Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gérard Rauzy

Suites partiellement récurrentes. Ensembles partiels d'entiers

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 13, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A12_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
18e année, 1964/65, n° 13

15 février 1965

SUITES PARTIELLEMENT RÉCURRENTES. ENSEMBLES PARTIELS D'ENTIERS

par Gérard RAUZY

1. Notations.

$\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{C}$ désignent l'ensemble des entiers non négatifs, des entiers rationnels, des nombres rationnels, réels et complexes.

Soient A un anneau commutatif, u_0 , u_1 , ... une suite d'éléments de A , $P(z) = a_0 z^s + \ldots + a_s$ un polynôme à coefficients dans A ; on notera $P((u_n))$ la quantité $a_0 u_{n+s} + \ldots + a_s u_n$.

Soit $(u_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de nombres rationels ; u_n sera dite linéairement récurrente s'il existe un polynôme R à coefficients dans un surcorps commutatif de $\underset{\sim}{Q}$, non identiquement nul, et tel que

$$R((u_n)) = 0 , \qquad \forall\, n \in \underset{\sim}{N} .$$

On montre alors aisément (déterminants de Hankel) que, si u_n n'est pas identiquement nulle à partir d'un certain rang, il existe un polynôme unique

$$P = z^s + b_1 z^{s-1} + \ldots + b_s ,$$

unitaire, à coefficients rationnels de degré $s \geqslant 1$, tel que $P((u_n)) = 0$ dès que n assez grand, et divisant tout autre polynôme Q à coefficients dans un surcorps commutatif de $\underset{\sim}{Q}$ tel que $Q((u_n)) = 0$ à partir d'un certain rang (en particulier $b_s \neq 0$). Le polynôme P sera dit associé à la suite u_n .

2. Ensembles partiels d'entiers.

Nous nous intéressons à des énoncés du type "si telle propriété est vraie pour l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ des entiers, alors on a telle autre propriété" et nous cherchons dans cet énoncé à remplacer l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ par un sous-ensemble $\underset{\sim}{J}$ de manière à ce que la proposition énoncée reste valable. Nous considérons plus particulièrement des propositions concernant les suites récurrentes et, dans un premier exemple, nous allons examiner quelle sorte d'ensembles $\underset{\sim}{J}$ peuvent être substitués à l'ensemble $\underset{\sim}{N}$.

2.1. - Soient u_n une suite linéairement récurrente, non identiquement nulle à partir d'un certain rang , P son polynôme associé :

$$P(z) = \prod_{\sigma=1}^{s} (z - \theta_\sigma)$$ sa décomposition dans $\underset{\sim}{C}$.

Posons

$$Q(z) = \prod_{\sigma=1}^{s} (1 - z\theta_\sigma) , \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n .$$

$f(z)$ est une fraction rationnelle de la forme $f(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}$ et les polynômes R et Q sont premiers entre eux (sinon la relation $P((u_n)) = 0$ ne serait pas la relation de plus petit degré satisfaite par u_n à partir d'un certain rang, et P ne serait pas alors le polynôme associé de u_n).

Le rayon de convergence de f est donc le module du pôle de plus petit module, c'est-à-dire $\min_{\sigma=1,\ldots,s} \frac{1}{|\theta_\sigma|}$. On en déduit la relation

$$\overline{\lim_{n\in\underset{\sim}{N}}} \sqrt[n]{|u_n|} = \max_{\sigma=1,\ldots,s} |\theta_\sigma| . \tag{1}$$

2.2. - Nous nous posons alors le problème suivant : Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-ensembles infinis $\underset{\sim}{J}$ de $\underset{\sim}{N}$ tels que l'on ait encore :

$$\overline{\lim_{n\in\underset{\sim}{J}}} \sqrt[n]{|u_n|} = \max_{\sigma=1,\ldots,s} |\theta_\sigma| \tag{2}$$

pour toute suite u_n linéairement récurrente, non identiquement nulle à partir d'un certain rang.

Remarque. - Le résultat (1) subsiste pour n'importe quelle valeur absolue sur $\underset{\sim}{Q}$ (à condition de remplacer $\underset{\sim}{C}$ par un corps convenable). En prenant une valeur absolue non archimédienne, il entraîne en particulier un résultat de FATOU : on voit qu'un ensemble $\underset{\sim}{J}$ pour lequel la généralisation de (2) est vraie pour toute valeur absolue non archimédienne est tel que si une suite u_n linéairement récurrente prend des valeurs entières sur $\underset{\sim}{J}$ son polynôme associé est à coefficients entiers.

