Alain Bigard

Décomposition des demi-groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 14, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A13_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 14

22 février 1965

DÉCOMPOSITION DES DEMI-GROUPES ORDONNÉS

par Alain BIGARD

L'objet de cet exposé est de décomposer certains demi-groupes ordonnés en demi-groupes d'un type donné. Cette question ne semble avoir été étudiée jusqu'à présent que dans le cas d'un ordre total. La deuxième partie de l'exposé concerne les demi-groupes qui sont réunion de groupes ordonnés. Nous nous conformons à la terminologie de L. FUCHS [4].

I

Rappelons qu'un demi-groupe est dit positivement ordonné s'il est ordonné et si a et b sont inférieurs à ab, quels que soient a et b.

Un tel demi-groupe sera dit archimédien si, quels que soient a et b, il existe n tel que $a \leqslant b^n$.

PROPOSITION 1. - Tout demi-groupe positivement ordonné admet une partition en demi-groupes positivement ordonnés archimédiens.

On considère l'équivalence σ définie par

$$a \equiv b\ (\sigma) \iff \exists\, n\, ,\, m\, ,\quad a \leqslant b^m \ \text{ et }\ b \leqslant a^n\ .$$

Si $a \equiv b$, on a $ab \leqslant a^{n+1}$ et $a \leqslant ab$, donc $a \equiv ab$; donc, les classes sont stables.

PROPOSITION 2. - Si S est un demi-groupe positivement ordonné et abélien, σ est la plus fine congruence régulière qui donne, comme quotient, un demi-treillis.

C'est une congruence, car $a \leqslant b^m$ et $b \leqslant a^n$ entraînent :

$$ac \leqslant b^m c \leqslant b^m c^m = (bc)^m\ ,\quad bc \leqslant a^n c \leqslant a^n c^n = (ac)^n\ ,\quad \text{donc}\quad ac \equiv bc\ .$$

Elle est semi-latticielle, puisque $a \equiv a^2$. Elle est régulière, car $a \leqslant b$ entraîne $ab \leqslant b^2$, comme $b \leqslant ab$, on a alors $b \equiv ab$.

Inversement, si R est régulière et semi-latticielle, $a \leqslant b^m$ et $b \leqslant a^n$ entraînent

$$a \equiv ab^m \equiv ab \equiv a^n b \equiv b\quad (R)\ .$$

Nous dirons qu'un demi-groupe est O-simplifiable si

$$ac \leqslant bc \implies a \leqslant b \; .$$

Considérons d'autre part la condition

(1) $$x^2 \leqslant xy \leqslant y^2 \implies x \leqslant y \; .$$

PROPOSITION 3. - Tout demi-groupe ordonné abélien S vérifiant (1) admet une partition en demi-groupes O-simplifiables.

En effet, il suffit de considérer la décomposition de S en classes archimédiennes (1). Si a , b , c sont dans la même classe et tels que $ac \leqslant bc$, on peut trouver x , y , m , n avec $cx = a^m$, $cy = b^n$.

$$a^{m+1} = acx \leqslant bcx = ba^m \; , \qquad b^{n+1} = bcy \geqslant acy = ab^n \; .$$

Si $n \leqslant m$, on a en fait : $b^{m+1} \geqslant ab^m$. Il en résulte :

$$(ab^{m-1})^2 = ab^{m-2}\, ab^m \leqslant ab^{m-2}\, b^{m+1} = (ab^{m-1})b^m$$

$$(ab^{m-1})b^m = (ab^m)b^{m-1} \leqslant b^{m+1}\, b^{m-1} = (b^m)^2 \; ;$$

en posant $u = ab^{m-1}$ et $v = b^m$, on voit que $u^2 \leqslant uv \leqslant v^2$, donc $u \leqslant v$, c'est-à-dire $ab^{m-1} \leqslant b^m$. De même, $ba^{m-1} \geqslant a^m$. Une récurrence évidente permet de descendre jusqu'à $m = 1$, $a^2 \leqslant ba \leqslant b^2$, donc $a \leqslant b$.

On voit facilement que la réciproque de la proposition 3 est vraie dans un demi-groupe totalement ou naturellement ordonné (2).

