsilon : (x \cdot \varepsilon)\} ,$$

et un sous-monoïde intégralement clos

$$N_\varepsilon = \{x \in \Gamma_\varepsilon / x \cdot x = x \cdot x = \varepsilon\} ,$$

et on a les relations d'inclusion

$$G_\varepsilon \subseteq N_\varepsilon \subseteq \Gamma_\varepsilon \subseteq G .$$

On notera que

$$G/\alpha_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon/\alpha_\varepsilon = N_\varepsilon/\alpha_\varepsilon \cong G_\varepsilon .$$

Si α est un ordre- α , en appliquant ces dernières considérations à Γ_α , on peut énoncer :

THÉOREME 3.5. - Il y a bijection entre l'ensemble des ordres- α et l'ensemble des sous-monoïdes intégralement clos maximaux de G .

Soient u un ordre quelconque, et I_u l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations $xu \leq x$; $ux \leq x$; I_u n'est pas vide, puisque $u \in I_u$.

I_u est un sous-monoïde résidué de G . En effet, si x et $y \in I_u$, $yu \leq y$ entraîne $xyu \leq xy$; de même, $ux \leq x$ entraîne $uxy \leq xy$. Par ailleurs,

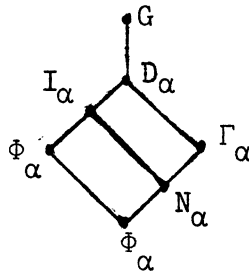
$$(x \cdot y)u \leq (x \cdot uy)u = [(x \cdot y) \cdot u]u \leq x \cdot y$$

$$u(x \cdot y) \leq ux \cdot y \leq x \cdot y .$$

Analogie pour $x \cdot y$.

Si u est un ordre- α , si $x \in N_\alpha$, cela implique $x \in I_\alpha$ et $N_\alpha \subseteq I_\alpha$. De même, $\bar{\Phi}_\alpha \subseteq I_\alpha$.

On a donc le diagramme d'inclusion suivant, associé à chaque ordre- α de G :



4. Sous-monoïdes B-clos d'un monoïde résidué.

Soit G un monoïde résidué. On appellera ordre- β un idempotent $\beta \in G$ tel que

$$\beta^{-1} = \beta \cdot \beta = \beta \cdot \beta \quad \text{et} \quad \beta^{-1} \beta = \beta \beta^{-1} = \beta .$$

On notera Λ_β l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} \beta = x(\beta \cdot x) = (\beta \cdot x)x \\ (x \cdot x) \cdot \beta = (x \cdot x) \cdot \beta = \beta^{-1} . \end{cases}$$

Λ_β n'est pas vide, car $\beta \in \Lambda_\beta$.

LEMME 4.1. - Si β est un ordre- β , on a $(x \cdot x) \cdot \beta = (x \cdot x) \cdot \beta = \beta^{-1}$ pour tout $x \in \Lambda_\beta$.

Soit $p = (x \cdot x) \cdot \beta$. On a $p \cdot \beta = \beta^{-1} \cdot \beta = \beta^{-1}$, d'où $p < \beta^{-1}$. Mais

$$(x \cdot x) \cdot \beta = \beta^{-1} = \beta \cdot \beta \quad \text{implique} \quad x \cdot x \equiv \beta \quad (\beta^0);$$

or $\beta = \beta^{-1} \beta$, donc est plus petit élément dans sa classe $[3]$, et $\beta \leq x \cdot x \leq \beta^{-1}$, d'où $p > \beta \cdot \beta = \beta^{-1}$.

LEMME 4.2. - Λ_β est un sous-monoïde B-normalement clos de G , dont β est le B-élément.