2.3. - Donnons maintenant une propriété essentielle de l'ensemble $\mathcal{C}$:

Critère d'invariance. - Si $\underset{\sim}{J} \in \mathcal{C}$ et si $\underset{\sim}{J}(a , b)$ désigne l'ensemble des $n \in \underset{\sim}{N}$ tels que $an + b \in \underset{\sim}{J}$, (a et b entiers relatifs, $a \geqslant 1$) alors $\underset{\sim}{J}(a , b) \in \mathcal{C}$.

Démonstration. - Soit en effet u_n une suite linéairement récurrente non identiquement nulle à partir d'un certain rang, nous devons montrer que $\underset{\sim}{J}(a , b)$ est infini et que

$$\overline{\lim_{n\in\underset{\sim}{J}(a,b)}} |u_n|^{1/n} = \max_{\sigma=1,\ldots,s} |\theta_\sigma| = \mu$$

où le polynôme P associé à u_n se décompose dans $\underset{\sim}{C}$ selon la formule

$$P(z) = \prod_{\sigma=1}^{s} (z - \theta_\sigma) .$$

Considérons alors la suite v_n telle que

$$(3) \qquad v_n = \begin{cases} u_\nu & \text{si } n \text{ est de la forme } a\nu + b \text{ avec } \nu \in \underset{\sim}{N} , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si Q désigne le polynôme $Q(z) = P(z^a)$, on a évidemment, à partir d'un certain rang, $Q((v_n)) = 0$. Donc v_n est linéairement récurrente, soit

$$R(z) = \prod_{\tau=1}^{t} (z - \zeta_\tau)$$

son polynôme associé. R divise Q , donc les ζ_τ sont des racines a-ièmes des θ_σ . Mais, $\forall\ \sigma$, $\exists\ \tau$ tel que $\zeta_\tau^a = \theta_\sigma$ (supposons que cela soit faux, par exemple pour $\sigma = 1$. Alors si $P^*(z) = \prod_{\sigma>1} (z - \theta_\sigma)$, $Q^* = P^*(z^a)$, R divise Q^* donc $Q^*((v_n)) = 0$ à partir d'un certain rang, donc $P^*((u_n)) = 0$ à partir d'un certain rang, P^* divise P , donc contradiction puisque $P^* \neq P$). On a donc

$$\max_{\tau=1,\dots,t} |\zeta_\tau| = \Big(\max_{\sigma=1,\dots,s} |\theta_\sigma| \Big)^{1/a} = \mu^{1/a} .$$

En vertu de l'hypothèse $\underset{\sim}{J} \in \mathcal{C}$,

$$\overline{\lim_{n \in \underset{\sim}{J}}} |v_n|^{1/n} = \max_{\tau=1,\dots,t} |\zeta_\tau| = \mu^{1/a} .$$

Mais, comme $v_n = 0$ si n n'est pas de la forme $a\nu + b$ avec $\nu \in \underset{\sim}{N}$ et que $\mu^{1/a} \neq 0$, il en résulte que $\underset{\sim}{J}$ contient une infinité d'éléments de la forme $a\nu + b$, c'est-à-dire que $\underset{\sim}{J}(a , b)$ est infini (car il existe toujours une suite u_n du type de celle considérée, par exemple $u_n = 1$, $\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$).

On peut écrire alors

$$\overline{\lim_{a\nu+b \in \underset{\sim}{J}}} |v_{a\nu+b}|^{1/(a\nu+b)} = \mu^{1/a} ,$$

soit encore

$$\overline{\lim_{\nu \in \underset{\sim}{J}(a,b)}} |u_\nu|^{1/(a\nu+b)} = \mu^{1/a} ,$$

comme

$$1/(a\nu + b) \sim (1/a).(1/\nu) \quad \text{quand} \quad \nu \to \infty ,$$

on en déduit bien le résultat cherché.

Nous avons en même temps obtenu le critère suivant :

Critère nécessaire. - Pour que J appartienne à $\mathcal{C}$, il est nécessaire que tout ensemble $J(a, b)$ soit infini, c'est-à-dire que toute progression arithmétique contienne une infinité d'éléments de J ou ce qui revient au même contienne au moins un élément de J.

