

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN BIGARD

Décomposition des demi-groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 14,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A13_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉCOMPOSITION DES DEMI-GROUPES ORDONNÉS

par Alain BIGARD

L'objet de cet exposé est de décomposer certains demi-groupes ordonnés en demi-groupes d'un type donné. Cette question ne semble avoir été étudiée jusqu'à présent que dans le cas d'un ordre total. La deuxième partie de l'exposé concerne les demi-groupes qui sont réunion de groupes ordonnés. Nous nous conformons à la terminologie de L. FUCHS [4].

I

Rappelons qu'un demi-groupe est dit positivement ordonné s'il est ordonné et si a et b sont inférieurs à ab , quels que soient a et b .

Un tel demi-groupe sera dit archimédien si, quels que soient a et b , il existe n tel que $a \leq b^n$.

PROPOSITION 1. - Tout demi-groupe positivement ordonné admet une partition en demi-groupes positivement ordonnés archimédiens.

On considère l'équivalence σ définie par

$$a \equiv b (\sigma) \iff \exists n, m, a \leq b^m \text{ et } b \leq a^n.$$

Si $a \equiv b$, on a $ab \leq a^{n+1}$ et $a \leq ab$, donc $a \equiv ab$; donc, les classes sont stables.

PROPOSITION 2. - Si S est un demi-groupe positivement ordonné et abélien, σ est la plus fine congruence régulière qui donne, comme quotient, un demi-treillis.

C'est une congruence, car $a \leq b^m$ et $b \leq a^n$ entraînent :

$$ac \leq b^m c \leq b^m c^m = (bc)^m, \quad bc \leq a^n c \leq a^n c^n = (ac)^n, \quad \text{donc } ac \equiv bc.$$

Elle est semi-latticielle, puisque $a \equiv a^2$. Elle est régulière, car $a \leq b$ entraîne $ab \leq b^2$, comme $b \leq ab$, on a alors $b \equiv ab$.

Inversement, si R est régulière et semi-latticielle, $a \leq b^m$ et $b \leq a^n$ entraînent

$$a \equiv ab^m \equiv ab \equiv a^n b \equiv b \quad (R).$$

Nous dirons qu'un demi-groupe est 0-simplifiable si

$$ac \leq bc \implies a \leq b .$$

Considérons d'autre part la condition

$$(1) \quad x^2 \leq xy \leq y^2 \implies x \leq y .$$

PROPOSITION 3. - Tout demi-groupe ordonné abélien S vérifiant (1) admet une partition en demi-groupes 0-simplifiables.

En effet, il suffit de considérer la décomposition de S en classes archimédiennes ⁽¹⁾. Si a, b, c sont dans la même classe et tels que $ac \leq bc$, on peut trouver x, y, m, n avec $cx = a^m$, $cy = b^n$.

$$a^{m+1} = acx \leq bcx = ba^m, \quad b^{n+1} = bcy \geq acy = ab^n .$$

Si $n \leq m$, on a en fait : $b^{m+1} \geq ab^m$. Il en résulte :

$$(ab^{m-1})^2 = ab^{m-2} ab^m \leq ab^{m-2} b^{m+1} = (ab^{m-1})b^m$$

$$(ab^{m-1})b^m = (ab^m)b^{m-1} \leq b^{m+1} b^{m-1} = (b^m)^2 ;$$

en posant $u = ab^{m-1}$ et $v = b^m$, on voit que $u^2 \leq uv \leq v^2$, donc $u \leq v$, c'est-à-dire $ab^{m-1} \leq b^m$. De même, $ba^{m-1} \geq a^m$. Une récurrence évidente permet de descendre jusqu'à $m = 1$, $a^2 \leq ba \leq b^2$, donc $a \leq b$.

On voit facilement que la réciproque de la proposition 3 est vraie dans un demi-groupe totalement ou naturellement ordonné ⁽²⁾.