(a) Si $x, y \in \Lambda_\beta$, $x \cdot y$ et $x \cdot y$ sont des éléments de Λ_β .

$$\beta \cdot (x \cdot y) \geq [y \cdot (x \cdot y)](\beta \cdot y) \geq [\beta^{-1} \cdot (x \cdot y)](y \cdot \beta^{-1})(\beta \cdot y)$$

$$\geq [(y \cdot y) \cdot (x \cdot y)](y \cdot \beta^{-1})(\beta \cdot y) \geq (y \cdot x)(y \cdot \beta^{-1})(\beta \cdot y),$$

$$y \cdot \beta^{-1} = y \cdot (y \cdot \beta y) \geq \beta y, \quad \text{d'où} \quad \beta \cdot (x \cdot y) \geq (y \cdot x)\beta y(\beta \cdot y) = (y \cdot x)\beta,$$

$$x \cdot y \geq (\beta^{-1} \cdot y)(x \cdot \beta^{-1}) \geq (\beta^{-1} \cdot y)\beta x,$$

donc

$$(x \cdot y)[\beta \cdot (x \cdot y)] \geq (\beta^{-1} \cdot y)\beta x(\beta \cdot x)\beta y\beta = (\beta^{-1} \cdot y)\beta y\beta = (\beta \cdot \beta y)\beta y\beta = \beta,$$

finalement $(x \cdot y)[\beta \cdot (x \cdot y)] = \beta$. De même, $[\beta \cdot (x \cdot y)](x \cdot y) = \beta$.
Par ailleurs,

$$\beta^{-1} = (y \cdot y) \cdot \beta \leq [(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)] \cdot \beta \leq \beta^{-1}.$$

Même étude pour $x \cdot y$.

(b) Si $x, y \in \Lambda_\beta$, $xy \in \Lambda_\beta$.

On a $(\beta \cdot x) \cdot y \geq (\beta \cdot y)(\beta \cdot x\beta)$, d'où

$$xy(\beta \cdot xy) \geq xy(\beta \cdot y)(\beta \cdot x\beta) = x\beta(\beta \cdot x\beta) = \beta.$$

Donc, $xy(\beta \cdot xy) = \beta$. De même, $(\beta \cdot xy)xy = \beta$. Par ailleurs,

$$\beta^{-1} = (y \cdot y) \cdot \beta \leq (xy \cdot xy) \cdot \beta \leq \beta^{-1},$$

d'où $xy \in \Lambda_\beta$.

THÉORÈME 4.1. - Il y a bijection entre l'ensemble des ordres- β et l'ensemble des sous-monoïdes de G B-normalement clos maximaux.

Remarquons que β^{-1} est un ordre- α , car $\beta^{-1} \cdot \beta^{-1} = \beta^{-1} \cdot \beta^{-1} = \beta^{-1}$. C'est de plus l'élément bimaximum de Λ_β (voir lemme 4.1). Donc, Λ_β est un sous-monoïde normalement clos d'élément bimaximum β^{-1} , c'est-à-dire qu'il est contenu dans $\Gamma_{\beta^{-1}}$.

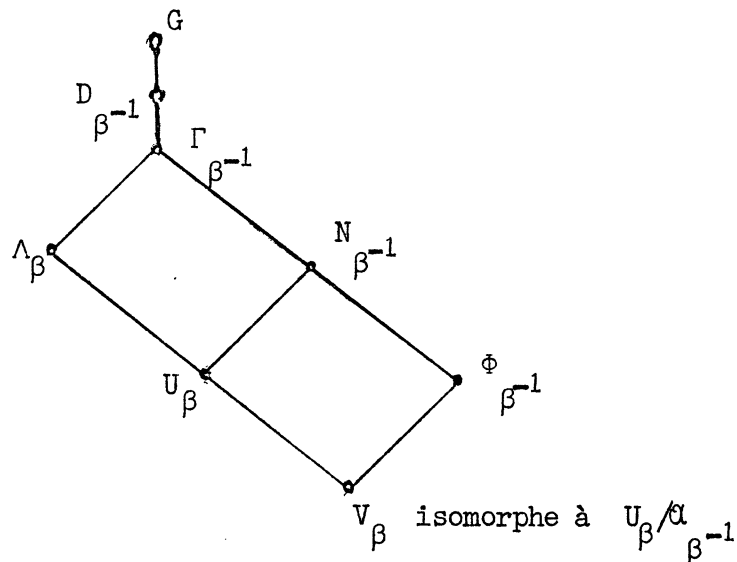
Notons U_β l'ensemble des $x \in \Lambda_\beta$ tel que $x \cdot x = x \cdot x = \beta^{-1}$; U_β n'est pas vide, car il contient au moins β . Comme Λ_β est normalement clos, U_β est le sous-monoïde intégralement clos maximal contenu dans Λ_β ; or, pour tout $x \in U_\beta$,

