Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-Pierre Kahane

Sur la répartition de $\{\lambda_j u\}$ modulo 1

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 20, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 20

SUR LA RÉPARTITION DE $\{\lambda_j u\}$ MODULO 1

par Jean-Pierre KAHANE

Un bon aperçu du sujet, avec références bibliographiques, se trouve dans l'article de J. CIGLER et G. HELMBERG [1]. Les recherches nouvelles, dont il sera question ici, sont dues à R. SALEM, H. HELSON et J.-P. KAHANE ([3], [4]).

Rappelons qu'une suite $\{\mu_j\}$ réelle $(j = 1 , 2 , \ldots)$ est dite <u>répartie modulo 1 suivant la mesure</u> $d\nu$ si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}$, à l'exception éventuellement d'un dénombrable (lorsque $d\nu$ n'est pas continue),

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N (\mu_j) = \int \varphi \, d\nu .$$

$\mathcal{C}$ désigne une classe de fonctions périodiques et de période 1 (nous dirons désormais fonctions définies sur le cercle) qui est, arbitrairement,

a. Celle des fonctions caractéristiques d'intervalles ouverts.

b. Celle des fonctions continues,

c. Celle des exponentielles imaginaires $\varphi_m(t) = e^{2\pi imt}$.

La définition la plus naturelle correspond à (a) ; celle qui correspond à (c) est très maniable ; leur équivalence, dans le cas où $d\nu$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle (on dit alors que $\{\mu_j\}$ est "équirépartie") constitue le célèbre critère de H. Weyl (1916).

I. - Convenons de dire que le nombre positif u est <u>normal</u> par rapport à la suite $\{\lambda_j\}$ réelle $\nearrow \infty$ $(j = 1 , 2 , \ldots)$ lorsque $\{\lambda_j u\}$ est équirépartie modulo 1 . Un théorème de H. Weyl (1916) affirme que, lorsque $\{\lambda_j\}$ est une suite strictement croissante d'entiers, presque tout $u > 0$ est normal. En d'autres termes, l'ensemble $W(\{\lambda_j\})$ des u non-normaux est de mesure lebesguienne nulle.

Indiquons quelques directions dans lesquelles il est possible d'améliorer ce résultat.

1° Si $\lambda_j = j^\sigma$, $0 < \sigma < 1$, $W(\{\lambda_j\}) = \emptyset$ (FEJER).

2° Si $\lambda_j = P(j)$, P étant un polynôme ayant deux coefficients incommensurables, $W(\{\lambda_j\}) = \emptyset$ (H. WEYL).

3° Si $\lambda_j = O(j^r)$ $(r \geqslant 1)$, la dimension de Hausdorff de $W(\{\lambda_j\})$ est $\leqslant 1 - 1/r$ (SALEM).

4° Si $\lambda_j = O(j)$, on peut améliorer ce résultat. Cependant, il existe des $\{\lambda_j\}$ satisfaisant cette condition tels que $W(\{\lambda_j\})$ ne soit pas dénombrable (ERDÖS-TAYLOR).

5° Si $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geqslant \delta_j > 0$, δ_j étant une suite positive décroissante telle que $\sum (j^3 \delta_j)^{-1/2} < \infty$ (par exemple $\delta_j = \frac{\log^{2+\varepsilon} j}{j}$), $W(\{\lambda_j\})$ est de mesure lebesguienne nulle. Il ne suffit pas, pour avoir ce résultat, que $\delta_j \geqslant 1/j$, comme le montre l'exemple $\lambda_j = \log j$, pour lequel $W(\{\lambda_j\}) =]0 , \infty[$.

II. - Convenons maintenant de dire que u est <u>anormal</u> par rapport à la suite $\{\lambda_j\}$ lorsque $\{\lambda_j u\}$ s'écarte de l'équirépartition dans le sens suivant : Il existe un ouvert dans le cercle, dont on notera φ la fonction caractéristique, tel que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_1^N \varphi(\lambda_j u) < \int \varphi(t)\, dt$$

ou

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_1^N \varphi(\lambda_j u) > \int \varphi(t)\, dt .$$

On notera alors $u \in A(\{\lambda_j\})$. On voit que, si $\{\lambda_j u\}$ admet une répartition, mais n'est pas équirépartie, u est anormal.

Si l'on fixe une suite Λ d'entiers > 0 , on peut aussi définir $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$ en remplaçant, dans la définition, $\overline{\lim}_{N\to\infty}$ (resp. $\underline{\lim}_{N\to\infty}$) par $\overline{\lim}_{N\in\Lambda, N\to\infty}$ (resp. $\underline{\lim}_{N\in\Lambda, N\to\infty}$). On voit alors que, pour tout $u \in W(\{\lambda_j\})$, il existe une suite Λ telle que $W(\{\lambda_j\}) \subset A_\Lambda(\{\lambda_j\})$. Ainsi $W(\{\lambda_j\})$ est contenu dans la réunion (non dénombrable !) des $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$.

Indiquons deux résultats sur les nombres anormaux, en nous restreignant au cas de λ_j entiers.

1° $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$ est de mesure nulle par rapport à toute mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro à l'infini (KAHANE-SALEM, [3]). Problème : Est-ce vrai pour $W(\{\lambda_j\})$?

