Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Roger Desq

Sous-modules isotypiques et sous-modules tertiaires d'un module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 25, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A12_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 25

22 avril et 4 mai 1964

SOUS-MODULES ISOTYPIQUES ET SOUS-MODULES TERTIAIRES D'UN MODULE

par Roger DESQ

1. Immersion d'un module dans un module injectif.

Les anneaux considérés dans cet exposé contiennent un élément unité ; les modules sont des modules à gauche unitaires.

DÉFINITION 1. - Un A-module M est dit injectif si, pour tout A-module Q, tout sous-module P de Q, et tout homomorphisme f de P dans M, il existe un homomorphisme $\overline{f}$ de Q dans M prolongeant f.

Remarquons qu'un module M, somme directe de deux sous-modules, est injectif si et seulement si ces deux sous-modules sont injectifs.

PROPRIÉTÉ 1. - Pour que M soit un A-module injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme f de I dans M, f soit réalisé par une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in M$ tel que

$$f(a) = ax_0 \quad \text{pour tout} \quad a \in I .$$

La condition est nécessaire, car f se prolonge en un homomorphisme $\overline{f}$ de A dans M, et l'on a

$$f(a) = \overline{f}(a) = \overline{f}(ae) = a\overline{f}(e) .$$

Montrons que la condition est suffisante. Soient un A-module Q, un sous-module P de Q et un homomorphisme f de P dans M. Considérons la famille $\mathfrak{F}$ des couples (P_ι , f_ι), où P_ι est un sous-module de Q contenant P, et f_ι un homomorphisme de P_ι dans M prolongeant f, avec la relation d'ordre définie par

$$(P_1 , f_1) \leqslant (P_2 , f_2) \iff P_1 \leqslant P_2 \quad \text{et} \quad f_2|P_1 = f_1 .$$

Cette famille est inductive et possède donc un élément maximal (P_0 , f_0). Si P_0 est différent de Q, soit $x \in Q$, $x \notin P_0$. Considérons l'idéal

$$I = P_0 \cdot x = \{a \in A \; ; \; ax \in P_0\}$$

et l'homomorphisme $i \to f_0(ix)$ de I dans M. Par hypothèse, il existe $m \in M$, tel que $f_0(ix) = im$. Posons, pour $x_0 \in P_0$, $\lambda \in A$,

$$\overline{f}(x_0 + \lambda x) = f_0(x_0) + \lambda m \; ;$$

on vérifie que $\overline{f}$ est un homomorphisme de $P_0 + Ax$ dans M qui prolonge f_0 ; ceci est contraire au choix de (P_0 , f_0) ; P_0 est donc égal à Q .

THÉORÈME 1. - Tout A-module peut être plongé dans un A-module injectif.

(Voir [1] [4] [5] [6].)

2. Enveloppe injective d'un module.

DÉFINITION 2. - M étant un sous-module du A-module E , on dit que E est une extension essentielle de M si, X étant un sous-module de E , la relation $M \cap X = 0$ implique $X = 0$.

REMARQUE 1. - Si trois A-modules M , P , E sont tels que $M \subset P \subset E$, E est extension essentielle de M si, et seulement si, E est extension essentielle de P , et P extension essentielle de M .

REMARQUE 2. - Un module E , contenant M , est une extension essentielle de M si, et seulement si, pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $a \in A$ tel que ax appartienne à $M - \{0\}$.

PROPRIÉTÉ 2. - Si M est sous-module injectif du module injectif N , toute extension essentielle E de M est isomorphe (relativement à M) à un sous-module de N contenant M . Si M est injectif, il ne possède pas d'extension propre essentielle.

Le plongement canonique de M dans N se prolonge en un homomorphisme f de E dans N , avec $\operatorname{Ker} f \cap M = 0$, et par suite $\operatorname{Ker} f = 0$.

En particulier, si M est injectif, on peut prendre $M = N$, et M ne possède pas d'extension propre essentielle.

Cette proposition montre que l'on peut se limiter à l'étude des extensions essentielles contenues dans un module injectif donné.

THÉORÈME 2. - M étant un A-module donné, il existe un A-module E , contenant M , défini, à un isomorphisme près, relativement à M , et ayant les propriétés suivantes équivalentes :

(a) E est une extension essentielle maximale de M .

(b) E est une extension essentielle de M , et E est facteur direct de toute extension de E .