Remarque A. - Si, dans le même ordre d'idée, nous cherchions à caractériser l'ensemble $\mathcal{Q}$ des ensembles J tels que si une suite récurrente est nulle sur J, elle est identiquement nulle, alors, le critère nécessaire que nous venons d'énoncer est cette fois nécessaire et suffisant pour l'appartenance à $\mathcal{Q}$: nécessaire puisque si $J(a, b)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments, la suite u_n, vérifiant, pour n assez grand, $u_n = 1$ si $n = a\nu + b$ et $u_n = 0$ sinon, est évidemment récurrente nulle sur J et non identiquement nulle, suffisant en vertu d'un résultat bien connu de MAHLER [2].

Remarque B. - L'ensemble de tous les ensembles J satisfaisant au critère nécessaire (ensemble $\mathcal{Q}$ de la remarque précédente) satisfait, lui aussi, au critère d'invariance, car

$$[J(a, b)](c, d) = J(ac, ad + b) .$$

2.4. - Nous voyons que les questions de densité semblent avoir peu de rapport avec l'appartenance à l'ensemble $\mathcal{C}$ et, notamment du fait qu'un ensemble est de densité positive, on ne peut même pas déduire qu'il satisfait au critère nécessaire (sauf si cette densité est 1). Nous allons au contraire donner un critère suffisant d'appartenance qui peut être satisfait par des ensembles de densité nulle.

Critère suffisant. - Si J est tel que $\forall\, A \in \mathbb{N}$, $\exists$ A entiers consécutifs appartenant à J, alors J appartient à $\mathcal{C}$.

Démonstration. - Soit u_n une suite linéairement récurrente, non identiquement nulle à partir d'un certain rang, et soit

$$P(z) = \prod_{\sigma=1}^{s} (z - \theta_\sigma)$$

son polynôme associé.

Supposons les racines de P rangées par module décroissant :

$$|\theta_1| \geqslant |\theta_2| \geqslant \dots \geqslant |\theta_s|$$

et soit $\mu = |\theta_1|$. J satisfaisant au critère suffisant est nécessairement infini, il suffit donc de montrer que

$$\overline{\lim_{n \in J}} |u_n|^{1/n} = \mu .$$

Posons

$$Q(z) = \prod_{\sigma>1} (z - \theta_\sigma) \quad \text{si} \quad s > 1 ,$$

$$Q(z) = 1 \quad \text{si} \quad s = 1$$

et soit $v_n = Q((u_n))$, v_n est une suite à termes complexes qui satisfait à partir d'un certain rang soit par exemple n_0 à la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \theta_1 v_n \text{ , d'où, pour } n \geqslant n_0 \text{ , } v_n = \theta_1^{n-n_0} v_{n_0} .$$

v_{n_0} ne peut être nul, sinon v_n le serait, c'est-à-dire $Q((u_n)) = 0$ à partir d'un certain rang, or Q divise P et $Q \neq P$, on aurait donc une contradiction.

Mais alors

$$|v_n|^{1/n} \to \mu \quad \text{quand} \quad n \to \infty .$$

Or

$$|v_n| = |Q((u_n))| \leqslant C \max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n+i}| ,$$

C étant égal à la somme des valeurs absolues des coefficients de Q , donc indépendant de n . On a donc

$$\underline{\lim} \{ \max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n+i}| \}^{1/n} \geqslant \mu ,$$

soit encore

$$\underline{\lim} \max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n+i}|^{1/(n+i)} \geqslant \mu .$$

Mais, d'après (1)

$$\overline{\lim} \max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n+i}|^{1/(n+i)} = \mu ,$$

il en résulte que

$$\max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n+i}|^{1/(n+i)} \to \mu \quad \text{quand} \quad n \to \infty .$$

Considérons maintenant l'ensemble $\underset{\sim}{J}$: pour une infinité de valeurs de n , n , $n+1$, ... , $n+s-1$ appartiennent à $\underset{\sim}{J}$ (sinon le nombre de telles valeurs serait fini, soit N , et l'ensemble $\underset{\sim}{J}$ ne contiendrait pas d'ensemble de plus de Ns entiers consécutifs, ce qui est contraire à l'hypothèse sur $\underset{\sim}{J}$).

