Artibano Micali

Algèbres intègres et sans torsion

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A11_0>

ALGÈBRES INTÈGRES ET SANS TORSION

par Artibano MICALI

Un anneau est toujours commutatif à élément unité et un module sur un tel anneau, unitaire. De plus, le mot algèbre veut dire algèbre associative.

1. Préliminaires.

Soit A un anneau. Tout A-module M s'écrit comme quotient d'un A-module libre L, donc l'algèbre symétrique (cf. [2]) de M s'écrit

$$S(M) = S(L)/\mathfrak{q} ,$$

où $\mathfrak{q}$ est un certain idéal de l'anneau de polynômes $S(L)$. Dans certains problèmes, il s'agit de savoir si $\mathfrak{q}$ est premier (cf. [3]), ou encore si $S(M)$ est intègre. On connaît bien des exemples d'algèbres symétriques non intègres (cf. [3]). Nous donnerons dans ce papier une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre symétrique soit intègre, et nous l'appliquerons aux algèbres symétriques d'idéaux. En particulier, les algèbres symétriques intègres caractérisent les points simples sur une variété algébrique. Nous donnerons encore des résultats analogues pour les algèbres tensorielle et extérieure.

On remarque que, pour les algèbres symétriques, on a le lemme suivant qui est bien connu :

LEMME 1. - Soient A un anneau intègre, M un A-module et $S(M)$ son algèbre symétrique. Alors, $S(M)$ est intègre si et seulement si $S(M)$ est sans torsion.

En effet, soient K le corps de fractions de A, et $t(S(M))$ le sous-A-module de torsion de $S(M)$. La suite exacte

$$0 \to A \to K \to K/A \to 0$$

nous donne

$$0 \to t(S(M)) \to S(M) \to S(M) \otimes_A K \to S(M) \otimes_A (K/A) \to 0 ,$$

d'où le lemme.

2. Algèbres intègres et sans torsion.

Soient A un anneau noethérien intègre, et $S = \mathrm{Spec}(A)$ son spectre premier muni de la topologie spectrale (cf. [1]).

PROPOSITION 1. - *Soit* B *une* A-*algèbre. Alors* B *est une* A-*algèbre sans torsion si, et seulement si,* $B_{\mathfrak{p}}$ *est une* $A_{\mathfrak{p}}$-*algèbre (ou une* A-*algèbre) sans torsion pour tout* $\mathfrak{p}$ *dans* S .

En effet, c'est évident que, si B est sans torsion, alors $B_{\mathfrak{p}}$ l'est aussi pour tout $\mathfrak{p}$ dans S . D'autre part, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , et la formule $B_{\mathfrak{p}} = (B_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}}$ nous montre qu'on peut se borner aux idéaux maximaux. Le lemme de globalisation nous donne alors que B est sans torsion.

Remarque. - La proposition 1 est encore vraie, si B est tout simplement un A-module.

COROLLAIRE. - *Soit* M *un* A-*module. L'algèbre tensorielle* $T(M)$ *(resp. symétrique* $S(M)$ *, extérieure* $E(M)$ *) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre sans torsion) si, et seulement si,* $T(M_{\mathfrak{p}})$ *(resp.* $S(M_{\mathfrak{p}})$, $E(M_{\mathfrak{p}})$ *) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion), pour tout* $\mathfrak{p}$ *dans* S .

THÉORÈME 1. - *Soit* B *une* A-*algèbre noethérienne. Alors* B *est intègre si, et seulement si,* $B_{\mathfrak{p}}$ *est intègre pour tout* $\mathfrak{p}$ *dans* S .