Nous appellerons paire anormale tout couple d'éléments a, b distincts, tels que $a^n < b^{n+1}$ et $b^n < a^{n+1}$ pour tout $n > 0$ ⁽³⁾.

D'autre part, on dira qu'un demi-groupe ordonné est réel s'il est isomorphe à un sous-demi-groupe de \mathbb{R} . On peut alors énoncer le résultat suivant :

⁽¹⁾ Les classes archimédiennes sont données par l'équivalence suivante : Deux éléments sont dits équivalents si chacun divise une puissance de l'autre [2].

⁽²⁾ Rappelons qu'un demi-groupe est dit naturellement ordonné s'il est positivement ordonné et si

$$a < b \implies \exists x, \exists y, b = ax = ya .$$

⁽³⁾ Cette notion a été introduite par ALIMOV [1] dans les demi-groupes totalement ordonnés.

THÉOREME 1. - Soit S un demi-groupe positivement ordonné tel que

1° $(\exists n, a^n \leq b^n) \implies a \leq b$;

2° il n'existe pas de paire anormale.

Alors, S admet une partition en demi-groupes réels.

En effet, soit F un fuseau.

(i) F est totalement ordonné. Si $a, b \in F$, on a $a^i = b^j$ pour un certain couple d'entiers (i, j) . Si $j \leq i$, $b^j \leq b^i$, $a^i \leq b^i$, donc $a \leq b$.

(ii) Si $a \in F$ est tel que $a^n = a^{n+1}$, alors $F = \{a\}$; on a $a^n = a^p$ pour tout $p \geq n$, donc $a^n = a^{2n}$, $a = a^2$.

Si $b \in F$, $b^j = a^i = a = a^j$, $b = a$.

(iii) Si $a, b \in F$, alors $ab = ba$. Écartons le cas précédent, qui est trivial. On a $a^i = b^j$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(ba)^n \leq a(ba)^n$. Supposons $(ba)^n = a(ba)^n$ et distinguons deux cas :

- Si $a \leq b$,

$$(ba)^n \leq b^{2n} < b^{2n+1} \leq b^{(2n+1)j} = a^{(2n+1)i} \leq a^{(2n+1)i} (ba)^n = (ba)^n .$$

- Si $b \leq a$,

$$(ba)^n \leq a^{2n} < a^{2n+1} \leq a^{2n+1} (ba)^n = (ba)^n .$$

Dans les 2 cas, il y a contradiction, donc

$$(ba)^n < a(ba)^n \leq a(ba)^n b = (ab)^{n+1} .$$

De même, $(ab)^n < (ba)^{n+1}$. Si ab était différent de ba , ab et ba constitueraient une paire anormale.

(N) F est un demi-groupe. Si $a, b \in F$,

$$a^i = b^j, (ab)^j = a^j b^j = a^{j+i}, ab \in F .$$

(V) F est simplifiable. Soient $a, b, c \in F$ tels que $ab = cb$. On peut trouver i, j, m, n tels que $a^i = b^j$, $c^m = b^n$.

$$b^{jm+im} = a^{im} b^{im} = (ab)^{im} = (cb)^{im} = c^{im} b^{im} = b^{in+im},$$

$$jm + im = in + im, \quad jm = in,$$

$$a^{jn+in} = a^{jn} b^{jn} = (ab)^{jn} = (cb)^{jn} = c^{jn} b^{jn} = c^{jn+jm} = c^{jn+in},$$

donc $a = c$.

En conclusion, F est un demi-groupe totalement ordonné, simplifiable, et sans paire anormale. D'après un résultat d'ALIMOV [1], il est réel.

DÉFINITION 1. - Soient Λ un ensemble totalement ordonné, $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de demi-groupes disjoints.

$$S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

constitue un demi-groupe si l'on pose, pour $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, et $\lambda < \mu$, $ab = ba = b$. Nous appellerons S la somme ordinale des S_λ .