Il existe donc une suite n_k infinie telle que $n_k + i \in \underset{\sim}{J}$, $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$, $i = 0$, ... , $s-1$, alors

$$\overline{\lim_{n \in \underset{\sim}{J}}} |u_n|^{1/n} \geqslant \overline{\lim_{k \in \underset{\sim}{N}, i=0,\ldots,s-1}} |u_{n_k+i}|^{1/(n_k+i)} = \overline{\lim_{k \in \underset{\sim}{N}}} \max_{i=0,\ldots,s-1} |u_{n_k+i}|^{1/(n_k+i)} = \mu$$

Comme évidemment d'après (1)

$$\overline{\lim_{n \in \underset{\sim}{J}}} |u_n|^{1/n} \leqslant \mu ,$$

on a bien l'égalité, ce qui achève la démonstration.

Remarque. - Le critère suffisant n'est pas nécessaire : une démonstration analogue montrerait, par exemple, que pour que $\underset{\sim}{J}$ appartienne à $\underset{\sim}{C}$, il suffit que, $\forall A$, $\exists a \geqslant 1$, tel que $\forall b \in \underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{J}(a , b)$ contienne A entiers consécutifs, ou bien encore, $\forall A$ et $\forall m \in \underset{\sim}{N}$, $\exists a \geqslant 1$ premier avec m, et une infinité de $b \in \underset{\sim}{N}$ tels que $\underset{\sim}{J}(a , b)$ contienne A entiers consécutifs.

De toute manière, dans tous ces critères, ce qui permet de conclure, c'est l'existence dans $\underset{\sim}{J}$ ou dans ses transformés $\underset{\sim}{J}(a , b)$, de tranches assez longues d'entiers consécutifs : c'est à cette propriété que nous faisons appel pour caractériser dans le paragraphe suivant une nouvelle classe d'ensembles partiels d'entiers, les ensembles de fréquence donnée.

Remarquons encore que l'ensemble des ensembles $\underset{\sim}{J}$ satisfaisant au critère suffisant, satisfait aussi au critère d'invariance ; cet ensemble possède d'autres propriétés : par exemple, si un polynôme à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$ prend des valeurs entières quand la variable décrit $\underset{\sim}{J}$, il prend des valeurs entières quand la variable décrit $\underset{\sim}{Z}$, et de manière générale, si une suite linéairement récurrente prend des valeurs entières quand l'indice décrit $\underset{\sim}{J}$, son polynôme associé est à coefficients entiers (en vertu de la remarque faite au paragraphe 2.2, il suffit de répéter la démonstration précédente avec une valeur absolue non archimédienne).

3. Fréquence d'un ensemble. Application à la répartition modulo 1.

Définition. - Soit $\underset{\sim}{J} \subset \underset{\sim}{N}$ un ensemble partiel d'entiers. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des nombres réels $\geqslant 1$ tels que $A \in \mathfrak{A} \iff \forall x_0 > 0$, $\exists x \in \underset{\sim}{N}$, $x > x_0$ tel que $n \in \underset{\sim}{J}$ pour tout n entier vérifiant l'inégalité $x \leqslant n < Ax$. Nous appellerons fréquence de $\underset{\sim}{J}$ la borne supérieure (éventuellement infinie) des $A \in \mathfrak{A}$.

Remarque. - L'ensemble des ensembles de fréquence supérieure à A (ou supérieure ou égale) satisfait au critère d'invariance. D'autre part, si la densité supérieure d'un ensemble de fréquence A est au moins égale à $1 - 1/A$, par contre sa densité inférieure peut être nulle, et, en particulier, on voit aisément qu'un ensemble et son complémentaire peuvent être tous deux de fréquence infinie.

THÉORÈME A. - Soit θ un nombre algébrique réel > 1. Pour qu'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$, et un ensemble $\underset{\sim}{J}$ d'entiers, de fréquence infinie tels que

$$\overline{\lim_{n\in J}} \|\lambda\theta^n\| = 0 \qquad (\|x\| = \min_{k\in Z} |x - k|) ,$$

il faut et il suffit que θ appartienne à la classe T des entiers algébriques réels supérieurs à 1 dont tous les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1 .

THÉORÈME B. - Soit θ un nombre algébrique réel > 1 . Pour qu'il existe un nombre algébrique réel $\lambda \neq 0$, et un ensemble J d'entiers, de fréquence supérieure à 1 tels que

$$\overline{\lim_{n\in J}} \|\lambda\theta^n\| = 0 ,$$

il faut et il suffit que θ appartienne à la classe S des entiers algébriques réels supérieurs à 1 dont tous les autres conjugués ont un module strictement inférieur à 1 . En outre, λ appartient nécessairement au corps de θ .