(c) E est une extension essentielle injective de M .

(d) E est une extension injective minimale de M .

Existence. - Soit N une extension injective de M ; la famille des sous-modules de N, qui sont extension essentielle de M, est inductive et possède donc un élément maximal E. Aucune extension propre de E n'est extension essentielle de M ; sinon, ce serait une extension essentielle de E, et il en existerait une image isomorphe relativement à E dans N ; celle-ci serait aussi une extension essentielle de M, contrairement au choix de E.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit F une extension de E, et soit E' un sous-module maximal tel que $E \cap E' = 0$ (existence assurée par le théorème de Zorn). On a

$$F/E' \supseteq (E + E')/E' \simeq E .$$

Par construction, F/E' est une extension essentielle de $(E + E')/E'$. E n'admettant pas d'extension essentielle propre, on a

$$F = E + E' , \qquad E \cap E' = 0 .$$

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soit N une extension injective de E ; E est facteur direct dans N et, par suite, est injectif.

(c) $\Longrightarrow$ (d). - Soit P une extension injective de M contenue dans E ; alors E est extension essentielle de P et, par suite, $P = E$.

(d) $\Longrightarrow$ (a). - Si E n'était pas extension essentielle de M, E contiendrait proprement une extension essentielle injective de M puisque (a) $\Longrightarrow$ (d), contrairement à la minimalité de E. D'autre part, E ne possède pas d'extension propre essentielle d'après la propriété 2, et constitue donc une extension essentielle maximale de M.

M-isomorphisme. - Soient E et E' deux extensions de M ayant les propriétés précédentes. D'après la propriété 2,, E' est isomorphe relativement à M à un sous-module E'' de E contenant M. Mais E est une extension injective minimale de M, et on a $E'' = E$.

COROLLAIRE. - Pour qu'un module soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans toutes ses extensions.

Ceci résulte de l'équivalence de (b) et (d).

DÉFINITION 3. - Un module E satisfaisant aux propriétés du théorème 3 s'appelle l'enveloppe injective de M, et se note $E(M)$.

EXEMPLE 1. - Soit A un anneau intègre, ayant un élément unité, tel que 0 ne soit pas l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls ; il existe alors un corps K, contenant A, et qui est le corps des quotients à gauche ([2]), ensemble des

éléments $b^{-1} a$, avec $a , b \in A$, $b \neq 0$.

Nous allons montrer que K est l'enveloppe injective de A considéré comme A-module à gauche.

K est une extension essentielle de A ; en effet si $b^{-1} a \in K - \{0\}$, $b(b^{-1} a) \in A - \{0\}$ (remarque 2 après la définition 2).

Pour montrer que K est un A-module injectif, nous allons utiliser la propriété 1. Soient Λ un idéal à gauche de A , et φ un A-homomorphisme de Λ dans K . Si $\lambda \in \Lambda - \{0\}$, on peut écrire $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda^{-1} \varphi(\lambda))$. Si $\lambda , \mu \in A^*$, $A\lambda \cap A\mu$ est différent de $\{0\}$; il existe donc un élément ν non nul avec $\nu = a\lambda = b\mu$, d'où

$$\lambda^{-1} \varphi(\lambda) = \lambda^{-1} a^{-1} \varphi(a\lambda) = \nu^{-1} \varphi(\nu) = \mu^{-1} b^{-1} \varphi(b\mu) = \mu^{-1} \varphi(\mu) .$$

Donc $x = \lambda^{-1} \varphi(\lambda)$ est indépendant de λ et φ est bien réalisé par une homothétie.

3. Sous-modules isotypiques.

DÉFINITION 5. - On dit qu'un A-module M est <u>indécomposable</u> si ses seuls facteurs directs sont 0 et M .

PROPRIÉTÉ 3. - <u>Soit M un A-module. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) 0 <u>est $\cap$-irréductible dans</u> M .

(b) <u>L'enveloppe injective</u> $E(M)$ <u>est indécomposable</u>.

(c) $E(M)$ <u>est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de</u> M .