En effet, puisque B est localement intègre, on n'a qu'à démontrer que $\mathrm{Spec}(B)$ est connexe, et ceci équivaut à dire que B n'a pas d'autres idempotents différents de 0 et 1 (cf. [1]). Soit e dans B un idempotent. Pour tout $\mathfrak{p}$ dans S , on a $e_{\mathfrak{p}} = 0$ ou $e_{\mathfrak{p}} = 1$, et si l'on désigne par U_0 (resp. U_1) l'ensemble des $\mathfrak{p}$ dans S tels que $e_{\mathfrak{p}} = 0$ (resp. $e_{\mathfrak{p}} = 1$), alors

$$S = U_0 \cup U_1 \qquad \text{et} \qquad U_0 \cap U_1 = \emptyset .$$

Etant donné que

$$U_0 = S - \mathrm{Supp}(Ae) \qquad \text{et} \qquad U_1 = S - \mathrm{Supp}(A(1 - e)) ,$$

alors U_0 et U_1 sont des ouverts de S , et comme S est connexe, il en résulte la proposition.

THÉORÈME 2. - *Soit* M *un* A-*module tel que* $T(M)$ *(resp.* $S(M)$, $E(M)$ *) soit sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion), et soit* M' *un sous-*A-*module de* M . *Alors* $T(M')$ *(resp.* $S(M')$, $E(M')$ *) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) si, et seulement si,* $T(M'_{\mathfrak{p}})$ *(resp.* $S(M'_{\mathfrak{p}})$, $E(M'_{\mathfrak{p}})$ *) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *contenant le radical de* M .

On va désigner par Rad(M) le radical de M , c'est-à-dire l'ensemble des éléments c dans A tels qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $c^n M \subset M'$. Si p est un idéal premier de A ne contenant pas Rad(M) , alors $M_p = M'_p$, et à ce moment là, $T(M'_p) = T(M)_p$, qui est déjà sans diviseurs de zéro. Le théorème résulte alors du théorème 1. La même démonstration est valable pour les algèbres symétrique et extérieure.

On peut donner des exemples où le théorème 2 n'est pas vérifié. Dans le cas de l'algèbre symétrique (par exemple), soient k un corps, $A = k[x , y]$ avec la relation $x^2 = y^3$ et $p = (x , y)A$ l'idéal de l'origine. L'anneau A est intègre, donc $S(A)$ l'est aussi, mais $S(p)$ n'est pas intègre.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A . <u>Alors</u> $T(\mathfrak{a})$ (<u>resp</u>. $S(\mathfrak{a})$, $E(\mathfrak{a})$) <u>est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) si, et seulement si,</u> $T(\mathfrak{a}A_p)$ (<u>resp</u>. $S(\mathfrak{a}A_p)$, $E(\mathfrak{a}A_p)$) <u>est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) pour tout idéal premier</u> p <u>contenant</u> $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.

Le corollaire ci-dessus nous dit, en particulier, que si q est un idéal premier de A , alors $T(q)$ (resp. $S(q)$, $E(q)$) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) si, et seulement si, $T(qA_p)$ (resp. $S(qA_p)$, $E(qA_p)$) est sans diviseurs de zéro (resp. intègre, sans torsion) pour tout idéal premier p de A contenant q . Donc, pour tout idéal maximal m de A , $T(m)$ est sans diviseurs de zéro si, et seulement si, $T(mA_m)$ est sans diviseurs de zéro. Un résultat analogue est vérifié pour les algèbres symétrique et extérieure.

On sait (cf. [3]) que si A est un anneau local d'idéal maximal m , alors A est local régulier si, et seulement si, $S(m)$ est intègre. On peut alors donner une forme plus générale à ce résultat, à savoir :

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien. Alors</u> A <u>est un anneau régulier si, et seulement si,</u> $S(m)$ <u>est intègre pour tout idéal maximal</u> m <u>de</u> A .

En particulier on voit que si k est un corps, V une k-variété, $k[V]$ son anneau de coordonnées, et p l'idéal premier d'un point p de V , alors p <u>est un point simple de</u> V <u>si, et seulement si,</u> $S(p)$ <u>est intègre</u>. En effet, tout point de V donne un point fermé de $\mathrm{Spec}(k[V])$.

3. Sur l'algèbre tensorielle.

Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau commutatif à élément unité.