$$x(\beta \cdot x) = (\beta \cdot x)x = \beta;$$

donc U_β est B-totalement clos, soit finalement B-intégralement clos. Evidemment, $U_\beta \subseteq N_{\beta^{-1}}$. On peut énoncer :

THÉOREME 4.2. - Tout sous-monoïde B-normalement clos associé à un ordre- β contient un sous-monoïde B-intégralement clos.

On a donc le diagramme d'inclusion suivant correspondant à un ordre- β .



5. Sous-monoïdes clos d'un monoïde résidué unitaire.

Soit G un monoïde résidué unitaire. On notera e l'élément unité.

LEMME 5.1. - Si G est un monoïde résidué unitaire, les ordres à gauche et à droite sont les seuls idempotents entiers (c'est-à-dire $\geq e$).

Posons $z = y \cdot y$. D'une part, $e \leq ey \cdot y = z$ entraîne $z \leq z^2$. D'autre part, $zy \leq y$ entraîne $z^2 y \leq zy \leq y$, d'où $z^2 \leq y \cdot y = z$. Donc, $z^2 = z$. On montrerait de même que $z' = y \cdot y$ est un idempotent.

Si u est un idempotent et $u \geq e$, $u \leq u^2 \cdot u = u \cdot u$, or $e \leq e$ entraîne

$$u \cdot u \leq u \cdot e = (u \cdot e)e \leq u,$$

d'où $u = u \cdot u$.

On rappelle que dans un monoïde résidué unitaire :

$$e \leq x \cdot x; \quad e \leq x \cdot x$$

$$x \cdot (x \cdot x) = x = x \cdot e \quad \text{quel que soit } x \in G$$

$$x \cdot (x \cdot x) = x = x \cdot e$$

de sous-monoïde normalement clos Γ_e associé à l'élément unité e sera défini par

$$\Gamma_e = \{x \in G; (e \cdot x) \cdot (e \cdot x) = (e \cdot x) \cdot (e \cdot x) = e\},$$

car $e \cdot (x \cdot e) = e \cdot x$ et $e \cdot (x \cdot e) = e \cdot x$.

Mais $e \leq x \cdot x$ et $e \leq x \cdot x$, quel que soit x , entraîne $x \cdot x = x \cdot x = e$ pour tout $x \in \Gamma_e$, donc $D_e = \Gamma_e = N_e$. Ainsi, D_e est un monoïde unitaire intégralement clos; c'est même un sous-groupe de G , puisque e est un ordre-6 [3].

Soit u un idempotent entier de G . On notera I_u l'ensemble des $x \in G$ vérifiant les relations : il existe p et $q \in G$ tel que $x = p \cdot u = q \cdot u$; I_u n'est pas vide, puisque $u \in I_u$.

LEMME 5.3. - Un élément x appartient à I_u si, et seulement si, $xu = ux = x$.

$xu = x$ entraîne d'une part $x \leq xu \cdot u = x \cdot u$; d'autre part, $e \leq u$ implique $x \cdot u \leq x \cdot e = x$, d'où $x = x \cdot u$. De même $ux = x$ entraîne $x = x \cdot u$, et donc $x \in I_u$.

Réciproquement, si $x = q \cdot u$, on a $x \cdot u = q \cdot u^2 = q \cdot u = x$, d'où

$$xu = (x \cdot u)u \leq x.$$

Mais $e \leq u$ entraîne $x \leq xu$, d'où $xu = x$. De même, $x = p \cdot u$ entraîne $ux = x$.

LEMME 5.3. - I_u est un sous-monoïde résidué unitaire de G , semi-réticulé ou réticulé en même temps que G .