DÉFINITION 1'. - Si les S_λ sont des demi-groupes ordonnés, nous appellerons somme ordinale des S_λ le demi-groupe ordonné

$$S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

obtenue en posant, pour $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, $\lambda < \mu$:

$$ab = ba = b \quad \text{et} \quad a < b .$$

On peut montrer facilement que S est positivement ordonné (resp. totalement ordonné, resp. naturellement ordonné) si, et seulement si, les S_λ le sont.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème que CONRAD [3] a démontré pour les demi-groupes totalement ordonnés.

THÉORÈME 2. - Soit S un demi-groupe ordonné. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) S se décompose en somme ordinale de demi-groupes positivement ordonnés, simplifiables, et indécomposables ;

(2) S est positivement ordonné, et de plus :

$$ab = ac \quad (\text{ou} \quad ba = ca) \quad \text{entraîne} \quad b = c \quad \text{ou} \quad ab = a .$$

Supposons (1) satisfaite. Soient $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, $c \in S_\pi$, et $ab = ac$;

- si $\mu < \lambda$, $ab = a$;
- si $\mu = \lambda$, $ab \in S_\lambda$, $ac \in S_\lambda$, donc $\pi \leq \lambda$,
 - $\pi < \lambda$ entraîne $ac = a$,
 - $\pi = \lambda$ entraîne $a, b, c \in S_\lambda$ et $b = c$;
- si $\mu > \lambda$, on peut exclure $\pi \leq \lambda$; avec $\lambda < \pi$, on a $ab = b$ et $ac = c$, donc $b = c$.

Inversement, supposons (2) satisfaite. Considérons la relation τ :

$$a \equiv b (\tau) \iff a = b \text{ ou } \{a, b\} \cap \{ab, ba\} = \emptyset .$$

(i) τ est une congruence.

Elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive.

$a \equiv b$ et $b \equiv c$. On supposera a, b, c tous distincts,

$$ac = c \implies bac = bc \implies ba = b \text{ ou } bc = c ,$$

$$ac = a \implies acb = ab \implies cb = b \text{ ou } ab = a ,$$

ce qui est impossible. Donc, $\{a, c\} \cap \{ac, ca\} = \emptyset$ et $a \equiv c$.

Montrons que $a \equiv b$ entraîne $ac \equiv bc$. On peut supposer $a \neq b$. $ac = (ac)(bc)$ entraîne :

- ou $a = acb$, or $a \leq ab \leq acb$, donc $a = ab$, ce qui est impossible ;

- ou $ac = c$, $ac \leq bc$, mais $bc \leq ac$, $bc = ac$, donc $bc \equiv ac$.

(ii) Les classes sont stables.

Il suffit de montrer que, pour tout a , $a \equiv a^2$. Si $a = a^2$, c'est évident. Si $a < a^2$, montrons que $\{a, a^2\} \cap \{a^3\} = \emptyset$.

$$a^3 = a^2 \implies a(a^2) = aa \implies a^2 = a .$$

(iii) $ab = b$ entraîne $ba = b$.

Si $ab = b$, $bab = b^2$, donc $ba = b$ ou $b^2 = b$. Dans ce dernier cas,

$$b \leq ba \leq bab = b^2 = b ,$$

$ba = b$.

(iv) $\Lambda = S/\tau$ est un demi-treillis et son ordre est total.

Le demi-groupe S/τ est idempotent par (ii).

Si $a \neq b$, on a $ab = ba$ par (iii). Si $a \equiv b$, $ab \equiv ba$ est conséquence de (ii). S/τ est donc commutatif.

Quels que soient a et b , on a $ab \equiv a$ ou $ab \equiv b$, donc S/τ est totalement ordonné.

(v) S est la somme ordinale des classes $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Si $a \in S_\lambda$ et $b \in S_\mu$, a et b ne sont pas congrus, donc on a, par exemple, $ab = b$. Par suite, $ba = b$ et $a < b$.

(vi) Les S_λ sont simplifiables et indécomposables.

