

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOISE BERTRANDIAS

Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p -adique

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 11, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES S_q
PAR LA RÉPARTITION MODULO 1 EN p -ADIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1. Définition des ensembles S .

On se propose de rechercher, pour les ensembles S_q , des caractérisations analogues à celles de l'ensemble S , au moyen de la répartition modulo 1 .

1.1 Rappelons la définition de S , ensemble des nombres de Pisot ([4], [8]) : un élément θ de S est un entier algébrique sur $\mathbb{Q}$, réel, supérieur à 1, dont tous les conjugués ont une valeur absolue strictement inférieure à 1 .

L'étude du comportement modulo 1 de $\lambda\theta^n$ permet de caractériser θ soit parmi les nombres réels, soit parmi les nombres algébriques :

THÉORÈME A. - Soit un nombre réel $\theta > 1$. θ appartient à S si et seulement s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\sum_{n=1}^N n((\lambda\theta^n))^2 = o(N) .$$

THÉORÈME B. - Soit un nombre algébrique réel $\theta > 1$. θ appartient à S si et seulement s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$((\lambda\theta^n)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

(Notation : pour un α réel : $\alpha = [[\alpha]] + ((\alpha))$ où $[[\]] \in \mathbb{Z}$ et $1/2 \leq ((\)) < 1$).

Remarque. - L'hypothèse du théorème A est vérifiée, par exemple si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda\theta^n))^2 < +\infty$$

ou si

$$|((\lambda\theta^n))| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) .$$

1.2 Rappelons la définition des ensembles S_q et $S_q^{(p)}$ [5]. Soit un poly-
nôme

$$P(x) = q x^s + q_1 x^{s-1} + \dots + q_0 \quad (q_i \in \mathbb{Z})$$

vérifiant les conditions :

(C) $q = \prod_{i \in \mathcal{J}} p_i^{e_i}$ (p_i i -ième nombre premier $\mathcal{J}$ ensemble fini d'indices distincts)
 $q_0 \neq 0$.

(C₀) $P(x)$ possède une racine réelle $\theta_0 > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ ont une valeur absolue < 1 .

(C_i) ($i \in \mathcal{J}$) $P(x)$ possède une racine θ_i dans $\mathbb{Q}_{p_i}$ et $|\theta_i|_{p_i} > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans Ω_{p_i} ont une valeur absolue p_i -adique ≤ 1

(Notations : $\mathbb{C}$ corps des complexes, $\mathbb{Q}_p$ corps des nombres p -adiques, Ω_p complétion de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$).

(F) Il existe un polynôme $A(x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ tel que :

$$|A(x)| \leq |P(\frac{1}{x})| \quad \text{pour } |x| = 1 \text{ dans } \mathbb{C} ,$$

$$|A(0)| \geq q \quad \text{et} \quad |A(0)|_{p_i} > |q|_{p_i} .$$

L'ensemble S_q est l'ensemble des nombres réels θ_0 racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C) , (C₀) , (C_i) et (F) .

L'ensemble $S_q^{(p_i)}$ est l'ensemble des nombres θ_i de $\mathbb{Q}_{p_i}$ racines d'un polynôme vérifiant les mêmes conditions.

Lorsque l'ensemble $\mathcal{J}$ est vide, l'ensemble $S_q = S_1$ est identique à l'ensemble S ((F) est vérifiée pour $A(x) = P(x)$).

C. PISOT a démontré que l'ensemble S_q est fermé dans $\mathbb{C}$ (ce qui généralise la propriété remarquable de S) ; et que $S_q^{(p_i)}$ est fermé dans $\mathbb{Q}_{p_i}$. Si l'on supprime la condition (F), on ne sait pas si les ensembles obtenus sont fermés.

1.3 Définition de l'ensemble S_{q^*} . - On peut définir simultanément les ensembles S_q de $\mathbb{R}$ et $S_q^{(p_i)}$ de $\mathbb{Q}_{p_i}$ en se plaçant dans le produit cartésien $\mathbb{R} \times \prod_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{Q}_{p_i}$, que l'on notera $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ ou, en abrégé $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$. Un élément

$\xi = (\xi_0, \dots, \xi_i, \dots)$ de $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ est défini par la donnée de ses composantes réelle ξ_0 , et p_i -adique ξ_i ($i \in \mathcal{I}$). La définition de l'addition et de la multiplication sur les composantes donne à $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ une structure d'anneau et

$$\|\xi\| = \sup\{|\xi_0|, |\xi_i|_{p_i}\}$$

définit une pseudo-valuation sur cet anneau

$$(\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0, \quad \|\xi + \xi'\| \leq \|\xi\| + \|\xi'\| \quad \text{et} \quad \|\xi\xi'\| \leq \|\xi\| \|\xi'\|).$$

DÉFINITION. - L'ensemble S_q^* est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$, de composantes réelle θ_0 et p_i -adique θ_i , qui sont racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C), (C_0) et $(\overline{C_i})$.

(" θ racine de $P(x)$ " signifie $P(\theta) = 0$, c'est-à-dire $P(\theta_0) = 0$, $P(\theta_i) = 0$ ($i \in \mathcal{I}$).) On remarque que les rationnels $\frac{n}{q}$ avec $n > q$ appartiennent à S_q^* .

Si l'on se limite aux éléments θ de S_q^* , tels que le polynôme $P(x)$ vérifie la condition (F), on obtient un ensemble fermé dans $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ muni de la pseudo-valuation $\|\cdot\|$, les composantes réelle S_q et p_i -adique $S_q^{(p_i)}$ de cet ensemble étant fermées respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_{p_i}$.

Dans la suite, on s'intéressera aux ensembles S_q^* , sans imposer la condition supplémentaire (F).

Dans le § 2, on définira une application de $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ dans les réels modulo 1, généralisant le reste modulo 1 de $\mathbb{R}$.

Dans le § 3, cette application permettra de généraliser à S_q^* les caractérisations A et B de S.