Nous appellerons paire anomale tout couple d'éléments a , b distincts, tels que $a^n < b^{n+1}$ et $b^n < a^{n+1}$ pour tout $n > 0$ (3).

D'autre part, on dira qu'un demi-groupe ordonné est réel s'il est isomorphe à un sous-demi-groupe de $\underset{\sim}{R}$. On peut alors énoncer le résultat suivant :

---

(1) Les classes archimédiennes sont données par l'équivalence suivante : Deux éléments sont dits équivalents si chacun divise une puissance de l'autre [2].

(2) Rappelons qu'un demi-groupe est dit naturellement ordonné s'il est positivement ordonné et si

$$a < b \implies \exists\, x \; , \; \exists\, y \; , \; b = ax = ya \; .$$

(3) Cette notion a été introduite par ALIMOV [1] dans les demi-groupes totalement ordonnés.

THÉORÈME 1. - Soit S un demi-groupe positivement ordonné tel que

1° $(\exists n\ ,\ a^n \leqslant b^n) \implies a \leqslant b$;

2° il n'existe pas de paire anomale.

Alors, S admet une partition en demi-groupes réels.

En effet, soit F un fuseau.

(i) F est totalement ordonné. Si $a\ ,\ b \in F$, on a $a^i = b^j$ pour un certain couple d'entiers $(i\ ,\ j)$. Si $j \leqslant i$, $b^j \leqslant b^i$, $a^i \leqslant b^i$, donc $a \leqslant b$.

(ii) Si $a \in F$ est tel que $a^n = a^{n+1}$, alors $F = \{a\}$; on a $a^n = a^p$ pour tout $p \geqslant n$, donc $a^n = a^{2n}$, $a = a^2$.

Si $b \in F$, $b^j = a^i = a = a^j$, $b = a$.

(iii) Si $a\ ,\ b \in F$, alors $ab = ba$. Ecartons le cas précédent, qui est trivial. On a $a^i = b^j$. Soit $n \in \underset{\sim}{N}$. On a $(ba)^n \leqslant a(ba)^n$. Supposons $(ba)^n = a(ba)^n$ et distinguons deux cas :

- Si $a \leqslant b$,

$$(ba)^n \leqslant b^{2n} < b^{2n+1} \leqslant b^{(2n+1)j} = a^{(2n+1)i} \leqslant a^{(2n+1)i}\ (ba)^n = (ba)^n \ .$$

- Si $b \leqslant a$,

$$(ba)^n \leqslant a^{2n} < a^{2n+1} \leqslant a^{2n+1}\ (ba)^n = (ba)^n \ .$$

Dans les 2 cas, il y a contradiction, donc

$$(ba)^n < a(ba)^n \leqslant a(ba)^n\, b = (ab)^{n+1} \ .$$

De même, $(ab)^n < (ba)^{n+1}$. Si ab était différent de ba , ab et ba constitueraient une paire anomale.

(N) F est un demi-groupe. Si $a\ ,\ b \in F$,

$$a^i = b^j\ ,\quad (ab)^j = a^j\, b^j = a^{j+i}\ ,\quad ab \in F \ .$$

(V) F est simplifiable. Soient $a\ ,\ b\ ,\ c \in F$ tels que $ab = cb$. On peut trouver $i\ ,\ j\ ,\ m\ ,\ n$ tels que $a^i = b^j$, $c^m = b^n$.

$$b^{jm+im} = a^{im}\, b^{im} = (ab)^{im} = (cb)^{im} = c^{im}\, b^{im} = b^{in+im}\ ,$$

$$jm + im = in + im\ ,\qquad jm = in\ ,$$

$$a^{jn+in} = a^{jn}\, b^{jn} = (ab)^{jn} = (cb)^{jn} = c^{jn}\, b^{jn} = c^{jn+jm} = c^{jn+in}\ ,$$

donc $a = c$.

En conclusion, F est un demi-groupe totalement ordonné, simplifiable, et sans paire anomale. D'après un résultat d'ALIMOV [1], il est réel.

DÉFINITION 1. - Soient Λ un ensemble totalement ordonné, $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de demi-groupes disjoints.

$$S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

constitue un demi-groupe si l'on pose, pour $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, et $\lambda < \mu$, $ab = ba = b$. Nous appellerons S la somme ordinale des S_λ.