LEMME 2. - <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A <u>et</u> $\alpha : \mathfrak{a} \to T(\mathfrak{a})$ <u>l'injection canonique</u>. <u>Si</u>

$$\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x) \neq 0$$

<u>où</u> x <u>et</u> y <u>sont dans</u> $\mathfrak{a}$, <u>alors</u>

$$\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x)$$

<u>est un élément de torsion de</u> $T(\mathfrak{a})$.

En effet, étant donné que

$$0 = \alpha(xy - yx) = x\alpha(y) - y\alpha(x) ,$$

et donc que $x\alpha(y) = y\alpha(x)$ pour x et y parcourant $\mathfrak{a}$, alors on a

$$\begin{aligned} x(\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x)) &= \alpha(x) \otimes (x\alpha(y)) - x\alpha(y) \otimes \alpha(x) \\ &= y(\alpha(x) \otimes \alpha(x) - \alpha(x) \otimes \alpha(x)) = 0 . \end{aligned}$$

LEMME 3. - <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module. Si l'épimorphisme canonique</u> $T(M) \to S(M)$ <u>est bijectif, alors</u> M <u>est localement monogène</u>.

Ceci est évident si A est un corps et si M est un espace vectoriel sur A . D'autre part, soit A local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps de restes $k = A/\mathfrak{m}$. Il en résulte que

$$T(M) \otimes_A k = S(M) \otimes_A k ,$$

donc

$$T(M/\mathfrak{m}M) = S(M/\mathfrak{m}M) ,$$

c'est-à-dire $M/\mathfrak{m}M$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 . Il existe alors un élément e dans M tel que $M = \mathfrak{m}M + Ae$, et le lemme de Nakayama nous donne alors que $M = Ae$.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$. <u>Alors</u> A <u>est un anneau de valuation discrète si, et seulement si,</u> $T(\mathfrak{m})$ <u>est sans torsion</u>.

En effet, si $T(\mathfrak{m})$ est sans torsion, alors $T(\mathfrak{m}) = S(\mathfrak{m})$ (d'après le lemme 2), donc, par le lemme 3, $\mathfrak{m}$ est principal. Ceci nous montre que A est un anneau de valuation discrète. Réciproquement, si A est un anneau de valuation discrète, $\mathfrak{m}$ est principal, donc $T(\mathfrak{m})$ est un anneau de polynômes en une indéterminée à coefficients dans A , donc intègre, c'est-à-dire sans torsion.

Soient A un anneau noethérien (non nécessairement local) et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Si $T(\mathfrak{p})$ est sans torsion, il en est de même de

$$T(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = T(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) ,$$

et ceci équivaut à dire que A_p est un anneau de valuation discrète. Mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, soient k un corps, $A = k[[x , y]]$ avec les relations $xy = y^2 = 0$ et $p = Ay$ l'idéal de A engendré par y. On voit que p est un idéal premier de A, car $A/p = k[[x]]$ est intègre et $pA_p = 0$. Puisque $A_p = A_p/pA_p$ est le corps de fractions de l'anneau A/p, alors $A_p = k((x))$, donc c'est un anneau de valuation discrète. D'autre part $T(p)$ contient p en degré 1, donc $T(p)$ a de la torsion. Toutefois, la réciproque est vraie si p est maximal. Plus précisément :

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien. Pour tout idéal maximal</u> m <u>de</u> A, A_m <u>est un anneau de valuation discrète si, et seulement si,</u> $T(m)$ <u>est sans torsion</u>.

En effet on n'a qu'à voir que, pour tout idéal maximal m de A, $T(m)$ est sans torsion si, et seulement si, $T(mA_m)$ est sans torsion.

Dans le cas des idéaux, il est facile de donner des exemples d'algèbres tensorielles ayant de la torsion. En effet, soit k un corps ; on considère dans l'anneau de polynômes $A = k[X_1 , \dots , X_n]$ un idéal premier homogène $p=(f_1,\dots,f_m)A$. Si $T(p)$ est sans torsion, alors $T(p) = S(p)$, donc $f_1 , \dots , f_m$ sont algébriquement indépendants sur k (cf. [4]). Il suffit alors de prendre $m > n$ pour avoir $T(p)$ avec de la torsion.