1.4 Définition de l'ensemble S_q . - Parallèlement à l'étude des ensembles S_q^* , on peut mener celle des ensembles S_q correspondant à une famille de polynômes $P(x)$ vérifiant les conditions (C), $(\overline{C_i})$ ($i \in \mathcal{I}$), et (C'_0) :

(C'_0) les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ ont une valeur absolue < 1 .

C. PISOT a montré [6] que la famille des fractions rationnelles $\frac{A(x)}{x^S P(1/x)}$

constitue une famille normale dans le cercle $|x| < 1$ de C , lorsque $P(x)$ vérifie les conditions (C), (C'_0) , $(\overline{C}_i)$ et (F).

On peut définir simultanément les racines θ_i de $P(x)$ dans Q_{p_i} en se plaçant dans le produit cartésien $\prod_{i \in \mathfrak{J}} Q_{p_i}$ que l'on notera $Q_{(p_i)_{i \in \mathfrak{J}}}$ ou, en abrégé, $Q_{(p_i)}$. Comme pour $Q_{(p_i)}^*$, on définit dans $Q_{(p_i)}$ une structure d'anneau, que l'on munit de la pseudo-valuation

$$\|\xi\| = \sup_{i \in \mathfrak{J}} |\xi_i|_{p_i}.$$

DÉFINITION. - L'ensemble S_q est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $Q_{(p_i)}$, de composante p_i -adique θ_i , qui sont racine d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C), (C'_0) et $(\overline{C}_i)$.

On remarque que les rationnels $\frac{n}{q}$ avec $|n| < q$ appartiennent à S_q .

Lorsque l'ensemble $\mathfrak{J}$ se réduit à un seul indice, on retrouve des ensembles étudiés par C. CHABAUTY [3] (ensemble C).

2. Propriétés des anneaux $Q_{(p_i)}$ et $Q_{(p_i)}^*$.

2.1 DÉFINITIONS. Soit $V(Q)$ l'ensemble des éléments $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ du produit cartésien de R par tous les corps p -adiques $(\xi_0 \in R, \dots, \xi_n \in Q_{p_n}, \dots)$ tels que $|\xi_n|_{p_n} \leq 1$, sauf, au plus, pour un nombre fini d'indices n . L'addition et la multiplication des composantes donnent à $V(Q)$ une structure d'anneau et

$$\|\xi\| = \sup \{ |\xi_0|, \dots, |\xi_n|_{p_n}, \dots \}$$

définit dans cet anneau une pseudo-valuation.

$V(Q)$ contient des sous-anneaux remarquables :

$\{\xi \in V(Q) : \xi_n = 0 \text{ si } n \geq 1 \text{ et } n \notin \mathfrak{J}\}$ sous-anneau isomorphe à $Q_{(p_i)}^*$, que l'on désignera par le même nom.

$\{\xi \in V(Q) : \xi_0 = 0, \xi_n = 0 \text{ si } n \notin \mathfrak{J}\}$ sous-anneau isomorphe à $Q_{(p_i)}$,

$\{\xi \in V(Q) : \xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_n = \dots = r \text{ avec } r \in Q\}$ sous-anneau isomorphe à Q que l'on notera encore par Q .

On notera $Z(p_i^\infty)_{i \in \mathfrak{J}}$ ou, en abrégé, $Z(p_i^\infty)$, l'anneau des rationnels de la forme

$$\frac{m}{\prod_{i \in I} (p_i)^{\lambda_i}} \quad (m, \lambda_i \in \mathbb{Z}) .$$

2.2 Théorème d'Artin [1]. Pour tout élément ξ de $V(Q)$, il existe une décomposition unique

$$\xi = H(\xi) + \varepsilon(\xi)$$

où $H(\xi)$ appartient à Q et $\varepsilon(\xi)$ est un élément de $V(Q)$ vérifiant les conditions :

$$-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_0(\xi) < \frac{1}{2}$$

$$|\varepsilon_n(\xi)|_{p_n} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

($\varepsilon_0(\xi)$, $\varepsilon_n(\xi)$ désignent les composantes réelle et p_n -adique de $\varepsilon(\xi)$).

Démonstration. - Dans Q_{p_n} , d'après le développement de Hensel de ξ_n , on a

$$\xi_n = \frac{m}{(p_n)^k} + \eta \quad \text{où } |\eta|_{p_n} \leq 1 ,$$

qu'on notera

$$\xi_n = H_{p_n}(\xi_n) + \eta_{p_n}(\xi_n) .$$

On remarque que $H_{p_n}(\xi_n)$ est unique modulo 1. Si $|\xi_n|_{p_n} \leq 1$, on prendra $H_{p_n}(\xi_n) = 0$ ($H_{p_n}(\xi_n) \neq 0$ pour un nombre fini de n).

En prenant

$$\varepsilon_0(\xi) = ((\xi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n))) ,$$

$$H(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n) + [(\xi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n))] ,$$

$$\varepsilon_n(\xi) = \eta_{p_n}(\xi_n) - \sum_{m \neq n} H_{p_m}(\xi_m) - [(\xi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} H_{p_n}(\xi_n))]$$

on obtient la décomposition cherchée.

Supposons qu'il existe deux décompositions distinctes $H(\xi) + \varepsilon(\xi) = H'(\xi) + \varepsilon'(\xi)$;

on a

$$-1 < \varepsilon_0 - \varepsilon'_0 < 1$$

$$|\varepsilon_n - \varepsilon'_n|_{p_n} \leq 1$$

d'où

$$|H - H'| \prod_{n=1}^{\infty} |H - H'|_{p_n} < 1$$

et $H - H'$ étant rationnel $H - H' = 0$.