(a) $\Longrightarrow$ (b) . - Si $E(M)$ est décomposable, on a $E(M) = E_1 \oplus E_2$, avec $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$. On en déduit :

$$X_1 = E_1 \cap M \neq 0 , \qquad X_2 = E_2 \cap M \neq 0 , \qquad X_1 \cap X_1 \subseteq E_1 \cap E_2 = 0 .$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) . - Soit N un sous-module non nul de M . $E(N)$ peut être considéré comme sous-module de $E(M)$; $E(N)$ est injectif et facteur direct de $E(M)$, d'où $E(N) = E(M)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . - Si $0 = X_1 \cap X_2$, où X_1 et X_2 sont deux sous-modules non nuls de M , $E(M)$ ne peut être extension essentielle de X_1 .

COROLLAIRE. - <u>Pour que deux A-modules M_1 et M_2 , dans lesquels le sous-module nul est inter-irréductible, aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut</u>

et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de M_1 isomorphe à un sous-module non nul de M_2 .

La condition est suffisante d'après l'équivalence de (a) et (c) ; elle est nécessaire ; en effet, si $E(M_1)$ est isomorphe à $E(M_2)$, M_2 est isomorphe à un sous-module M_1' de $E(M_1)$, et l'on a

$$M_1' \cap M_1 \neq 0 .$$

$M_1' \cap M_1$ est isomorphe à un sous-module de M_2 .

THÉORÈME 3. - Soient M un A-module, $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$ une décomposition d'un sous-module X comme intersection d'un nombre fini de sous-modules $\cap$-irréductibles sans élément superflu. $E(M/X)$ est somme directe de n-sous-modules isomorphes respectivement aux enveloppes injectives indécomposables des modules M/X_i .

Soit φ_i l'application canonique de M/X dans M/X_i ;

$$\varphi(m) = (\varphi_1(m) , \ldots , \varphi_n(m))$$

est une injection de M/X dans $M/X_1 \oplus \ldots \oplus M/X_n$, donc dans

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/X_i) .$$

Il nous suffit d'établir que E est une extension essentielle de $\varphi(M/X)$. Par hypothèse, $\forall\, i$, il existe $m \in \bigcap_{j \neq i} X_j$ et $m \notin X_i$, et par suite,

$$N_i = \varphi(M) \cap M/X_i \text{ est différent de } 0 .$$

D'après la propriété 3, $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de N_i . Soit x un élément de E , $x = (x_1 , \ldots , x_n)$. Pour toute composante non nulle x_i , il existe $a_i \in A$ tel que $a_i x_i \in N_i - \{0\}$, et par suite, il existe $s \in A$ tel que $sx \in \varphi(M/X) - \{0\}$. Ceci prouve que E est extension essentielle de $\varphi(M/X)$.

Remarque. - Les décompositions du théorème 3 existent pour tout X , si M est noethérien ou artinien.

Pour la démonstration d'un cas particulier du théorème d'Azumaya, nous allons utiliser le théorème de Kuroš-Ore.

THÉORÈME 4. - Soit L un treillis modulaire. Si

$$a = x_1 \cap \ldots \cap x_r = x_1' \cap \ldots \cap x_s'$$

sont deux décompositions d'un élément a en éléments $\cap$-irréductibles sans élément superflu, on a $r = s$.

LEMME 1. - Si L est modulaire, les applications $x \rightsquigarrow u \cup x$, $y \rightsquigarrow v \cap y$, sont deux applications réciproques entre

$$[u \cap v \ , \ v] \quad \text{et} \quad [u \ , \ u \cup v] \ .$$

(Vérification immédiate.)

LEMME 2. - Dans les conditions du théorème 4, on peut remplacer chaque x_i par un x'_j convenable.

Posons

$$y_i = x_1 \cap \dots \cap x_{i-1} \cap x_{i+1} \cap \dots \cap x_r \ ; \qquad x_i \cap y_i = a \ .$$

Formons les éléments $z_j = y_1 \cap x'_j$. On a

$$y_i \geqslant z_j \geqslant a$$

et

$$z_j \leqslant x'_j \implies a \leqslant z_1 \cap \dots \cap z_s \leqslant x'_1 \cap \dots \cap x'_s = a \ .$$

Puis

$$[a = x_i \cap y_i \ , \ y_i] \simeq [x_i \ , \ x_i \cup y_i]$$

et, comme x_i est $\cap$-irréductible dans le deuxième treillis, a est $\cap$-irréductible dans le premier ; par suite, il existe j avec $a = z_j$.