Démonstration. - Nous allons d'abord établir que la condition donnée au théorème A est nécessaire ; nous donnerons ensuite des indications sur la démonstration de la réciproque, et du théorème B.

3.1. - Nous supposons que θ est racine du polynôme $P(z) = a_0 z^s + \ldots + a_s$ à coefficients entiers, primitif irréductible, et nous appelons $\theta_1 = \theta , \ldots , \theta_s$ les racines de P dans C . Nous pouvons supposer a_0 positif.

Nous devons montrer que $a_0 = 1$, et que $|\theta_\sigma| \leqslant 1$ pour $\sigma = 2 , \ldots , s$.

Posons

$$\varepsilon = 1/\sum_{i=0}^{s} |a_i| , \qquad \lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$$

où u_n est l'entier le plus voisin de $\lambda\theta^n$.

Par hypothèse, $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \in J \to \infty$, donc, dès que n est assez grand, $n \in J$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. Quitte à remplacer J par $J(1 , b)$ ce qui ne diminue pas la fréquence, on peut supposer que

$$(4) \qquad n \in J \implies |\varepsilon_n| < \varepsilon .$$

On peut de même supposer que $u_n \neq 0$ puisque $|u_n| = |\lambda\theta^n - \varepsilon_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$.

3.2. - Soient $A > 1$ et $x_0 > \frac{s + 1}{A - 1}$ deux nombres réels. Nous noterons $C_1 , C_2 , \ldots$ les constantes indépendantes du choix de A et de x_0 .

Par hypothèse sur l'ensemble J , $\exists\, m \in N$ tel que $m > x_0$ et $n \in J$ pour tout entier n de l'intervalle $m \leqslant n < Am$.

Nous posons $m' = [Am] - s$, $M = m' - m \geqslant 0$ en vertu du choix de x_0 .

Pour $m \leqslant n \leqslant m' + s$, on a $n \in \underset{\sim}{J}$, donc, d'après (4), $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, et par conséquent pour $m \leqslant n \leqslant m'$,

$$|P((\varepsilon_n))| \leqslant \Big(\sum_{i=0}^{s} |a_i|\Big) \max_{i=0,\dots,s} |\varepsilon_{n+i}| < 1 ,$$

Mais

$$P((u_n)) = P((\lambda\theta^n - \varepsilon_n)) = \lambda\theta^n P(\theta) - P((\varepsilon_n)) = - P((\varepsilon_n)) ,$$

d'où $|P((u_n))| < 1$.

P est à coefficients entiers, u_n est entier, donc aussi $P((u_n))$; on a donc :

$$\text{pour } m \leqslant n \leqslant m' , \qquad P((u_n)) = 0 . \tag{5}$$

3.3. - D'après (5), il existe alors un nombre algébrique $\varkappa \in \underset{\sim}{Q}(\theta)$, tel que, si $\varkappa_1 = \varkappa , \dots , \varkappa_s$ désignent les conjugués de $\varkappa$ dans l'isomorphisme de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$ en $\underset{\sim}{Q}(\theta_1) , \dots , \underset{\sim}{Q}(\theta_s)$ qui transforme θ en $\theta_1 , \dots , \theta_s$, on ait :

$$\text{pour } m \leqslant n \leqslant m' , \qquad u_n = \sum_{\sigma=1}^{s} \varkappa_\sigma \theta_\sigma^n \tag{6}$$

($\varkappa$ dépend évidemment du choix de A , x_0 et m).

Considérons alors le système de s équations à s inconnues

$$y_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \theta_\sigma^\nu , \qquad \nu = 0 , \dots , s - 1 . \tag{7}$$

C'est un système de Cramer (P étant irréductible), il se résoud donc par les formules

$$x_1 = \sum_{\nu=0}^{s-1} \gamma_\nu y_\nu , \tag{8}$$

où les γ_ν sont des nombres algébriques de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$ (pour les x_σ , on a des formules analogues en remplaçant les γ_ν par leurs conjugués).