COROLLAIRE 1. - Pour tout élément ξ de $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ ou de $\mathbb{Q}_{(p_i)}$, il existe une décomposition unique

$$\xi = H(\xi) + \varepsilon(\xi)$$

où $H(\xi)$ appartient à $\mathbb{Z}(p_i^\infty)$ et où $\varepsilon(\xi)$ est un élément de $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ vérifiant les conditions :

$$-1/2 \leq \varepsilon_0(\xi) < \frac{1}{2}$$

$$|\varepsilon_i(\xi)|_{p_i} \leq 1 \quad (i \in \mathfrak{J}) .$$

L'existence se déduit de l'expression de la décomposition trouvée dans le théorème d'Artin et l'unicité comme ci-dessus, en faisant intervenir dans la formule du produit seulement les valeurs absolues réelles et p_i -adiques ($i \in \mathfrak{J}$).

On remarque que si $\xi \in \mathbb{Q}_{(p_i)}$,

$$\varepsilon_0(\xi) = -H(\xi) ;$$

si l'ensemble $\mathfrak{J}$ est vide,

$$\mathbb{Q}_{(p_i)}^* = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0(\xi) = ((\xi)) .$$

COROLLAIRE 2. - L'anneau $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ (resp. $\mathbb{Q}_{(p_i)}$) est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la pseudo-valuation

$$\|\xi\| = \sup \{ |\xi_0| , |\xi_i|_{p_i} \}$$

(resp. $\|\xi\| = \sup \{ |\xi_i|_{p_i} \}$).

Démonstration. - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ pour la pseudo-valuation choisie.
En effet, on peut trouver un rationnel ξ tel que, pour un ξ choisi dans $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ (resp. $\mathbb{Q}_{(p_i)}$), on ait

$$\|\xi - r\| \leq \frac{1}{K}.$$

Il suffit de choisir deux entiers rationnels a et b tels que

$$|a|_{p_i} = 1 \quad (i \in \mathcal{J})$$

$$b = \prod_{i \in \mathcal{J}} (p_i)^{\lambda_i} \quad \text{avec} \quad (p_i)^{\lambda_i} \geq K$$

et

$$a \geq K \prod_{i \in \mathcal{J}} (p_i)^{\lambda_i}.$$

Alors $\|\frac{a}{b} \xi - H(\frac{a}{b} \xi)\| \leq 1$ entraîne

$$\frac{a}{b} |\xi_0 - \frac{b}{a} H| \leq 1 \quad \text{et} \quad (p_i)^{\lambda_i} |\xi_0 - \frac{b}{a} H|_{p_i} \leq 1.$$

D'où le résultat cherché en prenant $r = \frac{b}{a} H(\frac{a}{b} \xi)$.

2.3 Un élément α de $\mathbb{Q}_{(p_i)}^*$ ou de $\mathbb{Q}_{(p_i)}$, est dit algébrique sur $\mathbb{Q}$ s'il est racine d'un polynôme $P(x)$ de $\mathbb{Z}[x]$.

Soit $A(x)$ un polynôme de degré minimum n , tel que $A(\alpha) = 0$. Tout polynôme $B(x)$, tel que $B(\alpha) = 0$, est multiple de $A(x)$, comme on le voit en effectuant la division de B par A . $A(x)$ est unique, à un facteur près, et s'appelle polynôme minimal de α . α est dit algébrique de degré n .

Une composante α_0 ou α_i de α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_{p_i}$, de degré $\leq n$. Soient $A_0(x)$ le polynôme irréductible dont α_0 est racine, $A_i(x)$ le polynôme irréductible dont α_i est racine.

On a évidemment :

$$A(x) = \text{p. p. c. m. } \{A_0(x), A_i(x)\} \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{Q}_{(p_i)}^*$$

et

$$A(x) = \text{p. p. c. m. } \{A_i(x)\} \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{Q}_{(p_i)}.$$

$A(x)$ a donc toutes ses racines distinctes.

Remarque. - Un élément θ d'un ensemble S_{q^*} (§ 1.3) est par définition un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$. On voit facilement que le polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C), (C_0) et $(\overline{C}_1)$ (§ 1.2) est le polynôme minimal de θ . Supposons en effet que

$$P(x) = P^{(1)}(x) \cdot P^{(2)}(x)$$

où θ est racine de $P^{(1)}(x)$. D'après (C_0) , les racines de $P^{(2)}(x)$ dans C ont une valeur absolue < 1 . D'après $(\overline{C}_1)$, les racines de $P^{(2)}(x)$ dans Ω_{p_i} ont une valeur absolue p_i -adique ≤ 1 . Ceci, joint à la condition (C), entraîne :

$$P^{(2)}(x) = x^t + q_1^{(2)} x^{t-1} + \dots + q_t^{(2)},$$

où $q_h^{(2)} \in \mathbb{Z}$ et $q_t^{(2)} \neq 0$. D'où $|q_t^{(2)}| \geq 1$, ce qui est contradictoire avec le fait que toutes les racines dans C sont de valeur absolue < 1 .

On démontre de même que le polynôme $P(x)$ intervenant dans la définition d'un élément θ d'un ensemble S_q de $Q_{(p_i)}$ est le polynôme minimal de θ .

3. Caractérisation des ensembles S_{q^*} et S_q .

3.1 On obtient les deux théorèmes suivants, analogues aux caractérisations A et B de l'ensemble S , $\varepsilon_0(\xi)$ jouant dans $Q_{(p_i)^*}$ le rôle du reste modulo 1 dans R :

THÉORÈME A'. - Soit θ un élément de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que $\theta_0 > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble S_{q^*} (resp. S_q) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que

$$\sum_{n=1}^N n(\varepsilon_0(\lambda\theta^n))^2 = o(N).$$

THÉORÈME B'. - Soit θ un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que $\theta_0 > 1$, $(\theta_i|_{p_i}) > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble S_{q^*} (resp. S_q) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$)

tel que : $\varepsilon_0(\lambda\theta^n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3.2 Démonstration des parties directes. Soit θ un élément d'un ensemble S_{q*} de $Q(p_i)^*$. Le polynôme minimal de θ a toutes ses racines distinctes. On les notera :

$$\theta_0, \theta_0^{(2)}, \dots, \theta_0^{(s)} \text{ dans } C, \quad \theta_i, \theta_i^{(2)}, \dots, \theta_i^{(s)} \text{ dans } \Omega_{p_i}.$$