Pour finir de démontrer le théorème, supposons $r \leqslant s$; remplaçons les x_i par $x'_{j(i)}$ successivement ; il vient

$$a = x'_{j(1)} \cap \dots \cap x'_{j(r)} \ ,$$

ce qui donne $s \leqslant r$, d'où $s = r$.

THÉORÈME 5. - Soit M un A-module. Pour deux décompositions de M en somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \dots \oplus M'_{n'} \ ,$$

on a $n = n'$, et il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1 \ , 2 \ , \dots \ , n\}$ telle que M_i soit isomorphe à $M'_{\sigma(i)}$ pour tout i .

Posons

$$X_i = M_1 \oplus \dots \oplus M_{i-1} \oplus M_{i+1} \oplus \dots \oplus M_n \ ,$$

$$X'_{i'} = M'_1 \oplus \dots \oplus M'_{i'-1} \oplus M'_{i'+1} \oplus \dots \oplus M'_n$$

Les sous-modules X_i , $X'_{i'}$ sont $\cap$-irréductibles d'après la propriété 3, car on a,

par exemple, $M/X_i \simeq M_i$ qui est un module injectif indécomposable.

D'autre part, on a

$$0 = X_1 \cap \ldots \cap X_n = X'_1 \cap \ldots \cap X'_{n'}$$

ces décompositions étant sans élément superflu, d'où résulte $n = n'$.

Récurrence sur n. - Le résultat est évident pour $n = 1$. D'après le lemme 2 du théorème 4, on a

$$0 = X'_{\sigma(1)} \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = X'_{\sigma(1)} \cap M_1 ,$$

et par suite

$$M_1 \simeq (M_1 + X'_{\sigma(1)})/X'_{\sigma(1)} .$$

Mais ceci est un sous-module injectif non nul de $M/X'_{\sigma(1)} \simeq M'_{\sigma(1)}$; on en déduit

$$M'_1 \simeq M'_{\sigma(1)} .$$

De plus, on a $M = M_1 \oplus X'_{\sigma(1)}$, ce qui entraîne :

$$X'_{\sigma(1)} \simeq M/M_1 \simeq X_1 .$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux modules isomorphes X_1 et $X'_{\sigma(1)}$.

COROLLAIRE. - Deux décompositions d'un module injectif M comme somme directe d'un nombre fini de sous-modules injectifs indécomposables se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de M.

Remarque. - Cette propriété est encore vérifiée si M est une somme directe infinie de sous-modules injectifs indécomposables.

PROPRIÉTÉ 4. - Si A est un anneau noethérien à gauche, tout A-module injectif M est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

A étant noethérien à gauche, toute somme directe même infinie de modules injectifs est un module injectif (propriété 1). Soit C un sous-module maximal somme directe de sous-modules injectifs indécomposables de M ; C est injectif. On a $M = C \oplus C_1$ et, si $C_1 \neq 0$, prenons $x \in C_1 - \{0\}$; soit $O(x)$ l'annulateur de x ; comme A est noethérien, on a

$$O(x) = X_1 \cap \ldots \cap X_n ,$$

où les X_i sont des idéaux irréductibles de A, la décomposition étant sans élément superflu.

D'après le théorème 3, on a

$$E(Ax) \simeq E(A/O(x)) \simeq E(A/X_1) \oplus \dots \oplus E(A/X_n) ,$$

et $E(Ax) \subseteq C_1$, car C_1 est injectif.

$C \oplus E(A/X_1) \oplus \dots \oplus E(A/X_n)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables, ce qui contredit le caractère maximal de C ; on a donc $M = C$.

4. Décomposition en sous-modules isotypiques.

DÉFINITION 5. - On dit que X est un sous-module isotypique de M si l'enveloppe injective de M/X est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes ; la classe π d'isomorphie de tous les facteurs directs indécomposables de $E(M/X)$ s'appelle le type de I ; I est dit π-isotypique.

PROPRIÉTÉ 5. - L'intersection de deux sous-modules π-isotypiques est un sous-module π-isotypique.

Soit $X = X_1 \cap X_2$, X_1 et X_2 étant π-isotypiques. On a

$$E(M/X) \subseteq E(M/X_1) \oplus E(M/X_2) ;$$

$E(M/X)$ étant facteur direct dans $E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$, la propriété en résulte d'après le théorème 5.