DÉFINITION 1'. - Si les S_λ sont des demi-groupes ordonnés, nous appellerons somme ordinale des S_λ le demi-groupe ordonné

$$S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

obtenu en posant, pour $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, $\lambda < \mu$:

$$ab = ba = b \qquad \text{et} \qquad a < b .$$

On peut montrer facilement que S est positivement ordonné (resp. totalement ordonné, resp. naturellement ordonné) si, et seulement si, les S_λ le sont.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème que CONRAD [3] a démontré pour les demi-groupes totalement ordonnés.

THÉORÈME 2. - Soit S un demi-groupe ordonné. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) S se décompose en somme ordinale de demi-groupes positivement ordonnés, simplifiables, et indécomposables ;

(2) S est positivement ordonné, et de plus :

$$ab = ac \quad (\text{ou} \quad ba = ca) \qquad \text{entraîne} \qquad b = c \quad \text{ou} \quad ab = a .$$

Supposons (1) satisfaite. Soient $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$, $c \in S_\pi$, et $ab = ac$;

- si $\mu < \lambda$, $ab = a$;
- si $\mu = \lambda$, $ab \in S_\lambda$, $ac \in S_\lambda$, donc $\pi \leq \lambda$,

$$\pi < \lambda \qquad \text{entraîne} \qquad ac = a ,$$

$$\pi = \lambda \qquad \text{entraîne} \qquad a , b , c \in S_\lambda \quad \text{et} \quad b = c ;$$

- si $\mu > \lambda$, on peut exclure $\pi \leq \lambda$; avec $\lambda < \pi$, on a $ab = b$ et $ac = c$, donc $b = c$.

Inversement, supposons (2) satisfaite. Considérons la relation τ :

$$a \equiv b\ (\tau) \iff a = b \quad \text{ou} \quad \{a\ ,\ b\} \cap \{ab\ ,\ ba\} = \emptyset\ .$$

(i) τ <u>est une congruence</u>.

Elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive.

$a \equiv b$ et $b \equiv c$. On supposera a , b , c tous distincts,

$ac = c \implies bac = bc \implies ba = b$ ou $bc = c$,

$ac = a \implies acb = ab \implies cb = b$ ou $ab = a$,

ce qui est impossible. Donc, $\{a\ ,\ c\} \cap \{ac\ ,\ ca\} = \emptyset$ et $a \equiv c$.

Montrons que $a \equiv b$ entraîne $ac \equiv bc$. On peut supposer $a \not\equiv b$. $ac = (ac)(bc)$ entraîne :

- ou $a = acb$, or $a \leqslant ab \leqslant acb$, donc $a = ab$, ce qui est impossible ;
- ou $ac = c$, $ac \leqslant bc$, mais $bc \leqslant ac$, $bc = ac$, donc $bc \equiv ac$.

(ii) <u>Les classes sont stables</u>.

Il suffit de montrer que, pour tout a , $a \equiv a^2$. Si $a = a^2$, c'est évident. Si $a < a^2$, montrons que $\{a\ ,\ a^2\} \cap \{a^3\} = \emptyset$.

$$a^3 = a^2 \implies a(a^2) = aa \implies a^2 = a\ .$$

(iii) $ab = b$ <u>entraîne</u> $ba = b$.

Si $ab = b$, $bab = b^2$, donc $ba = b$ ou $b^2 = b$. Dans ce dernier cas,

$$b \leqslant ba \leqslant bab = b^2 = b\ ,$$

$ba = b$.

(iv) $\Lambda = S/\tau$ est un demi-treillis et son ordre est total.

Le demi-groupe S/τ est idempotent par (ii).

Si $a \not\equiv b$, on a $ab = ba$ par (iii). Si $a \equiv b$, $ab \equiv ba$ est conséquence de (ii). S/τ est donc commutatif.

Quels que soient a et b , on a $ab \equiv a$ ou $ab \equiv b$, donc S/τ est totalement ordonné.

(v) S est la somme ordinale des classes $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Si $a \in S_\lambda$ et $b \in S_\mu$, a et b ne sont pas congrus, donc on a, par exemple, $ab = b$. Par suite, $ba = b$ et $a < b$.

(vi) Les S_λ sont simplifiables et indécomposables.