Si x et y sont des éléments de I_u , $ux = x$ entraîne $uxy = xy$. De même $yu = y$ entraîne $xyu = xy$, donc, d'après le lemme ci-dessus, $xy \in I_u$.

$ux = x$ entraîne $y \cdot x = y \cdot ux = (y \cdot x) \cdot u$. De plus, $y = q' \cdot u$, d'où $y \cdot x = (q' \cdot u) \cdot x = (q' \cdot x) \cdot u$, donc $y \cdot x \in I_u$. Même étude

pour $y \cdot x$.

Si G est semi-réticulé supérieurement,

$$u(x \vee y) = ux \vee uy = x \vee y \quad \text{et} \quad (x \vee y)u = xu \vee yu = x \vee y ,$$

donc $x \vee y \in I_u$.

Si G est réticulé,

$$u(x \wedge y) \leq ux \wedge uy = x \wedge y ,$$

et d'autre part $e \leq u$ entraîne

$$x \wedge y \leq u(x \wedge y) .$$

On peut finalement énoncer :

THÉORÈME 5.1. - Il y a bijection entre l'ensemble des idempotents entiers et l'ensemble des sous-monoïdes résidués unitaires maximaux.

Nécessairement, si u est élément neutre d'un sous-monoïde unitaire de G , on a $u^2 = u$ et $u \cdot u = u \cdot u = u$, donc u est un idempotent entier.

THÉORÈME 5.2. - Un monoïde unitaire totalement clos ne contient qu'un seul sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal ; en particulier, $N_\varepsilon = I_\varepsilon$ (ε élément bimaximum).

Si le monoïde unitaire G est totalement clos, son élément bimaximum est le plus grand idempotent entier, donc I_ε est un monoïde résidué totalement clos dont l'élément bimaximum ε est aussi élément unité ; c'est-à-dire que I_ε est un sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal.

Supposons maintenant l'existence d'un autre sous-monoïde unitaire intégralement clos T d'élément unité ε^* . Si $x \in T$,

$$e \leq x \cdot x = x \cdot x = \varepsilon^* \leq \varepsilon ,$$

donc ε^* est un idempotent entier et $T \subseteq I_{\varepsilon^*}$. Par ailleurs, $e \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon$ entraîne $\varepsilon \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon^2 \leq \varepsilon$ et $\varepsilon^* \varepsilon = \varepsilon \varepsilon^* = \varepsilon$, donc, d'après le lemme 5.1,

$$\varepsilon \in I_{\varepsilon^*} .$$

Il en résulte que $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon$ et $I_{\varepsilon^*} = I_\varepsilon$. Si T est maximal, $T = I_\varepsilon$.

Le sous-monoïde normalement clos Γ_ε associé à l'élément bimaximum ε contient un monoïde intégralement clos maximal.

$$N_\varepsilon = \{x \in \Gamma_\varepsilon ; x \cdot x = x \cdot x = \varepsilon\} ,$$

Or, puisque G est unitaire, ε est un idempotent, et si $x = p \cdot \varepsilon = q \cdot \varepsilon$ est un élément de I_ε , on a

$$\varepsilon : [(p \cdot \varepsilon) \cdot \varepsilon] = \varepsilon : [(q \cdot \varepsilon) \cdot \varepsilon] = \varepsilon : x ,$$

donc $x \in \Gamma_\varepsilon$. Il en résulte que $I_\varepsilon = N_\varepsilon$, puisque le monoïde unitaire normalement clos Γ_ε ne peut contenir qu'un seul sous-monoïde unitaire intégralement clos maximal.