Si $a, b, c \in S_\lambda$ et $ab = ac$, on a $b = c$ ou $ab = ac = a$. Comme $a \equiv b$, $a = b$. De même, $a \equiv c$ entraîne $a = c$. D'où finalement $b = c$ dans les deux cas. Le fait que S_λ soit indécomposable résulte immédiatement de la définition de τ .

II

Nous abordons maintenant le problème de la décomposition en groupes.

THÉOREME 3. - Un demi-groupe D est somme ordinale de groupes si, et seulement si :

- α) $\forall a, \exists x, a = axa$ (D régulier),
 β) $ab = ac \implies b = c$ ou $ab = ba = a$.
 (ou $ba = ca$)

On voit très facilement que ces conditions sont nécessaires.

(i) Soit $a \in D$. Il existe x tel que $a = axa$, $a^2 = axa^2$, donc $a = xa^2$ ou $a^2 = a$. Dans les deux cas, a est régulier à gauche. On voit de même qu'il est régulier à droite. Par suite, D admet une partition en groupes, celle qui correspond aux \mathcal{H} -classes [2].

(ii) Soient e, f deux idempotents.

$$eef = ef \implies ef = f \text{ ou } ef = fe = e,$$

$$eff = ef \implies ef = e \text{ ou } ef = fe = f.$$

Finalement, $ef = fe = e$ ou $ef = fe = f$.

L'ensemble des idempotents est donc totalement ordonné par

$$e \leq f \iff ef = fe = f.$$

Les idempotents commutent.

(iii) Soient $a \in H_e$, $b \in H_f$, $e < f$.

$$ffa = fa \implies fa = a \text{ ou } fa = af = f.$$

Mais $fa \in H_f$, donc $fa = af = f$,

$$ba = bfa = bf = b, \quad ab = afb = fb = b.$$

COROLLAIRE. - Pour qu'un demi-groupe ordonné S soit somme ordinale de groupes ordonnés, il faut et il suffit que :

- α) $\forall a, \exists x, a = axa$,
 β) $ab = ac \implies b = c$ ou $ab = ba = a$,
 γ) $ab = b \implies a \leq b$ ou $a \in Sb$.

Rappelons qu'on appelle 0-groupe un groupe qui peut être muni d'un ordre total.

THÉOREME 4. - Un demi-groupe abélien peut être plongé dans un demi-groupe décomposable en 0-groupes si et seulement si : $(\exists n, a^n = b^n) \implies a = b$.

La condition est nécessaire, parce qu'un 0-groupe est sans torsion.

Inversement, si cette condition est satisfaite,

$$a^2 = ab = b^2 \quad \text{entraîne} \quad a = b ,$$

donc les composantes archimédiennes de S sont des demi-groupe (abéliens) simplifiables $(S_i)_{i \in I}$; S peut être alors plongé dans la somme des G_i , où G_i désigne le groupe des fractions de S_i . La condition imposée entraîne que G_i est sans torsion, donc on peut le munir d'un ordre total.

Dans toute la suite, on considère des demi-groupe qui sont réunion de groupes ou, ce qui est équivalent, qui sont à la fois réguliers à droite et à gauche [2].

On notera H_e la \mathcal{H} -classe de l'idempotent e dans l'équivalence de Green, et E l'ensemble des idempotents.

Si, de plus, S est inversé (c'est-à-dire si les idempotents commutent), E constitue un demi-treillis. Nous dirons, dans ce cas, que S est décomposable en groupes.

THÉOREME 5. - Soit S un demi-groupe ordonné, décomposable en groupes. Soient

$$P = \{x \mid x^2 \geq x\}, \quad P^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in P\}.$$

Alors, P est stable ; pour tout a , $aP = Pa$ et $P \cap P^{-1} = E$.

Soit P_e l'ensemble des éléments positifs de H_e . Il est clair que

$$P = \bigcup_{e \in E} P_e.$$

Il en résulte que P^{-1} est l'ensemble des éléments négatifs, donc $P \cap P^{-1} = E$.