Posons

$$u_n = \theta_0^n + \theta_0^{(2)n} + \dots + \theta_0^{(s)n} = \theta_i^n + \theta_i^{(2)n} + \dots + \theta_i^{(s)n}.$$

Soit

$$\rho = \sup |\theta_0^{(2)}|, \dots, |\theta_0^{(s)}| < 1,$$

d'après la condition (C_0) ; on a

$$|\theta_0^n - u_n| \leq (s-1)\rho^n, \quad |\theta_i^{(n)} - u_n|_{p_i} \leq 1$$

d'après la condition $(\overline{C_i})$.

u_n appartient à $Z(p_i^{\infty})$ d'après la condition (C). Le théorème d'Artin montre donc que, pour n assez grand, $u_n = H(\theta^n)$. Donc

$$\varepsilon_0(\theta^n) = (\theta_0^{(2)n} + \dots + \theta_0^{(s)n}),$$

d'où

$$|\varepsilon_0(\theta^n)| \leq (s-1)\rho^n.$$

$\varepsilon_0(\theta^n)$ tend vers zéro comme une progression géométrique, ce qui démontre les parties directes des théorèmes A' et B' pour les ensembles S_{q*} .

Dans le cas de S_q , on a de manière analogue :

$$u_n = \theta_0^{(1)n} + \dots + \theta_0^{(s)n} = \theta_i^n + \dots + \theta_i^{(s)n}$$

et $u_n = H(\theta^n)$ d'après les conditions (C), (C_i) et $(\overline{C_i})$, avec $|u_n| < s\rho^n$. D'où le même résultat, puisque $\varepsilon_0(\theta^n) = -H(\theta^n)$.

3.3 Partie réciproque du théorème B'. Soit $A(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ ($a_i \in Z$) un polynôme dont θ est racine. La suite $\{\lambda\theta^n\}$ vérifie la relation de récurrence : $a_0(\lambda\theta^n) + a_1(\lambda\theta^{n-1}) + \dots + a_m(\lambda\theta^{n-m}) = 0$ ($n \geq m$).

Posons $H(\lambda\theta^n) = u_n$ et $\varepsilon(\lambda\theta^n) = \eta_n$ ($\eta_{0,n}$ et $\eta_{i,n}$ représentent les composantes de η_n). On a

$$\begin{aligned} V_n &= a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \dots + a_m u_{n-m} = - (a_0 \eta_{0,n} + \dots + a_m \eta_{0,n-m}) \\ &= - (a_0 \eta_{i,n} + \dots + a_m \eta_{i,n-m}) \quad (i \in \mathfrak{J}). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\varepsilon_0(\lambda\theta^n) = \eta_{0,n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'autre part

$$|\varepsilon_i(\lambda\theta^n)|_{p_i} = |\eta_{i,n}|_{p_i} \leq 1.$$

D'où

$$|V_n| \prod_{i \in \mathfrak{J}} |V_n|_{p_i} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme $V_n \in \mathbb{Z}(p_i^\infty)$, $V_n = 0$ pour $n > n_0$. Dans Ω_{p_i} ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i \theta_i^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{i,n} x^n,$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est le développement d'une fraction rationnelle, et où $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{i,n} x^n$ est analytique dans $|x|_{p_i} \leq 1$. Comme $\lambda_i \neq 0$ et $|\theta_i|_{p_i} > 1$, $1/\theta_i$ est un pôle de la fraction $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et les autres pôles ont une valeur absolue p_i -adique ≥ 1 . Il en résultera la condition $(\overline{C_i})$.

Dans $\mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0 \theta_0^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{0,n} x^n \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}(p_i)^*$$

et

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{0,n} x^n \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}(p_i),$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est le développement d'une fraction rationnelle, et où $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{0,n} x^n$ est analytique dans $|x| < 1$. Il en résulte que les inverses des pôles de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ (autres que θ_0 dans le 1er cas, grâce à la condition $\lambda_0 \neq 0$) sont de valeur absolue ≤ 1 . Or on sait que la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{0,n} x^n$, qui est telle que $\eta_{0,n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, ne peut avoir de pôle de valeur absolue égale à 1:

tous ses pôles sont de valeur absolue > 1 . La condition (C_0) ou (C'_0) , suivant le cas choisi, est donc vérifiée.

Soit $Q(x) = q + q_1 x + \dots + q_s x^s$ le dénominateur de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, mise sous forme irréductible et vérifiant : p. g. c. d. $(q, q_1, \dots, q_s) = 1$. La suite u_n vérifie la relation de récurrence :

$$q u_n + q_1 u_{n-1} + \dots + q_s u_{n-s} = 0 \quad (n > n_1) .$$

Or $u_n \in \mathbb{Z}(p_i^\infty)$, et si l'on pose

$$|\lambda_i|_{p_i} = (p_i)^{\ell_i}, \quad |\theta_i|_{p_i} = (p_i)^{t_i} \quad (t_i > 0)$$

et

$$L = \prod_{i \in \mathfrak{J}} (p_i)^{\ell_i}, \quad T = \prod_{i \in \mathfrak{J}} (p_i)^{t_i},$$

on a

$$u_n = \frac{u'_n}{L T^n} \quad \text{où } u'_n \in \mathbb{Z}$$

La suite (u'_n) vérifie la relation de récurrence :

$$q u'_n + q_1 T u'_{n-1} + \dots + q_s T^s u'_{n-s} = 0 .$$

Le théorème de Fatou montre que q divise le p. g. c. d. de $q_1 T, \dots, q_s T^s$ c'est-à-dire T . Il en résulte que q vérifie la condition (C).