Cette propriété et le théorème 3 donnent :

THÉORÈME 6. - Tout sous-module X d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques.

Le théorème 5 donne :

THÉORÈME 7. - Soient deux décompositions réduites :

$$X = I_1 \cap \dots \cap I_n = I'_1 \cap \dots \cap I'_{n'}$$

d'un même sous-module X comme intersection de sous-modules isotypiques. On a $n = n'$, et les types des I_i sont les mêmes que les types des $I'_{i'}$.

Nous considérons toujours un A-module M noethérien ou artinien. Nous supposons, de plus, que la $(\mathcal{C})$-algèbre des sous-modules de M satisfait à l'axiome D . (Voir [3].)

Rappel. - $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M/X) \iff \mathcal{P}$ est un résiduel essentiel de $X \iff \exists\, Y$, avec $X \subset Y \subseteq M$, tel que, $\forall\, Z$, $X \subset Z \subseteq Y$, on ait $\mathcal{P} = X \,{}^{\circ}.\, Z$. Le sous-module

Q est tertiaire si, et seulement si, $\mathrm{Ass}(M/Q)$ ne contient qu'un seul élément.

Remarque. - Si E est un module injectif indécomposable, $\mathrm{Ass}(E)$ contient un élément et un seul. En effet $\mathrm{Ass}(E)$ n'est pas vide et, si $\mathcal{P}_1 = 0 \,\dot{.}\, X_1$, $\mathcal{P}_2 = 0 \,\dot{.}\, X_2$,

$$E = E(X_1) \implies X_1 \cap X_2 \neq 0 \implies \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 .$$

THÉORÈME 8. - Si $E(M/X) \simeq E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, on a

$$\mathrm{Ass}(M/X) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(E_i) .$$

Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M/X)$; on a $\mathcal{P} = X \,\dot{.}\, Y$, $Y/X \subseteq M/X$, d'où $E(Y/X) \subseteq E(M/X)$; d'après le théorème 5, il existe un $E_i' \simeq E_i$, avec $N_i = E_i' \cap Y/X \neq 0$; on a donc $0 \,\dot{.}\, N_i = \mathcal{P}$, et $\mathcal{P}$ appartient à $\mathrm{Ass}(E_i') = \mathrm{Ass}(E_i)$.

Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(E_i)$, $E_i \subseteq E(M/X) \implies E_i \cap M/X \neq 0$; il existe $N_i \subset E_i \cap M/X$ tel que $\mathcal{P} = 0 \,\dot{.}\, N$ pour $0 < N \leqslant N_i$; on en déduit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(M/X)$.

Ce théorème donne immédiatement :

PROPRIÉTÉ 6. - Pour que le sous-module X de M soit tertiaire, il faut et il suffit que les facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective de M/X aient tous le même idéal premier associé.

PROPRIÉTÉ 7. - Tout sous-module isotypique est tertiaire.

PROPRIÉTÉ 8. - Deux sous-modules isotypiques de même type ont même idéal premier associé.

Le théorème 8 montre aussi que l'intersection de deux sous-modules $\mathcal{P}$-tertiaires est un sous-module $\mathcal{P}$-tertiaire. Il prouve donc l'existence des décompositions réduites comme intersection de sous-modules tertiaires.

Les réciproques des propriétés 7 et 8 sont inexactes comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 2. - Soient R le corps des nombres réels, et $R(y)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans R et à une variable y. Considérons les polynômes à coefficients dans $R(y)$ et à une variable x non permutable avec les coefficients, et imposons les relations :

$$x\, f(y) = f(y)\, x + f'(y) ,$$

où $f'(y)$ désigne la dérivée de $f(y)$ par rapport à y. Nous obtenons un anneau

A dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme :

$$P(x) = f_n(y)\, x^n + f_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \dots + f_1(y)\, x + f_0(y) \ .$$

Tout idéal à gauche de A est principal : il est engendré par chacun de ses polynômes de degré minimum. Par suite, A est noethérien à gauche.