Considérons maintenant un monoïde résidué unitaire quelconque G . Soit u un idempotent entier. Les résultats précédents nous permettent de considérer les sous-monoïdes résidués suivants :

$$(a) \quad I_u = \{x ; \text{il existe } p \text{ et } q \in G \text{ tel que } x = p \cdot u = q \cdot u\} ;$$

I_u étant unitaire (d'élément unité u), contient un sous-monoïde Γ_u^* unitaire intégralement clos maximal dans I_u ,

$$(b) \quad \Gamma_u^* = N_u^* = \{x \in I_u ; (u \cdot x) \cdot (u \cdot x) = (u \cdot x) \cdot (u \cdot x) = u\} .$$

Par ailleurs, u étant ordre- α de G , on peut lui associer un monoïde normalement clos maximal dans G ,

$$(c) \quad \Gamma_u = \left\{ x \in G ; \begin{array}{l} (u \cdot x) \cdot (u \cdot x) = (u \cdot x) \cdot (u \cdot x) = u ; \\ u \cdot (x \cdot u) = u \cdot x \\ u \cdot (x \cdot u) = u \cdot x \end{array} \right\} ;$$

Γ_u contient un monoïde intégralement clos maximal dans Γ_u :

$$(d) \quad N_u = \{x \in \Gamma_u ; x \cdot x = x \cdot x = u\} .$$

Si $x \in N_u$, G étant unitaire, on a

$$x \cdot (x \cdot x) = x \cdot (x \cdot x) = x = x \cdot u = x \cdot u ,$$

donc $x \in I_u$, puis $x \in N_u^*$, d'où $N_u \subseteq N_u^*$. D'autre part, si $x \in N_u^*$,

$$u \cdot [(q \cdot u) \cdot u] = u \cdot (q \cdot u^2) = u \cdot (q \cdot u)$$

$$u \cdot [(p \cdot u) \cdot u] = u \cdot (p \cdot u^2) = u \cdot (p \cdot u) ,$$

donc $x \in \Gamma_u$ et $N_u^* \subseteq \Gamma_u$. Comme N_u est un monoïde intégralement clos maximal dans Γ_u , il en résulte $N_u^* = N_u$.

On notera qu'un monoïde résidué unitaire ne peut contenir que des monoïdes intégralement clos unitaires.

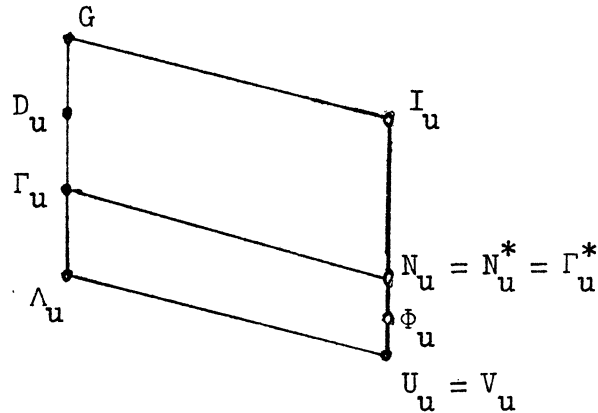
Notons enfin que tout idempotent entier est ordre- β , ce qui permet d'introduire

Λ_u sous-monoïde B-nomalement clos maximal, puis U_u sous-monoïde B-intégralement clos maximal qui est un groupe puisque u élément unité est aussi B-élément. C'est un groupe compatible d'ailleurs avec la structure résidué du monoïde G . Convenons d'appeler G-groupe un groupe qui est aussi sous-monoïde résidué de G . On peut donc énoncer :

THÉOREME 5.3. - Il y a bijection entre l'ensemble des idempotents entiers et l'ensemble des G-groupes maximaux.

Remarquons que U_u est un sous-groupe de Φ_u . En effet, pour les éléments de U_u , la α_u -multiplication [3] est réduite à la multiplication dans G .

On a finalement le diagramme d'inclusion général suivant associé à un idempotent quelconque entier u .



Cas particuliers.