3.4 Partie réciproque du théorème A'. Soit D_n le déterminant de Kronecker attaché à la suite $u_n = H(\lambda \theta^n)$:

$$D_n = \det(u_{h+k}) \quad 0 \leq h, k \leq n .$$

On majore les valeurs absolues ordinaire et p_i -adique de D_n en utilisant des combinaisons entre les colonnes définies, respectivement par

$$V_{0,n} = u_n - \theta_0 u_{n-1} \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)}^*$$

$$V_{0,n} = u_n \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)}$$

$$V_{i,n} = u_n - \theta_i u_{n-1} \quad (i \in \mathfrak{J}) ,$$

c'est-à-dire

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 V_{0,1} & \dots & V_{0,n} \\ u_1 V_{0,2} & \dots & V_{0,n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n V_{0,n+1} & \dots & V_{0,2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 V_{i,1} & \dots & V_{i,n} \\ u_1 V_{i,2} & \dots & V_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n V_{i,n+1} & \dots & V_{i,2n} \end{vmatrix}.$$

En reprenant les notations du § 3.3, on a :

$$V_{0,n} = -(\eta_{0,n} - \theta_0 \eta_{0,n-1}) \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)}^* \quad \text{et } V_{0,n} = -\eta_{0,n} \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)},$$

$$V_{i,n} = -(\eta_{i,n} - \theta_i \eta_{i,n-1}).$$

Cette dernière égalité entraîne

$$|V_{i,n}|_{p_i} \leq |\theta_i|_{p_i}.$$

D'où la majoration :

$$|D_n|_{p_i} < \left(\sup_{j=0,1,\dots,n} |u_j|_{p_i} \right) |\theta_i|_{p_i}^n.$$

D'autre part,

$$|u_n|_{p_i} = |\lambda_i|_{p_i} |\theta_i|_{p_i}^n.$$

D'où

$$(3.4.1) \quad |D_n|_{p_i} \leq |\lambda_i|_{p_i} |\theta_i|_{p_i}^{2n}.$$

Pour l'étude de la valeur absolue ordinaire, on utilise la majoration d'Hadamard :

$$(3.4.2) \quad |D_n|^2 \leq (u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2) (V_{0,1}^2 + \dots + V_{0,n+1}^2) \dots (V_{0,n}^2 + \dots + V_{0,2n}^2).$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique, on trouve :

$$\begin{aligned} (V_{0,1}^2 + \dots + V_{0,n+1}^2) \dots (V_{0,n}^2 + \dots + V_{0,2n}^2) &\leq \frac{(V_{0,1}^2 + 2V_{0,2}^2 + \dots + nV_{0,n}^2 + nV_{0,n+1}^2 + \dots + V_{0,2n}^2)^n}{n} \\ &\leq \left(2 \frac{V_{0,1}^2 + 2V_{0,2}^2 + \dots + 2nV_{0,2n}^2}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$\eta_{0,1}^2 + 2\eta_{0,2}^2 + \dots + N\eta_{0,N}^2 = o(N).$$

Il en résulte évidemment

$$V_{0,1}^2 + 2V_{0,2}^2 + \dots + NV_{0,N}^2 = o(N) .$$

Quel que soit le nombre positif ε , il existe donc un entier $N_0(\varepsilon)$ tel que, si $n > N_0(\varepsilon)$:

$$(3.4.3) \quad (V_{0,1}^2 + \dots + V_{0,n+1}^2) \dots (V_{0,n}^2 + \dots + V_{0,2n}^2) \leq \varepsilon^n .$$

Si $\theta \in Q_{(p_i)}$, $|u_n| \leq \frac{1}{2}$, d'où :

$$u_0^2 + \dots + u_n^2 \leq \frac{1}{4} (n+1) .$$

Si $\theta \in Q_{(p_i)}^*$, $|u_n| \leq |\lambda_0| |\theta_0|^n + 1 \leq C_0(\lambda_0, \theta_0) |\theta_0|^n$. D'où

$$u_0^2 + \dots + u_n^2 \leq C(\lambda_0, \theta_0) |\theta_0|^{2n} .$$

Ces inégalités, jointes aux inégalités (3.4.1), (3.4.2) et (3.4.3) entraînent

$$|D_n| \prod_{i \in J} |D_n|_{p_i} \leq \Gamma(\theta, \lambda) \Omega(\theta)^n \varepsilon^{n/2} \quad (n > N_0(\varepsilon)) .$$

Pour un choix convenable de ε le membre de droite est inférieur à 1 pour n assez grand. Comme $D_n \in Z(p_i^\infty)$, il en résulte : $D_n = 0$ à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) vérifie donc une relation de récurrence. L'étude de la fraction rationnelle de développement $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ dans C et dans Ω_{p_i} montre qu'elle admet pour pôle dans C : $\frac{1}{\theta_0}$ (si $\theta \in Q_{(p_i)}^*$) et pour pôle dans Ω_{p_i} : $\frac{1}{\theta_i}$. θ est donc un élément algébrique de $Q_{(p_i)}^*$ (ou de Q_{p_i}) : on est ramené aux hypothèses du théorème B', ce qui achève la démonstration.

4. Etude des ensembles $\mathcal{M}_{q^*}^j$ et $\mathcal{M}_q^j$.

L'étude du § 3 fait jouer un rôle particulier à la composante réelle $\eta_{0,n}$ de l'élément $\varepsilon_0(\lambda\theta^n)$ de $Q_{(p_i)}^*$. Dans le théorème d'Artin (§ 2.2), les composantes réelle et p_i -adique de $\varepsilon(\xi)$ jouent des rôles analogues. D'où l'idée de mener une étude parallèle à celle du § 3, en imposant des conditions, non plus à la composante réelle de $\varepsilon(\lambda\theta^n)$, mais à une composante p_i -adique particulière. On est ainsi amené à la définition des ensembles $\mathcal{M}$.