A n'a pas de diviseur de zéro, l'idéal 0 est donc premier. Il est aussi $\cap$-irréductible à gauche. En effet, supposons que nous ayons deux idéaux à gauche non nuls X et Y avec $0 = X \cap Y$; il en résulte

$$(a| \cap (b| = 0 \qquad (a \in X \ , \ (a| = \text{ idéal à gauche engendré par } a \ ).$$

Considérons la suite $I_n = (ab| + \dots + (ab^n|$; c'est une suite croissante d'idéaux, il existe donc n , a' , a'_1 , ... , $a'_n \in (a|$, avec $a'b^{n+1} = a'_1\, b + \dots + a'_n\, b^n$; nous supposons de plus que n est minimum. On en déduit

$$(a'b^n - a'_1 - \dots - a'_n\, b^{n-1})b = 0 \ .$$

A étant intègre et $b \neq 0$, on a

$$a'b^n - a'_2\, b - \dots - a'_n\, b^{n-1} = a'_1 \ ;$$

mais alors :

$$a'_1 \in (a| \cap (b| = 0 \ ,$$

d'où

$$a'b^n = a'_2\, b + \dots + a'_n\, b^{n-1} \ ,$$

ce qui contredit la minimalité de n .

L'enveloppe injective de A est donc isomorphe à son corps des quotients à gauche K (Exemple 1). 0 est donc un idéal isotypique de type K .

L'anneau A n'a pas d'idéaux bilatères autres que A et 0 ; en effet, si $P(x)$ appartient à un idéal bilatère I ,

$$Q(x) = P(x)\, f(y) - f(y)\, P(x)$$

est un polynôme non nul si $f(y)$ n'est pas constant, et de degré plus petit que le degré de P . Par suite, puisque A est unitaire, tous ses idéaux à gauche propres sont 0-premiers à droite. Il en est ainsi en particulier des idéaux à gauche $X_a = (x - a|$, avec $a \in \underset{\sim}{R}(y)$, qui sont maximaux, donc $\cap$-irréductibles. Ces idéaux à gauche sont donc isotypiques et ont 0 pour idéal premier associé.

Pourtant ils ne peuvent être du même type que l'idéal 0 ; en effet, si $E(A/X_a) \simeq K$, il existe $B \subset K$ avec $B \simeq A/X_a$, B étant un A-module ; mais ceci est impossible, car tout élément de B a pour annulateur 0 , alors que l'annula-

teur de l'élément 1 de A/X_a est X_a. La réciproque de la propriété 8 est donc inexacte.

A/X_a est un A-module simple, donc A/X_a et A/X_b $(a \neq b)$ ne peuvent être de même type car ils sont simples et non isomorphes (corollaire, propriété 3).
$X = X_a \cap X_b$ est un idéal 0-premier à droite mais non isotypique, car

$$E(A/X) = E(A/X_a) \oplus E(A/X_b) .$$

La réciproque de la propriété 7 est donc inexacte.

PROPRIÉTÉ 9. - Si A est un anneau commutatif noethérien, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de A et les A-modules injectifs indécomposables.

Soit E un A-module injectif indécomposable ; soit $\{\mathcal{P}\} = \mathrm{Ass}(E)$. On a

$$\mathcal{P} = \mathrm{Ann}(Ax) , \quad Ax \subset E ; \quad Ax \simeq A/\mathcal{P} \quad \text{et} \quad E = E(Ax) = E(A/\mathcal{P}) .$$

Inversement, si $\mathcal{P}$ est un idéal premier de A, $\mathcal{P}$ est $\cap$-irréductible, $E(A/\mathcal{P})$ est injectif, indécomposable. De plus, si

$$E(A/\mathcal{P}_1) \simeq E(A/\mathcal{P}_2) ,$$

d'après le corollaire de la proposition 3, il existe un sous-module non nul de $A/\mathcal{P}_1$ isomorphe à un sous-module de $A/\mathcal{P}_2$; ce sous-module a pour annulateur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et par suite

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 .$$

La réciproque de la propriété 8 est donc valable lorsque A est un anneau noethérien commutatif.

PROPRIÉTÉ 10. - Soit Q un sous-module tertiaire du A-module M. Pour qu'il soit isotypique, il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

(H) Les idéaux à gauche de A qui sont annulateurs d'un sous-ensemble du A-module M/Q vérifient la condition de chaîne descendante.

On peut supposer que Q n'est pas $\cap$-irréductible. Soit alors $Q = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, décomposition en modules irréductibles sans élément superflu.

$$E(M/Q) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M/X_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i .$$

Nous allons montrer, si $\{\mathcal{P}\} = \mathrm{Ass}(M/Q)$, que $\mathcal{P}$ est un sous-module isotypique de A de type E_i, et ceci pour tout i.