Si a , b , $c \in S_\lambda$ et $ab = ac$, on a $b = c$ ou $ab = ac = a$. Comme $a \equiv b$, $a = b$. De même, $a \equiv c$ entraîne $a = c$. D'où finalement $b = c$ dans les deux cas. Le fait que S_λ soit indécomposable résulte immédiatement de la définition de τ .

II

Nous abordons maintenant le problème de la décomposition en groupes.

THÉORÈME 3. - <u>Un demi-groupe</u> D <u>est somme ordinale de groupes si, et seulement si</u> :

α) $\forall a$, $\exists x$, $a = axa$ (D <u>régulier</u>),

β) $ab = ac$ (ou $ba = ca$) $\Longrightarrow$ $b = c$ ou $ab = ba = a$.

On voit très facilement que ces conditions sont nécessaires.

(i) Soit $a \in D$. Il existe x tel que $a = axa$, $a^2 = axa^2$, donc $a = xa^2$ ou $a^2 = a$. Dans les deux cas, a est régulier à gauche. On voit de même qu'il est régulier à droite. Par suite, D admet une partition en groupes, celle qui correspond aux $\mathcal{H}$-classes [2].

(ii) Soient e , f deux idempotents.

$$eef = ef \Longrightarrow ef = f \quad \text{ou} \quad ef = fe = e ,$$

$$eff = ef \Longrightarrow ef = e \quad \text{ou} \quad ef = fe = f .$$

Finalement, $ef = fe = e$ ou $ef = fe = f$.

L'ensemble des idempotents est donc totalement ordonné par

$$e \leqslant f \Longleftrightarrow ef = fe = f .$$

Les idempotents commutent.

(iii) Soient $a \in H_e$, $b \in H_f$, $e < f$.

$$ffa = fa \Longrightarrow fa = a \quad \text{ou} \quad fa = af = f .$$

Mais $fa \in H_f$, donc $fa = af = f$,

$$ba = bfa = bf = b , \qquad ab = afb = fb = b .$$

COROLLAIRE. - <u>Pour qu'un demi-groupe ordonné</u> S <u>soit somme ordinale de groupes ordonnés, il faut et il suffit que</u> :

α) $\forall a$, $\exists x$, $a = axa$,

β) $ab = ac \Longrightarrow b = c$ ou $ab = ba = a$,

γ) $ab = b \Longrightarrow a \leqslant b$ ou $a \in Sb$.

Rappelons qu'on appelle 0-groupe un groupe qui peut être muni d'un ordre total.

THÉORÈME 4. - Un demi-groupe abélien peut être plongé dans un demi-groupe décomposable en 0-groupes si et seulement si : $(\exists\ n\ ,\ a^n = b^n) \implies a = b$.

La condition est nécessaire, parce qu'un 0-groupe est sans torsion.

Inversement, si cette condition est satisfaite,

$$a^2 = ab = b^2 \quad \text{entraîne} \quad a = b\ ,$$

donc les composantes archimédiennes de S sont des demi-groupes (abéliens) simplifiables $(S_i)_{i\in I}$; S peut être alors plongé dans la somme des G_i , où G_i désigne le groupe des fractions de S_i . La condition imposée entraîne que G_i est sans torsion, donc on peut le munir d'un ordre total.

Dans toute la suite, on considère des demi-groupes qui sont réunion de groupes ou, ce qui est équivalent, qui sont à la fois réguliers à droite et à gauche [2].

On notera H_e la $\mathcal{H}$-classe de l'idempotent e dans l'équivalence de Green , et E l'ensemble des idempotents.

Si, de plus, S est inversé (c'est-à-dire si les idempotents commutent), E constitue un demi-treillis. Nous dirons, dans ce cas, que S est décomposable en groupes.

THÉORÈME 5. - Soit S un demi-groupe ordonné, décomposable en groupes. Soient

$$P = \{x \mid x^2 \geqslant x\}\ , \qquad P^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in P\}\ .$$

Alors, P est stable ; pour tout a , $aP = Pa$ et $P \cap P^{-1} = E$.

Soit P_e l'ensemble des éléments positifs de H_e . Il est clair que

$$P = \bigcup_{e\in E} P_e\ .$$

Il en résulte que P^{-1} est l'ensemble des éléments négatifs, donc $P \cap P^{-1} = E$.