4.1 DÉFINITIONS. Par la suite, j désignera un indice particulier fixé de l'ensemble $\mathfrak{J}$.

(4.1.1) L'ensemble $\mathcal{M}_{q^*}^j$ est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $\mathbb{Q}_{(p_i)^*}$ de composantes réelle θ_0 et p_i -adique θ_i , qui sont racine d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions : (C) , $(\overline{C}_0)$, $(\overline{C}_i)$ (pour $i \in \mathfrak{J}$ et $i \neq j$), et (C_j) .

Les conditions (C) et $(\overline{C}_i)$ sont celles du § 1.2. Les conditions $(\overline{C}_0)$ et (C_j) sont les suivantes :

$(\overline{C}_0)$: $P(x)$ possède une racine réelle $\theta_0 > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue ≤ 1 ;

(C_j) : $P(x)$ possède une racine θ_j dans $\mathbb{Q}_{p_j}$ et $|\theta_j|_{p_j} > 1$; les autres racines de $P(x)$ dans $\mathbb{Q}_{p_j}$ ont une valeur absolue p_j -adique < 1 .

(4.1.2) L'ensemble $\mathcal{M}_q^j$ est l'ensemble des éléments θ de l'anneau $\mathbb{Q}_{(p_j)}$, de composante p_i -adique θ_i , qui sont racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions : (C) , $(\overline{C}'_0)$, $(\overline{C}_i)$ (pour $i \in \mathfrak{J}$ et $i \neq j$), et (C_j) .

Les conditions (C) et $(\overline{C}_i)$ sont celles du § 1.2. (C_j) est la condition du § (4.1.1). La condition $(\overline{C}'_0)$ est la suivante :

$(\overline{C}'_0)$: Les racines de $P(x)$ dans C ont une valeur absolue ≤ 1 .

Remarque. - Lorsque $\mathfrak{J}$ se réduit au seul indice j , on retrouve pour les ensembles $\mathcal{M}_q^j$ des ensembles étudiés par C. CHABAUTY [3] (ensemble $\mathfrak{B}$).

4.2 On obtient des caractérisations analogues à celles des ensembles $\mathfrak{S}$. Le théorème A" est dû à C. PISOT.

THÉORÈME A". - Soit θ un élément de $\mathbb{Q}_{(p_i)^*}$ (resp. $\mathbb{Q}_{(p_i)}$) tel que $\theta_0 > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble $\mathcal{M}_{q^*}^j$ (resp. $\mathcal{M}_q^j$) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $\mathbb{Q}_{(p_i)^*}$ (resp. $\mathbb{Q}_{(p_i)}$) tel que :

$$\sum_{n=1}^N n |\varepsilon_j(\lambda \theta^n)|_{p_j}^2 = o(N) .$$

THÉORÈME B". - Soit θ un élément algébrique de $\mathbb{Q}_{(p_i)^*}$ (resp. $\mathbb{Q}_{(p_i)}$) tel

que $\theta_0 > 1$, $|\theta_i|_{p_i} > 1$ (resp. $|\theta_i|_{p_i} > 1$). θ appartient à un ensemble $\mathcal{M}_{Q^*}^j$ (resp. $\mathcal{M}_Q^j$) si, et seulement s'il existe un élément inversible λ de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) tel que :

$$|\varepsilon_j(\lambda\theta^n)|_{p_j} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

4.3. Démonstration des parties directes des théorèmes A" et B". Soit θ un élément d'un ensemble $\mathcal{M}_{Q^*}^j$ de $Q_{(p_i)^*}$. On voit, comme dans le § 3.2, en faisant intervenir le polynôme minimal de θ , et en posant

$$u_n = \frac{1}{(p_j)^k} (\theta_0^n + \theta_0^{(2)n} + \dots + \theta_0^{(s)n}) = \frac{1}{(p_j)^k} (\theta_1^n + \dots + \theta_1^{(s)n}),$$

que $u_n = H(\frac{\theta^n}{(p_j)^k})$ pour $n > n_0$ (k entier positif, tel que $(p_j)^k > 2s$). Il en résulte :

$$\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{(p_j)^k}) = -\frac{1}{(p_j)^k} (\theta_j^{(2)n} + \dots + \theta_j^{(s)n}) \quad (n > n_0).$$

Or, d'après la condition (C_j') : $\rho_j = \sup \{ |\theta_j^{(2)}|_{p_j}, \dots, |\theta_j^{(s)}|_{p_j} \} < 1$. Donc,

$|\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{(p_j)^k})| \leq (\rho_j)^n$; $|\varepsilon_j(\frac{\theta^n}{(p_j)^k})|_{p_j}$ tend vers zéro comme une progression géométrique (partie directe du théorème A" ou B", avec le choix $\lambda = \frac{1}{(p_j)^k}$ dans le cas de

$\mathcal{M}_{Q^*}^j$). La démonstration est analogue dans le cas d'un élément θ d'un ensemble $\mathcal{M}_Q^j$.

4.4 Partie réciproque du théorème B". θ étant un élément algébrique de $Q_{(p_i)^*}$ (resp. $Q_{(p_i)}$) on montre, comme dans le § 3.3, que la suite $u_n = H(\lambda\theta^n)$ vérifie la même relation de récurrence linéaire à coefficients entiers que la suite $\lambda\theta^n$. On montre également de manière analogue les résultats suivants : dans $\mathbb{C}$, $1/\theta_0$ est un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et tous les autres pôles ont une valeur absolue ≥ 1 (resp. tous les pôles de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ ont une valeur absolue ≥ 1) ; dans Ω_{p_i} , $1/\theta_i$ est un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et tous les autres pôles ont une valeur absolue p_i -adique ≥ 1 .