Il existe $N \subseteq E_i \cap M/Q$, avec $\mathcal{P} = \operatorname{Ann} N$, d'où

$$\mathcal{P} = \bigcap_{x \in N} \operatorname{Ann} x \quad \text{et} \quad (H) \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{P} = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{Ann} x_j \ .$$

Considérons l'homomorphisme φ de $A/\mathcal{P}$ dans $\bigoplus_{j=1}^{r} Ax_j$, défini par

$$\varphi(\overline{a}) = (ax_1 \ , \ \dots \ , \ ax_j \ , \ \dots \ , \ ax_n)$$

où a est un représentant de la classe $\overline{a}$; φ est un monomorphisme. On en déduit,

$$E(A/\mathcal{P}) \subseteq \bigoplus_{j=1}^{r} E(Ax_j) \ ,$$

mais $E_i = E(N) = E(Ax_j)$ (propriété 3), ce qui donne le résultat cherché.

PROPRIÉTÉ 11. - <u>Soit</u> A <u>un anneau noethérien à gauche, et soit</u> (H') .

(H') <u>Si</u> α <u>est un idéal à gauche de</u> A <u>et si</u> $\mathcal{P}$ <u>est l'annulateur de</u> A/α , <u>il existe un nombre fini d'éléments</u> $x_1 \ , \ \dots \ , \ x_r$ <u>de</u> A/α <u>tels qu'on ait</u>

$$\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ann} x_i \ .$$

<u>Si la condition</u> (H') <u>est satisfaite, il existe une correspondance bijective entre modules injectifs indécomposables et idéaux premiers bilatères.</u>

C'est la correspondance qui, à un module injectif indécomposable E , fait correspondre son idéal premier associé $A(E)$.

Si $\mathcal{P}$ est un idéal premier, considérons

$$E(A/\mathcal{P}) = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k \ ;$$

soit M_k un sous-module de E_k qui a pour annulateur $A(E_k)$; le sous-module $M_k \cap A/\mathcal{P}$ $(\neq 0)$ a pour annulateur $\mathcal{P}$ ainsi que (E_k) ; on a donc

$$\mathcal{P} = A(E_k) \ .$$

Soient E_1 et E_2 deux modules injectifs indécomposables qui ont même idéal premier associé :

$$A(E_1) = A(E_2) = \mathcal{P} \ .$$

Il existe $N \subset E_1$, N sous-module principal, donc $N \simeq A/\alpha$, avec $A(E_1) = \operatorname{Ann} N$: la démonstration de la propriété 10 montre alors que $E(A/A(E_1))$ est un module injectif somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes à E_1 . On en déduit

$$E_1 \simeq E_2 \ .$$

PROPRIÉTÉ 12. - L'hypothèse (H) est vérifiée quel que soit Q, sous-module tertiaire de M, dans l'un des cas suivants :

(1) L'anneau A est artinien à gauche.

(2) Tous les idéaux à gauche de A sont bilatères.

(3) Le module M est noethérien, et l'anneau A est un module à gauche de type fini sur le centre de A.

Cas (1) : évident.

Cas (2) : $Q \cdot x$ est un idéal à gauche, donc bilatère, et par suite,

$$Q \cdot x = Q \cdot Ax ;$$

la condition (H) résulte alors de la condition (D) des $\mathcal{T}$-algèbres.

Cas (3) : Si C désigne le centre de l'anneau A, le A-module M est un C-module noethérien. K étant un sous-ensemble quelconque de M, considérons les sous-modules $Q \cdot (Q \cdot K)$ de ce C-module. Puisqu'ils vérifient la condition de chaîne ascendante et que l'on a

$$Q \cdot K = Q \cdot [Q \cdot (Q \cdot K)] ,$$

les idéaux à gauche $Q \cdot K$ de A vérifient la condition de chaîne descendante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1 : Equivalence, opérations, groupes, anneaux. 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[3] GRAPPY (Jacques). - Eléments tertiaires d'une ($\mathcal{T}$)-algèbre, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 24, 7 p.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[5] NORTHCOTT (D. G.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1960.

[6] RENAULT (Guy). - Sur les anneaux non commutatifs, III et IV, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 15, 1961/62, 6 et 7 p.