Soient a , b ∈ P . On a $a \in P_e$, $b \in P_f$, $ef = fe = g$.

$$a \geqslant e \implies ag \geqslant eg = g \implies ag \in P_g\ ,$$

$$b \geqslant f \implies gb \geqslant gf = g \implies gb \in P_g\ ;$$

$$ab = aefb = agb = (ag)(gb) \in P_g \subseteq P\ .$$

Soit $c \in S$. Montrons que $cP \subseteq Pc$. Si $x \in P$, $x \in H_f$, $c \in H_e$. Posons : $g = ef = fe$. $x \geqslant f$, donc $gx \geqslant gf = g$. gc et gx appartiennent à H_g . Il existe $u \in P_g$ tel que $gcgx = ugc = uc$. Donc,

$$cx = cefx = cgx = gcgx = uc \in Pc \ .$$

La réciproque du théorème 5 peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe décomposable en groupes. Soit</u> P <u>une partie stable telle que, pour tout</u> a , $aP = Pa$ <u>et</u> $P \cap P^{-1} = E$. <u>Il existe un ordre sur</u> S <u>pour lequel</u> $P = \{x \mid x^2 \geqslant x\}$.

Posons $P_e = P \cap H_e$. On définit ainsi un ordre sur H_e :

$$P_e \cap P_e^{-1} \subseteq P \cap P^{-1} \cap H_e = E \cap H_e = \{e\} \ .$$

Donc,

$$P_e \cap P_e^{-1} = \{e\} \ .$$

Soient $a \in H_e$, $x \in P_e$, b l'inverse de a . Il existe $u \in P$ tel que $ax = ua$. On a $ax = uea$, avec

$$ue = ue^2 = ueab = axb \in H_e \ ;$$

mais $e \in P$, donc $ue \in P$ et $ue \in P_e$. On a donc

$$aP_e \subseteq P_e \, a \ ,$$

ce qui achève de montrer que P_e est le cône positif d'un ordre (unique) sur H_e .

Par ailleurs, E peut être ordonné de la manière suivante :

$$e \leqslant f \iff ef = fe = e \ .$$

Si $x \in H_e$ et $y \in H_f$, nous poserons

$$x \leqslant y \iff e \leqslant f \ \text{ et } \ x \leqslant ye \ \ (\text{dans } H_e) \ .$$

On voit facilement que c'est un ordre qui induit l'ordre des H_e .

Il reste à montrer que $x \leqslant y \implies ax \leqslant ay$. Si $a \in H_g$, on a

$$ax \in H_{ge} \qquad \text{et} \qquad ay \in H_{gf} \ .$$

De plus,

$$gegf = g^2 ef = ge \ , \qquad u = ge \leqslant gf \ .$$

Soit x' l'inverse de x . On a $x \leqslant ye$, donc

$$e = xx' \leqslant yex' = yx' \ , \quad yx' \in P_e \ .$$

Il en résulte que $uyx' \in P$, car P est stable. $uyx' \in H_u$, donc $u \leqslant uyx'$. On a

$$xu = uxu \leqslant uyx'xu = uyeu = uyu = yu \text{ .}$$

Mais $ua \in H_u$, $ax = uaxu \leqslant uayu = (ay)u$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe décomposable en groupes ordonnés. Il existe un ordre sur</u> S <u>qui prolonge l'ordre des composants</u>.

Cet ordre n'est pas, en général, unique. Notons que celui qui a été défini plus haut est le plus fin parmi ceux qui prolongent l'ordre naturel sur les idempotents.

Dans l'énoncé suivant, nous appelons demi-groupe réticulé un demi-groupe ordonné en treillis dans lequel le produit est distributif vis-à-vis de $\vee$ et $\wedge$.

PROPOSITION 4. - <u>Un demi-groupe réticulé</u> S , <u>conditionnellement complet et décomposable en groupes, est commutatif</u>.

Montrons que chaque sous-groupe maximal H_e est conditionnellement complet. Soit $(x_i)_{i\in I}$ avec, pour tout i , $x_i \in H_e$ et $x_i \leqslant x \in H_e$. Soit y_i l'inverse de x_i . Les y_i sont minorés par x^{-1} .

$$u = \bigvee_{i\in I} x_i \qquad \text{et} \qquad v = \bigwedge_{i\in I} x_i$$

existent dans S .