1° $u = e$:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad G = I_e \\ \downarrow \\ D_e = \Gamma_e = N_e = \Lambda_e = \Phi_e = U_e \end{array}$$

2° $u = \varepsilon$: ε élément bimaximum, c'est-à-dire G totalement clos

$$\begin{array}{c} \bullet \quad G = D_\varepsilon \\ \downarrow \\ \Gamma_\varepsilon = N_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon = \Phi_\varepsilon = U_\varepsilon = I_\varepsilon \end{array}$$

3° $u = \beta$: β B-élément, c'est-à-dire G B-totalement clos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \quad G = \Lambda_\beta = \Gamma_\beta$$

$$I_\beta = N_\beta = U_\beta = \Phi_\beta$$

6. Exemples.

(A). - Soit E un groupe ordonné. Soit E_+ le cône positif. On convient d'appeler E_+ -complexes les complexes X vérifiant les conditions :

$$E_+ : X, \quad X \cdot E_+, \quad X \cdot^* E_+ \quad \text{et} \quad (X \cdot^* E_+) \cdot^* E_+ \quad \text{sont des complexes.}$$

On démontre que l'ensemble L_{E_+} des E_+ -complexes est un sous-monoïde résidué de P_E , monoïde des parties de E^+ .

Notons $[X] = M(m(X))$ le majeur engendré par $X \in P_E$, et M_{E_+} l'ensemble des majeurs $\neq \emptyset$. On démontre que les majeurs non vides de E sont engendrés par des E_+ -complexes, et que l'application $X \rightarrow [X]$ de L_{E_+} sur M_{E_+} est la fermeture de type α associée à E_+ ; M_{E_+} est l'ensemble des fermés. On définit donc une multiplication des majeurs

$$[X] \circ [Y] = [XY] .$$

Si M_{E_+} est un groupe pour cette multiplication, E est dit totalemtent clos. Ceci revient à dire que L_{E_+} est un sous-monoïde totalement clos de P_E . Mais E_+ est un idempotent entier, donc un ordre- α . On peut donc lui associer D_{E_+} sous-monoïde quasi-clos maximal de P_E ,

$$D_{E_+} = \{X \in P_E ; (E_+ : X) \cdot^* (E_+ : X) = (E_+ : X) \cdot^* (E_+ : X) = E_+\} .$$

Etablissons que D_{E_+} est contenu dans L_{E_+} .

Si $E_+ : X = \emptyset$, alors $\emptyset \cdot^* \emptyset = E = E_+$, ce qui est banal.

Si $X \cdot^* E_+ = \emptyset$, alors $(X \cdot^* X) \cdot^* E_+ = \emptyset \cdot^* X = E$, or $X \cdot^* X \subset E_+$, d'où $E \subset E_+$, ce qui est impossible.

Si $(X \cdot^* E_+) \cdot^* E_+ = \emptyset$, on a de même $(X \cdot^* E_+ X) \cdot^* E_+ = E$, d'où $E \subset E_+$.

Donc, si L_{E_+} est totalement clos, donc quasi-clos, puisque D_{E_+} est un sous-monoïde quasi clos maximal,

$$D_{E_+} = L_{E_+} .$$

On sait que E peut être immergé dans M_E^+ , qui est conditionnellement complet, avec conservation du $\inf$ et du $\sup$, si et seulement si E est totalement clos.

Ce plongement est-il unique ?

On pourra toujours se ramener au cas des cônes positifs maximaux. Si ces cônes sont aussi des monoïdes ordres maximaux de P_E , alors le plongement est unique.

(B). - Soit A un ordre d'un corps K ; K est évidemment un A -module. Un A -sous-module I de K est appelé idéal fractionnaire de A s'il existe $d \neq 0 \in A$ tel que $dI \subset A$.

Notons $L(A)$ le sous-monoïde résidué des A -complexes de P_K , et $F(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires de A . L'application $\varphi : L(A) \rightarrow F(A)$ telle que

$$\varphi(X) = X^* = \left\{ \sum_i a_i x_i ; a_i \in A ; x_i \in X \right\}$$

est une application de fermeture dans $L(A)$ dont les fermés sont les idéaux fractionnaires. L'équivalence de fermeture associée est régulière. On peut donc définir une multiplication des idéaux fractionnaires

$$X^* \circ Y^* = (XY)^* ;$$

$F(A)$ est alors un monoïde résidué unitaire dont la résiduation définie à partir de cette multiplication coïncide avec celle définie à partir de la multiplication des complexes dans $L(A)$.

Si le monoïde résidué unitaire $F(A)$ est intégralement clos, l'anneau A est dit complètement intégralement clos.