Les conditions $(\overline{C}_0)$ et $(\overline{C}_i)$ ($i \in J$) en résultent. Il reste à démontrer (C_j) , c'est-à-dire : dans Ω_{p_j} les pôles de valeur absolue 1 sont exclus pour la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

La fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{j,n} x^n$ (notations du § 3.3) a tous ses pôles dans $|x|_{p_j} \geq 1$. De plus, $|\eta_{j,n}|_{p_j} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Soit ρ_j le maximum des valeurs absolues p_j -adiques des inverses des pôles de cette fraction ($\rho_j \leq 1$). On sait [2] qu'on peut trouver des constantes positives μ telles que

$$|\eta_{j,n}|_{p_j} = \mu \rho_j^n$$

pour une infinité de n positifs. L'hypothèse $|\eta_{j,n}|_{p_j} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ entraîne donc :

$$\rho_j < 1.$$

Le théorème B'' est démontré.

Remarque. - Les éléments θ de $\mathbb{M}_{q^*}^j$ dont le polynôme minimal $P(x)$ est irréductible sur Q sont tels que $P(x)$ vérifie la condition (C_0) , (plus forte que $(\overline{C}_0)$). En effet, si θ_0 avait un conjugué sur la circonférence $|x| = 1$ de C , le polynôme $P(x)$ serait réciproque. Dans Ω_{p_i} , par suite de la condition $(\overline{C}_i)$, toutes les racines de $P(x)$ autres que θ_i et $1/\theta_i$ appartiendraient à la circonférence $|x|_{p_i} = 1$ de Ω_{p_i} . Dans Ω_{p_j} , la condition (C_j) ne peut donc être vérifiée que si $P(x)$ est de degré 2 :

$$P(x) = qx^2 + q_1 x + q ;$$

mais dans ce cas (C_0) est également vérifiée.

Un raisonnement analogue montre la propriété suivante : les éléments θ de $\mathbb{M}_q^j$ dont le polynôme minimal $P(x)$ est irréductible sur Q sont tels que $P(x)$ vérifie la condition (C') , sauf si $P(x)$ est de degré 2 (et dans ce cas, $P(x) = qx^2 + q_1 x + q$ avec $q_1^2 - 4q^2 < 0$).

4.5 Partie réciproque du théorème A''. On utilise, comme dans le § 3.4, et avec les mêmes notations, le déterminant de Kronecker D_n .

Pour $i \in J$, $i \neq j$, on a la même majoration :

$$|D_n|_{p_i} \leq |\lambda_i|_{p_i} |\theta_i|_{p_i}^{2n}.$$

Pour la valeur absolue p_j -adique, on utilise la majoration :

$$|D_n|_{p_j} \leq \sup_{(i_0, i_1, \dots, i_n)} \{ |u_{i_0-1}|_{p_j} |v_{j,i_1}|_{p_j} \dots |v_{j,n-1+i_n}|_{p_j} \},$$

$(i_0, i_1, \dots, i_n)$ étant une permutation de $(1, 2, \dots, n+1)$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} n! |v_{j,i_1}|_{p_j}^2 \dots |v_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2 &\leq i_1 |v_{j,i_1}|_{p_j}^2 \times i_2 |v_{j,1+i_2}|_{p_j}^2 \times \dots \times i_n |v_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2 \\ &\leq \left(\frac{i_1 |v_{j,i_1}|_{p_j}^2 + i_2 |v_{j,1+i_2}|_{p_j}^2 + \dots + i_n |v_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2}{n} \right) n \end{aligned}$$

(en utilisant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique), or

$$i_1 |v_{j,i_1}|_{p_j}^2 + \dots + i_n |v_{j,n-1+i_n}|_{p_j}^2 \leq |v_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|v_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + 2n|v_{j,2n}|_{p_j}^2.$$

Il en résulte, comme $|u_m|_{p_j} \leq |\lambda_j|_{p_j} |\theta_j|^n$ pour $0 \leq m \leq n$,

$$|D_n|_{p_j} \leq |\lambda_j|_{p_j} |\theta_j|^n \left(\frac{|v_{j,1}|_{p_j}^2 + \dots + 2n|v_{j,2n}|_{p_j}^2}{2n} \right)^{n/2} \frac{1}{(n!)^{1/2}}.$$

Or, par hypothèse :

$$|v_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|v_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + n|v_{j,n}|_{p_j}^2 = o(n).$$

La relation : $v_{j,n} = -\eta_{j,n} + \theta_j \eta_{j,n-1}$ entraîne évidemment :

$$|v_{j,1}|_{p_j}^2 + 2|v_{j,2}|_{p_j}^2 + \dots + n|v_{j,n}|_{p_j}^2 = o(n).$$

Il en résulte :

$$|D_n|_{p_j} \leq |\lambda_j|_{p_j} |\theta_j|_{p_j}^n \varepsilon^n \frac{1}{(n!)^{1/2}} \quad \text{pour } n > N_0(\varepsilon).$$

Pour la valeur absolue ordinaire, on utilise la majoration d'Hadamard :

$$|D_n| \leq (|\lambda_0| + 1) (1 + \theta_0)^{2n} (n+1)^{n/2} \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)}^*,$$

$$|D_n| \leq \frac{1}{2} (n+1)^{(n+1)/2} \quad \text{si } \theta \in \mathbb{Q}_{(p_i)}.$$

D'où, dans tous les cas :

$$|D_n| \prod_{i \in \mathfrak{J}} |D_n|_{p_i} \leq \Gamma(\lambda, \theta) \Omega(\theta)^n \Omega(\varepsilon) \frac{(n+1)^{n/2}}{(n!)^{1/2}} \varepsilon^n$$

pour $n > N_0(\varepsilon)$.

On en déduit $D_n = 0$, à partir d'un certain rang θ , est donc un élément algébrique : on est ramené aux hypothèses du théorème B".

5. Généralisation des ensembles S_{q*} .

C. PISOT a défini dans [7] des ensembles S_q plus généraux que ceux définis dans le § 1.2, en admettant pour le polynôme $P(x)$ dans Ω_{p_i} plusieurs racines de valeur p_i -adique > 1 , et n'appartenant pas nécessairement à Q_{p_i} .