Soient $a, b \in P$. On a $a \in P_e$, $b \in P_f$, $ef = fe = g$.

$$a \geq e \implies ag \geq eg = g \implies ag \in P_g,$$

$$b \geq f \implies gb \geq gf = g \implies gb \in P_g;$$

$$ab = aefb = agb = (ag)(gb) \in P_g \subseteq P.$$

Soit $c \in S$. Montrons que $cP \subseteq Pc$. Si $x \in P$, $x \in H_f$, $c \in H_e$. Posons : $g = ef = fe$. $x \geq f$, donc $gx \geq gf = g$. gc et gx appartiennent à H_g . Il

existe $u \in P_g$ tel que $gcgx = ugc = uc$. Donc,

$$cx = cefx = cgx = gcgx = uc \in P_c .$$

La réciproque du théorème 5 peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 6. - Soit S un demi-groupe décomposable en groupes. Soit P une partie stable telle que, pour tout a , $aP = Pa$ et $P \cap P^{-1} = E$. Il existe un ordre sur S pour lequel $P = \{x \mid x^2 \geq x\}$.

Posons $P_e = P \cap H_e$. On définit ainsi un ordre sur H_e :

$$P_e \cap P_e^{-1} \subseteq P \cap P^{-1} \cap H_e = E \cap H_e = \{e\} .$$

Donc,

$$P_e \cap P_e^{-1} = \{e\} .$$

Soient $a \in H_e$, $x \in P_e$, b l'inverse de a . Il existe $u \in P$ tel que $ax = ua$.
On a $ax = uea$, avec

$$ue = ue^2 = ueab = axb \in H_e ;$$

mais $e \in P$, donc $ue \in P$ et $ue \in P_e$. On a donc

$$aP_e \subseteq P_e a ,$$

ce qui achève de montrer que P_e est le cône positif d'un ordre (unique) sur H_e .

Par ailleurs, E peut être ordonné de la manière suivante :

$$e \leq f \iff ef = fe = e .$$

Si $x \in H_e$ et $y \in H_f$, nous poserons

$$x \leq y \iff e \leq f \text{ et } x \leq ye \text{ (dans } H_e \text{)} .$$

On voit facilement que c'est un ordre qui induit l'ordre des H_e .

Il reste à montrer que $x \leq y \implies ax \leq ay$. Si $a \in H_g$, on a

$$ax \in H_{ge} \quad \text{et} \quad ay \in H_{gf} .$$

De plus,

$$geg = g^2 ef = ge , \quad u = ge \leq gf .$$

Soit x' l'inverse de x . On a $x \leq ye$, donc

$$e = xx' \leq yex' = yx' , \quad yx' \in P_e .$$

Il en résulte que $uyx' \in P$, car P est stable. $uyx' \in H_u$, donc $u \leq uyx'$. On a

$$xu = uxu \leq uyx'xu = uyeu = uyu = yu .$$

Mais $ua \in H_u$, $ax = uaxu \leq uayu = (ay)u$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit S un demi-groupe décomposable en groupes ordonnés. Il existe un ordre sur S qui prolonge l'ordre des composants.

Cet ordre n'est pas, en général, unique. Notons que celui qui a été défini plus haut est le plus fin parmi ceux qui prolongent l'ordre naturel sur les idempotents.

Dans l'énoncé suivant, nous appelons demi-groupe réticulé un demi-groupe ordonné en treillis dans lequel le produit est distributif vis-à-vis de \vee et \wedge .

PROPOSITION 4. - Un demi-groupe réticulé S , conditionnellement complet et décomposable en groupes, est commutatif.