3.4. - Considérons en particulier le système

$$u_{n+\nu} = \sum_{\sigma=1}^{s} \varkappa_\sigma \theta_\sigma^n \times \theta^\nu \quad (\nu = 0 , \dots , s - 1) \quad \text{pour} \quad m \leqslant n \leqslant m' .$$

On déduit de (8) que

$$\varkappa\theta^n = \sum_{\nu=0}^{s-1} \gamma_\nu u_{n+\nu} . \tag{9}$$

Soit alors $\mathfrak{M}$ l'ensemble des valeurs absolues de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$, et notons, pour $v \in \mathfrak{M}$,

$\alpha \in \underset{\sim}{Q}(\theta)$, $|\alpha|_v$ la valeur absolue de α , $||\alpha||_v = |\alpha|_v^{N_v}$ où N_v est le degré du complété de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$ pour la valeur absolue v sur le complété de $\underset{\sim}{Q}$ pour la même valeur absolue.

Si les valeurs absolues sont normalisées de manière habituelle, on a alors la formule du produit sur $\underset{\sim}{Q}(\theta)$:

$$\prod_{v \in \mathfrak{M}} ||\alpha||_v = 1 \qquad \text{si} \quad \alpha \neq 0 \ .$$

Désignons par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des valeurs absolues v telles que $\max_{\sigma=0,\dots,s-1} |\gamma_\nu|_v > 1$ ou bien telles que v soit archimédienne. Cet ensemble est fini.

Si $v \notin \mathfrak{S}$, v est non archimédienne, donc $|u_n|_v \leqslant 1$, $\forall\, n$ et on en déduit d'après (9)

(10) pour $m \leqslant n \leqslant m'$ $\qquad ||\varkappa\theta^n||_v \leqslant 1$, d'où $\qquad ||\varkappa\theta^m||_v \max(1 , ||\theta||_v^M) \leqslant 1$.

3.5. - Soit v_0 la valeur absolue ordinaire $|\theta|_{v_0} = |\theta| = \theta$, comme θ est réel, $N_{v_0} = 1$, et par conséquent

$$||\varkappa\theta^n||_{v_0} = |\varkappa\theta^n| = \Big|\sum_{\nu=0}^{s-1} \gamma_\nu\, u_{n+\nu}\Big| < C_1\, \theta^n \ .$$

Résolvons d'autre part, pour $m \leqslant n \leqslant m'$, le système

$$(\varkappa_1 - \lambda)\theta_1^{n+\nu} + \varkappa_2\, \theta_2^{n+\nu} + \dots + \varkappa_s\, \theta_s^{n+\nu} = -\,\varepsilon_{n+\nu} \qquad \nu = 0 , \dots , s-1 \ .$$

On obtient, pour la valeur absolue ordinaire, compte tenu du fait que $\varepsilon_{n+\nu}$ est borné,

(11) $\qquad |\varkappa_1 - \lambda|\ |\theta_1|^n < C_2 \ , \qquad |\varkappa_\sigma\, \theta_\sigma^n| < C_2$ pour $\sigma = 2 , \dots , s$.

$\mathfrak{M}$ contient des valeurs absolues archimédiennes dont l'une est v_0 et les autres sont les valeurs absolues ordinaires des conjugués des éléments de $\underset{\sim}{Q}(\theta)$.

Si v est une valeur absolue archimédienne différente de v_0 , on a donc, d'après (11),

(12) $\qquad |\varkappa\theta^n|_v < C_2 \implies ||\varkappa\theta^n||_v < C_3$ d'où $\qquad ||\varkappa\theta^m||_v \max(1 , ||\theta||_v^M) < C_3$.

Enfin, si v est non archimédienne, mais appartient à $\mathfrak{S}$, on a encore d'après (9)

(13) $\qquad ||\varkappa\theta^n||_v < C_4$, d'où $\qquad ||\varkappa\theta^m||_v \max(1 , ||\theta||_v^M) < C_4$.

En utilisant (10), (12), (13) et le fait que $\mathfrak{S}$ est fini et évidemment indépendant de A et x_0 , on obtient finalement

$$\prod_{v \neq v_0} \|\varkappa\theta^m\|_v \max(1 , \|\theta\|_v^M) < C_5 .$$

En appliquant la formule du produit, et en tenant compte de la majoration $\|\varkappa\theta^m\|_{v_0} < C_1 \theta^m$,

$$\prod_{v \neq v_0} \max(1 , \|\theta\|_v) < (C_6 \theta^m)^{1/M} . \tag{14}$$

Faisons tendre alors x_0 vers l'infini, M tend vers l'infini et m/M vers $1/(A - 1)$, faisons tendre maintenant A vers l'infini, on obtient à la limite

$$|a_0| \prod_{\sigma \neq 1} \max(1 , |\theta_\sigma|) = \prod_{v \neq v_0} \max(1 , \|\theta\|_v) \leqslant 1 ,$$

ce qui entraîne bien que θ est entier algébrique et que tous ses conjugués ont un module inférieur ou égal à 1 .