Si le monoïde résidué $L(A)$ est totalement clos, l'anneau A est dit anneau de Dedekind. Mais A est un idempotent entier, donc un ordre- $\mathcal{O}$ de P_K . On peut lui associer D_A sous-monoïde quasi clos maximal de P_K ,

$$D_A = \{X \in P_K ; (A : X) : (A : X) = A\} .$$

On peut montrer que D_A est contenu dans $L(A)$, donc lui est égal, c'est-à-dire que, si A est un anneau de Dedekind, $L(A)$ est un sous-monoïde totalement clos maximal de P_K .

(C). - Soient R un anneau d'intégrité, K son corps des quotients, Σ une algèbre de dimension finie sur K , et G l'ensemble des réseaux de Σ . On défini-

nit sur G une structure de monoïde résidué, en posant, pour des éléments X, Y de G ,

$$X.Y = \{\sum x_i y_i ; x_i \in X ; y_i \in Y\}$$

$$X \cdot Y = \{m \in \Sigma ; mY \subseteq X\}$$

$$X \cdot Y = \{m \in \Sigma ; Ym \subseteq X\} .$$

Un ordre Ω de Σ est un sous-anneau de Σ , appartenant à G ; Ω est maximal s'il n'est contenu dans aucun ordre. On a évidemment $\Omega^2 \subseteq \Omega$, donc un ordre maximal de Σ est aussi un ordre maximal du monoïde résidué G .

Soit Ω un ordre maximal de Σ . L'ensemble

$$N_\Omega = \{X \in G ; X \cdot X = X \cdot X = \Omega\}$$

est un sous-monoïde de G intégralement clos, et l'ensemble

$$\Phi_\Omega = \{X^{-1} ; X \in N_\Omega\}$$

est un groupe pour la loi $X^{-1} \circ Y^{-1} = (YX)^{-1}$.

Ainsi peut-on associer à chaque ordre maximal un groupe. Pour deux ordres maximaux distincts, les groupes sont isomorphes. Si Ω est un R -module noethérien, Φ_Ω est un groupe commutatif [3] (chapitre II, section 3).

Un R -module A est dit réflexif si l'homomorphisme canonique de A dans son bidual A^{**} est un isomorphisme. Soit X un élément de G . Tout $f \in X^*$ admet alors une extension unique, élément de $\text{Hom}_K(\Sigma, K)$, ce qui permet d'identifier le bidual X^{**} de X avec un réseau réflexif de Σ . Dans ces conditions, l'application $\varphi : G \rightarrow G$ tel que $\varphi(X) = X^{**}$ est une application de fermeture dont l'ensemble F des réseaux réflexifs de G est l'ensemble des fermés. L'équivalence de fermeture $\mathcal{K}_\varphi$ associée à φ est régulière pour la multiplication dans G , ce qui permet de définir dans F une structure de monoïde en posant

$$X \tau Y = (XY)^{**} .$$

La résiduation définie à partir de cette opération coïncide avec la résiduation dans G .

Supposons dorénavant R noethérien et intégralement clos, et Σ séparable sur K . Soient

$$F_\Omega = F \cap N_\Omega ,$$

et $\mathcal{K}'_\varphi$ la restriction de $\mathcal{K}_\varphi$ à N_Ω . Si $X \in F_\Omega$, d'une part

$$X \tau X^{-1} = X^{-1} \tau X = \Omega ,$$

d'autre part

$$(X^{-1})^{-1} = X .$$

Donc $\mathcal{K}'_{\varphi}$ est l'équivalence α -nomale α_{Ω} dans N_{Ω} , et $F_{\Omega} = \Phi_{\Omega}$, c'est-à-dire que X^{-1} est un réseau réflexif si $X \in N_{\Omega}$ [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 101-115.
 - [2] GOLDMAN (Oscar). - Quasi-egality in maximal orders, J. Math. Soc. Japan, t.13, 1961, p. 371-376.
 - [3] QUERRÉ (Julien). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 66, 1964, p. 265-389 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).
-