Montrons que chaque sous-groupe maximal H_e est conditionnellement complet. Soit $(x_i)_{i \in I}$ avec, pour tout i , $x_i \in H_e$ et $x_i \leq x \in H_e$. Soit y_i l'inverse de x_i . Les y_i sont minorés par x^{-1} .

$$u = \bigvee_{i \in I} x_i \quad \text{et} \quad v = \bigwedge_{i \in I} x_i$$

existent dans S .

$$\text{On a } ue = (\bigvee x_i)e = \bigvee x_i e = \bigvee x_i = u, \text{ et } eu = u .$$

$$uv = (\bigvee x_i)v = \bigvee x_i v \leq \bigvee x_i y_i = e ,$$

$$uv = u \bigwedge x_i = \bigwedge ux_i \geq \bigwedge y_i x_i = e ;$$

par conséquent, $uv = e$, et de même $vu = e$. On a donc $u \equiv e$ (\mathcal{H}), c'est-à-dire $u \in H_e$.

Les H_e sont conditionnellement complets, donc commutatifs. Si $a \in H_f$ et $b \in H_g$, on a, en posant $fg = gf = e$,

$$ab = afgb = a(eb) = aebe = beae = bea = bgfa = ba .$$

On démontre d'une manière analogue la propriété suivante :

PROPOSITION 5. - Un demi-groupe réticulé complet, régulier à droite et à gauche, est une bande.

THÉORÈME 7. - Soit S un gerbier qui est réunion de groupes. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (α) $\forall a, \exists u, a = u(a \vee a^2)$.
 (β) $\forall b, \exists v, a = (a \vee a^2)v$.
 (γ) S est réunion de groupes réticulés.

Tout d'abord, S est régulier à droite et à gauche.

(α) \implies (β) . Soit $a \in S$. Il existe u tel que $a = u(a \vee a^2)$, et il existe t tel que $a = ata$. Posons $b = tua$. On a

$$a(ba \vee b) = a(tua^2 \vee tua) = atu(a^2 \vee a) = ata = a ,$$

d'où

$$b = tua = tua(ba \vee b) = b(ba \vee b) = b^2 a \vee b^2 .$$

Il existe s tel que $b = sb^2$, donc

$$sb = s(b^2 a \vee b^2) = sb^2 a \vee sb^2 = ba \vee b ,$$

d'où

$$asb = a(ba \vee b) = a .$$

Il vient :

$$a = asb = as^2 b^2 = as(ba \vee b)b = asbab \vee asb^2 = a^2 b \vee ab = (a^2 \vee a)b .$$

De même, (β) \implies (α) . Montrons que (α) et (β) entraînent (γ) . Soient $a \in H_e$, a' son inverse dans H_e . Il existe u , v tels que $a = u(a \vee a^2)$, $a = (a \vee a^2)v$. On a

$$a \vee e = ea \vee a'a = (e \vee a')a , \quad a \vee e = ae \vee aa' = a(e \vee a') ;$$

d'autre part,

$$a = u(a \vee a^2) = ua(e \vee a) , \quad a = (a \vee a^2)v = (e \vee a)av ;$$

on a donc $a \vee e \equiv a$ (℔) , c'est-à-dire $a \vee e \in H_e$. Si c et d sont deux éléments de H_e , c' et d' leurs inverses,

$$c \vee d = c(e \vee c'd) \in H_e .$$

Il est évident que (γ) entraîne (α) et (β) .

Ces trois conditions se trouvent notamment réalisées lorsque S est un demi-groupe réticulé régulier à droite et à gauche.

Dans un gerbier, régulier à gauche et à droite, vérifiant (α) et (β), tout élément est d'ordre infini ou idempotent.

On peut ainsi compléter certains résultats de SAITÔ [5] concernant les demi-groupes totalement ordonnés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALIMOV (N. G.). - Sur les demi-groupes ordonnés [en russe], Izvestija Akad. Nauk SSSR, Serija matematičeskaja, t. 14, 1950, p. 569-576.
 - [2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
 - [3] CONRAD (P.). - Ordered semigroups, Nagoya math. J., t. 16, 1960, p. 51-64.
 - [4] FUCHS (László). - Partially ordered algebraic systems. - Oxford, Pergamon Press, 1963 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 28).
 - [5] SAITÔ (Tôru). - Regular elements in an ordered semigroup, Pacific J. of Math., t. 13, 1963, p. 263-295.
-