2° Si $\lambda_j = O(j)$, ou plus généralement s'il existe des segments de longueurs arbitrairement grandes sur lesquels la densité (= nombre de points λ_j divisé par la longueur de l'intervalle) soit bornée inférieurement par un nombre >0 , et dont la réunion contient tous les λ_j , $A_\Lambda(\{\lambda_j\})$ est dénombrable. Cela n'est pas nécessairement vrai pour $W(\{\lambda_j\})$ (voir I. 4°).

III. - Convenons enfin de dire que u est <u>irrégulier</u> par rapport à $\{\lambda_j\}$, et notons $u \in E(\{\lambda_j\})$, si $\{\lambda_j u\}$ n'admet aucune répartition modulo 1 . Ainsi

$$E(\{\lambda_j\}) \subset W(\{\lambda_j\}) \quad \text{et} \quad W(\{\lambda_j\}) - E(\{\lambda_j\}) \subset A(\{\lambda_j\}) \subset W(\{\lambda_j\}) .$$

Quitte, dans la définition de la répartition, à remplacer $\lim\limits_{N\to\infty}$ par $\lim\limits_{N\in\Lambda, N\to\infty}$, on introduit de même $E_\Lambda(\{\lambda_j\})$. On voit que

$$E_\Lambda(\{\lambda_j\}) \subset E(\{\lambda_j\}) ,$$

et qu'à tout dénombrable D on peut faire correspondre une suite Λ telle que $D \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\}) = \emptyset$ (il suffit que, pour tout $u \in D$ et m entier, les moyennes $\frac{1}{N}\sum\limits_1^N e^{2\pi i m \lambda_j u}$ aient une limite quand $N \to \infty$ en restant dans Λ).

L'exemple I.2° montre que $E(\{\lambda_j\})$ peut être vide, pour certaines suites $\{\lambda_j\}$ à croissance polynomiale. On se restreint dans la suite à des $\{\lambda_j\}$ à croissance exponentielle ; plus précisément, on supposera toujours $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > q > 1$. Indiquons deux types de résultats.

1° La dimension de Hausdorff de $E_\Lambda(\{\lambda_j\})$ est 1 (simple adaptation de l'étude de ERDÖS et TAYLOR, relative à $W(\{\lambda_j\})$).

2° Soit K un compact sur $]0, \infty[$ tel que toute suite bornée $\{b_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ s'écrive, au moins pour j assez grand, sous la forme

$$b_j = \int_K e^{2\pi i \lambda_j t}\, d\beta(t) ,$$

$d\beta$ étant une mesure sur K convenablement associée à $\{b_j\}$; on dira alors que K est un compact <u>propre pour</u> $\{\lambda_j\}$. Alors

$$K \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\}) \neq \emptyset .$$

Par la remarque faite plus haut, **il en résulte** que $K \cap E(\{\lambda_j\})$ est non dénombrable (et aussi bien $K \cap E_\Lambda(\{\lambda_j\})$).

La preuve du 2° est très simple : si $u \notin E_\Lambda(\{\lambda_j\})$

$$\lim_\Lambda \frac{1}{N}\sum_1^N \varphi(\lambda_j u) = f(u)$$

existe pour $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. En intégrant par rapport à $d\beta$, ce qui est justifié si $K \subset CE_{\Lambda}(\{\lambda_j\})$, on obtient

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} b_j = \int f(u)\, d\beta(u) .$$

Mais on peut choisir $\{b_j\}$ de sorte que le premier membre n'ait pas de sens. Donc K n'est pas contenu dans $CE_{\Lambda}(\{\lambda_j\})$.

L'utilisation du 2° requiert une étude des compacts propres pour $\{\lambda_j\}$. Pour fixer les idées, bornons-nous à des compacts du type de Cantor, construits de la manière suivante : K est l'intersection de compacts K_j emboités, décroissants ; chaque K_j est réunion de 2^j segments égaux, et on passe de K_j à K_{j+1} en remplaçant chaque segment $(a , a + \ell)$ constituant K_j par les deux segments $(a , a + \xi_{j+1} \ell)$, $(a + \ell - \xi_{j+1} \ell , a + \ell)$. La donnée de $\xi_1 , \ldots , \xi_j , \ldots$ $(0 < \xi_j < 1/2)$ définit K à une homothétie près. Voici quelques résultats connus :

- Si, pour tout j , $\xi_j > \xi(q)$ assez voisin de $1/2$ (rappelons que $\{\lambda_j\}$ est supposée satisfaire $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} > q > 1$), K est propre pour $\{\lambda_j\}$ (KAHANE-WEISS-WEISS [2]).

- Si l'on choisit au hasard, et indépendamment les uns des autres, les ξ_j sur un intervalle (α , β) $(0 < \alpha < \beta < 1/2)$, K est presque sûrement propre pour $\{\lambda_j\}$.

- Par contre, si tous les ξ_j sont égaux $(\xi_j = \xi)$, et si $1/\xi$ est un nombre de la classe S de Pisot, il existe des suites $\{\lambda_j\}$ telles que K n'est pas propre pour $\{\lambda_j\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIGLER((J.) und HEIMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jahresb. Deutsch. Math. Verein., t. 64, 1962, p. 1-50.

[2] KAHANE (J.-P.), WEISS (M.) and WEISS (G.). - On lacunary power series, Arkiv för Matematik, t. 5, 1963, p. 1-26.

[3] KAHANE (J.-P.) and SALEM (R.). - Distribution modulo 1 and sets of uniqueness, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 259-261.

[4] KAHANE (J.-P.) and HELSON (H.). - A Fourier method in diophantine problems, J. Anal. math., Jérusalem (à paraître).