Il est possible d'obtenir des caractérisations analogues aux précédentes, si l'on impose aux racines de $P(x)$ de valeur absolue p_i -adique > 1 d'appartenir à des extensions algébriques fixées de Q_{p_i} .

5.1 DÉFINITIONS.

(5.1.1) On notera $Q_{p_i}(\alpha_1) \dots Q_{p_i}(\alpha_j) \dots Q_{p_i}(\alpha_{k_i})$, k_i -extensions algébriques distinctes de Q_{p_i} , et $A_* = R \times \prod_{i \in \mathfrak{J}} Q_{p_i}(\alpha_1) \times \dots \times Q_{p_i}(\alpha_{k_i})$ le produit cartésien de R par un nombre fini de corps $Q_{p_i}(\alpha_j)$. Les éléments de A_* seront notés $X = (X_0, \dots, X_{i,1}, \dots, X_{i,j}, \dots)$. X_0 est la composante de X dans R , $X_{i,j}$ la composante de X dans $Q_{p_i}(\alpha_j)$.

On notera $X \rightarrow T(X)$ l'application de A_* dans $Q(p_i)^*$ définie par :

$$T_0(X) = X_0, \quad T_i(X) = \sum_{j=1}^{k_i} \text{Tr}_{Q_{p_i}(\alpha_j)/Q_{p_i}}(X_{i,j})$$

($T_0(X)$ composante réelle de $T(X)$, $T_i(X)$ composante p_i -adique de $T(X)$).

(5.1.2) L'ensemble S_{q*} est l'ensemble des éléments Θ de l'anneau A_* racines d'un polynôme $P(x)$ vérifiant les conditions (C), (C_0) , (C_i) ($i \in \mathfrak{J}$) [Θ ayant pour composante dans R_i , Θ_0 , et dans $Q_{p_i}(\alpha_j)$, $\Theta_{i,j}$].

(C) et (C_0) sont les conditions du § 1.2. La condition (C_i) est la suivante : $(\overline{C_i})$: $P(x)$ possède une racine $\Theta_{i,1}$ dans $Q_{p_i}(\alpha_1)$ et $|\Theta_{i,1}|_{p_i} > 1$. $P(x)$

possède une racine Θ_{i,k_i} dans $\mathbb{Q}_{p_i}(\alpha_{k_i})$ et $|\Theta_{i,k_i}|_{p_i} > 1$. Les racines de $P(x)$ dans Ω_{p_i} , autres que les précédentes et leurs conjuguées respectives par rapport à $\mathbb{Q}_{p_i}$, ont une valeur absolue p_i -adique ≤ 1 .

5.2 On trouve les caractérisations suivantes de $\mathcal{G}_{q^*}$:

THÉORÈME A'' - Soit Θ un élément de l'anneau A_* tel que :

$$\Theta_0 > 1, \quad |\Theta_{i,j}|_{p_i} > 1 \quad (i \in \mathfrak{I}, \quad 1 \leq j \leq k_i) .$$

Θ appartient à un ensemble $\mathcal{G}_{q^*}$ si, et seulement s'il existe un élément inversible Λ de A_* tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_0(T(\Lambda\Theta^n)))^2 < +\infty .$$

THÉORÈME B'' - Soit Θ un élément algébrique de l'anneau A_* tel que $\Theta_0 > 1$, $|\Theta_{i,j}|_{p_i} > 1$ ($i \in \mathfrak{I}$, $1 \leq j \leq k_i$) . Θ appartient à un ensemble $\mathcal{G}_{q^*}$ si, et seulement s'il existe un élément inversible Λ de A_* tel que :

$$\varepsilon_0(T(\Lambda\Theta^n)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty .$$

5.3 Principe de la démonstration. Pour la démonstration des parties directes de ces théorèmes, on considère comme précédemment le rationnel u_n égal à la somme des puissances n -ièmes de toutes les racines de $P(x)$. Mais on n'a $u_n = H(T(\Theta^n))$ que dans le cas où $\Theta_{i,j}$ est un élément primitif du corps $\mathbb{Q}_{p_i}(\alpha_j)$ pour tout $i \in \mathfrak{I}$ et $1 \leq j \leq k_i$. Dans le cas général, $u_n = H(T(\Lambda\Theta^n))$ où les $\Lambda_{i,j}$ sont des rationnels et $\Lambda_0 = 1$.

Pour les majorations des valeurs absolues du déterminant D_n (partie réciproque du théorème A''), on utilise les combinaisons entre les colonnes définies par :

$$w_{i,n} = u_n + a_{i,1} u_{n-1} + \dots + a_{i,m} u_{n-m}$$

où le polynôme $x^m + a_{i,1} x^{m-1} + \dots + a_{i,m}$ de $\mathbb{Q}_{p_i}[x]$ a pour racines dans Ω_{p_i} : $\Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,j}, \dots, \Theta_{i,k_i}$ et leurs conjugués par rapport à $\mathbb{Q}_{p_i}$.

5.4 On peut de manière analogue définir, dans l'anneau

$$A = \prod_{i \in \mathfrak{I}} \mathbb{Q}_{p_i}(\alpha_1) \times \dots \times \mathbb{Q}_{p_i}(\alpha_{k_i}) ,$$

des ensembles $\mathcal{G}_q$ généralisant les ensembles $\mathcal{S}_q$ de $\mathbb{Q}(p_i)$ et on trouve encore les caractérisations A et B.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton, Princeton University, 1951 (multigraphié).
 - [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Séries de Taylor à coefficients rationnels, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 17, 11 p.
 - [3] CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.
 - [4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali di Mat., t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).
 - [5] PISOT (Charles). - Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 14, 12 p.
 - [6] PISOT (Charles). - Une famille normale de fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 4, 1962/63, n° 7, 6 p.
 - [7] PISOT (Charles). - Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1418-1419.
 - [8] SALEM (Raphael). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, D. C. Heath and Company, 1963 (Heath mathematical Monographs).
-