On a $ue = (\bigvee x_i)e = \bigvee x_i e = \bigvee x_i = u$, et $eu = u$.

$$uv = (\bigvee x_i)v = \bigvee x_i v \leqslant \bigvee x_i y_i = e \text{ ,}$$

$$uv = u \bigwedge x_i = \bigwedge ux_i \geqslant \bigwedge y_i x_i = e \text{ ;}$$

par conséquent, $uv = e$, et de même $vu = e$. On a donc $u \equiv e$ $(\mathcal{H})$, c'est-à-dire $u \in H_e$.

Les H_e sont conditionnellement complets, donc commutatifs. Si $a \in H_f$ et $b \in H_g$, on a, en posant $fg = gf = e$,

$$ab = afgb = a(eb) = aebe = beae = bea = bgfa = ba \text{ .}$$

On démontre d'une manière analogue la propriété suivante :

PROPOSITION 5. - Un demi-groupe réticulé complet, régulier à droite et à gauche, est une bande.

THÉORÈME 7. - Soit S un gerbier qui est réunion de groupes. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) $\forall a$, $\exists u$, $a = u(a \vee a^2)$.

(β) $\forall b$, $\exists v$, $a = (a \vee a^2)v$.

(γ) S est réunion de groupes réticulés.

Tout d'abord, S est régulier à droite et à gauche.

(α) $\Longrightarrow$ (β). Soit $a \in S$. Il existe u tel que $a = u(a \vee a^2)$, et il existe t tel que $a = ata$. Posons $b = tua$. On a

$$a(ba \vee b) = a(tua^2 \vee tua) = atu(a^2 \vee a) = ata = a ,$$

d'où

$$b = tua = tua(ba \vee b) = b(ba \vee b) = b^2 a \vee b^2 .$$

Il existe s tel que $b = sb^2$, donc

$$sb = s(b^2 a \vee b^2) = sb^2 a \vee sb^2 = ba \vee b ,$$

d'où

$$asb = a(ba \vee b) = a .$$

Il vient :

$$a = asb = as^2 b^2 = as(ba \vee b)b = asbab \vee asb^2 = a^2 b \vee ab = (a^2 \vee a)b .$$

De même, (β) $\Longrightarrow$ (α). Montrons que (α) et (β) entraînent (γ). Soient $a \in H_e$, a' son inverse dans H_e. Il existe u, v tels que $a = u(a \vee a^2)$, $a = (a \vee a^2)v$. On a

$$a \vee e = ea \vee a'a = (e \vee a')a , \qquad a \vee e = ae \vee aa' = a(e \vee a') ;$$

d'autre part,

$$a = u(a \vee a^2) = ua(e \vee a) , \qquad a = (a \vee a^2)v = (e \vee a)av ;$$

on a donc $a \vee e \equiv a$ $(\mathcal{H})$, c'est-à-dire $a \vee e \in H_e$. Si c et d sont deux éléments de H_e, c' et d' leurs inverses,

$$c \vee d = c(e \vee c'd) \in H_e .$$

Il est évident que (γ) entraîne (α) et (β).

Ces trois conditions se trouvent notamment réalisées lorsque S est un demi-groupe réticulé régulier à droite et à gauche.

Dans un gerbier, régulier à gauche et à droite, vérifiant (α) et (β), tout élément est d'ordre infini ou idempotent.

On peut ainsi compléter certains résultats de SAITÔ [5] concernant les demi-groupes totalement ordonnés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALIMOV (N. G.). - Sur les demi-groupes ordonnés [en russe], Izvestija Akad. Nauk SSSR, Serija matematičeskaja, t. 14, 1950, p. 569-576.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] CONRAD (P.). - Ordered semigroups, Nagoya math. J., t. 16, 1960, p. 51-64.

[4] FUCHS (László). - Partially ordered algebraic systems. - Oxford, Pergamon Press, 1963 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 28).

[5] SAITÔ (Tôru). - Regular elements in an ordered semigroup, Pacific J. of Math., t. 13, 1963, p. 263-295.