3.6. - Pour démontrer la réciproque, on voit en reprenant les calculs à l'envers qu'il suffit de trouver un $\lambda \neq 0$, des suites d'entiers m_k , m'_k telles que $m'_k/m_k \to +\infty$ quand $k \to \infty$, et une suite de nombres réels $\eta_k > 0$ tendant vers 0 quand $k \to \infty$, telles que $\forall\, k$, $\exists$ un entier algébrique $\varkappa \in \underset{\sim}{Q}(\theta)$ de conjugués $\varkappa_1 , \cdots , \varkappa_s$ vérifiant le système

$$|\varkappa_1 - \lambda|\theta^{m'_k} < \eta_k , \qquad |\varkappa_\sigma \theta_\sigma^{m_k}| < \eta_k \text{ pour } \sigma = 2 , \cdots , s . \tag{11'}$$

On y parvient en construisant λ comme somme d'une série d'entiers algébriques satisfaisant à certaines inégalités déduites de (11'), l'existence de ces entiers étant assurée grâce au théorème de Minkowski sur les solutions entières d'un système d'inégalités sur des formes linéaires : la démonstration distingue le cas où $\theta \in \mathbb{S}$ du cas où θ est un nombre de Salem (conjugués sur le cercle unité), ce dernier cas étant beaucoup plus compliqué. On peut démontrer alors le théorème suivant :

THÉORÈME C. - Si $\theta \in T$, il existe un ensemble $\underset{\sim}{J}$ de fréquence infinie tel que l'ensemble des $\lambda \neq 0$ pour lesquels

$$\|\lambda\theta^n\| \to 0 \text{ quand } n \in \underset{\sim}{J} \to \infty$$

a la puissance du continu.

3.7. - Pour montrer le théorème B, on reprend les inégalités (11), et on montre qu'elles ne peuvent être satisfaites que par un nombre fini de $\varkappa$, en utilisant le théorème de Roth sous la forme que donne LANG [1]. Pour une infinité de m ,

les inégalités (11) doivent donc être satisfaites pour le même nombre $\varkappa$, donc $\lambda = \varkappa_1$, et comme $\varkappa_\sigma \theta_\sigma^m$ doit tendre vers 0 quand $m \to \infty$ (pour $\sigma \neq 1$), $\varkappa_\sigma$ n'étant pas nul, on doit bien avoir $|\theta_\sigma| < 1$ pour tout $\sigma \neq 1$, ce qui est le résultat annoncé.

D'ailleurs, le cas particulier où $\theta \in \underset{\sim}{Q}$ se ramène aisément à un résultat démontré par MAHLER [3] : Si θ est rationnel, non entier, et supérieur à 1, si λ est algébrique non nul,

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \qquad \|\lambda\theta^n\| < \theta^{-\varepsilon n}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions en $n \in \underset{\sim}{N}$. (Le cas où θ est entier fournit un théorème de transcendance : par exemple, si $\theta = 10$, alors, si un nombre non rationnel λ est tel que son développement décimal est formé de 0 sur un ensemble de fréquence infinie, λ est transcendant.)

3.8. - Les ensembles de fréquence infinie interviennent dans d'autres questions où sont utilisées les suites récurrentes, par exemple dans l'étude des fonctions entières : on a ainsi le théorème suivant, généralisation d'un résultat classique de POLYA [4].

THÉORÈME D. - Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel, et supposons que $\forall\, \varphi \in [0\,,\, 2\pi[$, la quantité

$$\alpha(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \operatorname{Log} |f(re^{i\varphi})|$$

soit bornée par un nombre fixe strictement inférieur à $\operatorname{Log} 2$. Alors, si sur un ensemble J de fréquence infinie, $f(z)$ prend des valeurs entières, f est un polynôme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG (Serge). - Diophantine geometry. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 11).

[2] MAHLER (Kurt). - Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-koeffizienten rationaler Funktionen, Koninkl. Akad. Wet. Amsterdam, t. 38, 1935, p. 50-60.

[3] MAHLER (Kurt). - On the fractional parts of the powers of a rational number, II., Mathematika, t. 4, 1957, p. 122-124.

[4] POLYA (Georg). - Über ganze ganzwertige Funktionen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1920, p. 1-10.