4. Sur l'algèbre extérieure.

Soient A un anneau commutatif, M un A-module, I l'idéal de $T(M)$ engendré par les tenseurs $x \otimes y - y \otimes x$, où x et y parcourent M, et J l'idéal de $T(M)$ engendré par les tenseurs $x \otimes x$, x parcourant M. Il est clair que, pour tout entier $q \geqslant 0$,

$$S_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap I \qquad \text{et} \qquad E_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap J .$$

Si $E_q(M) = 0$, alors on a

$$T_q(M) \subset J ,$$

donc

$$T_q(M) \cap I \subset I \cap J = 0 ,$$

c'est-à-dire $T_q(M) \cap I = 0$. Ceci nous montre que $T_q(M) = S_q(M)$. Donc si $E_q(M)= 0$ pour tout $q \geqslant 2$, alors $T(M) = S(M)$, et ceci entraîne, comme on sait déjà, que M est localement monogène.

LEMME 4. - <u>Soient</u> A <u>un anneau commutatif à élément unité, et</u> $\mathfrak{a}$ <u>un idéal de</u> A. <u>Si</u> A <u>est intègre, les</u> A-<u>modules</u> $E_q(\mathfrak{a})$ <u>sont de torsion pour</u> $q \geqslant 2$.

En effet, soit $\alpha : \mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ l'injection canonique. Pour tout vecteur de la forme $\alpha(x) \wedge \alpha(y)$ avec x et y dans $\mathfrak{a}$, on a

$$x(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) = y(\alpha(x) \wedge \alpha(x)) = 0 ,$$

car $x\alpha(y) = y\alpha(x)$. La même démonstration est valable pour des degrés supérieurs.

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$. <u>Alors,</u> $E(\mathfrak{m})$ <u>est sans torsion si, et seulement si,</u> A <u>est un anneau de valuation discrète</u>.

En effet, si A est un anneau de valuation discrète, $E(\mathfrak{m})$ est sans torsion. Supposons que $E(\mathfrak{m})$ soit sans torsion. Alors $E_q(\mathfrak{m}) = 0$ pour tout $q \geqslant 2$, et donc $S(\mathfrak{m}) \approx T(\mathfrak{m})$. Ceci nous montre que $\mathfrak{m}$ est principal, donc que A est un anneau de valuation discrète.

Soient maintenant A un anneau noethérien (non nécessairement local), $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et supposons que $E(\mathfrak{p})$ soit sans torsion. Alors, $E(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = E(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ est aussi sans torsion, et ceci équivaut à dire que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. Mais, $A_{\mathfrak{p}}$ de valuation discrète n'entraîne pas que $E(\mathfrak{p})$ soit sans torsion. Pour cela, on prend k un corps $A = k[[x , y]]$ avec les relations $xy = y^2 = 0$ et $\mathfrak{p} = Ay$. On a déjà vu que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète (car c'est un corps), mais $E(\mathfrak{p})$ contient $\mathfrak{p}$ en degré 1, qui a de la torsion. Cette réciproque est vraie si $\mathfrak{p}$ est maximal, c'est-à-dire, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 7. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien. Pour tout idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A, $A_{\mathfrak{m}}$ <u>est un anneau de valuation discrète si, et seulement si,</u> $E(\mathfrak{m})$ <u>est sans torsion</u>.

Il suffit de voir que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $E(\mathfrak{m})$ sans torsion équivaut à $E(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ sans torsion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chapitres 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[2] CHEVALLEY (Claude). - Fundamental concepts of algebra. - New York, Academic Press, 1956 (Pure and applied Mathematics, 7).

[3] MICALI (Artibano). - Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964, fasc. 2, p. 33-87.

[4] SALMON (Paolo). - Sulle algebre simmetriche e di Rees di un ideale. - Genova, Edizioni scientifiche, 1964.