Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

MICHEL LAZARD

Complexes de Wall

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1963-1964), exp. nº 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 9

3 février 1964

COMPLEXES DE WALL

par Michel LAZARD

On rencontre fréquemment, en algèbre homologique, des complexes doubles ou "complexes de complexes" : voir, par exemple, [1], [2] . La suite spectrale de Hochschild-Serre [3] relative aux extensions de groupes est un cas particulier de la suite spectrale des foncteurs composés [2] et, à ce titre, s'obtient à partir de filtrations de complexes doubles.

Il est cependant des questions où l'on désire appliquer la "méthode directe" de Hochschild-Serre [3] ; celle-ci est assez compliquée. Une construction due à C.T.C. Wall [5] permet de la simplifier. Nous allons exposer cette construction, qui s'applique à d'autres catégories additives que celle des modules [4] . Pour simplifier, nous ne parlerons ici que de modules.

1. Complexes de chaînes ; résolutions projectives.

Le mot "module" signifiera module à gauche unitaire sur un anneau commutatif A (que nous cesserons, provisoirement, de mentionner). Un complexe de chaînes $X_\bullet$ est constitué par une famille de modules X_n , $n \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $d_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ vérifiant les conditions

$$d_{n-1} \circ d_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \,;$$
$$X_n = 0 \quad \text{pour } n < 0 \,.$$

[On peut évidemment indexer les X_n par les entiers positifs, mais cela complique les notations en fin de compte] .

Un morphisme de complexes $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est une famille de morphismes $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ qui commute avec les différentielles d^X et d^Y des deux complexes :

$$d_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^X \,, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \,.$$

On définit l'homologie $H_*(X_\bullet)$ d'un complexe par la formule usuelle :

$$H_n(X_\bullet) = \mathrm{Ker}\ d_n \,/\, \mathrm{I_m}\ d_{n+1}$$

Un morphisme $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ définit les morphismes $f_n^* : H_n(X_\bullet) \longrightarrow H_n(Y_\bullet)$.

A tout module M on associe le complexe $M_\bullet$, défini par $M_o = M$ et $M_n = 0$ pour $n \neq 0$. Un complexe $X_\bullet$ sur M est un complexe muni d'un morphisme

$$\varepsilon : X_\bullet \longrightarrow M_\bullet \ .$$

On peut sans inconvénient identifier le morphisme de complexes ε au morphisme de modules

$$(\varepsilon_o =)\ \varepsilon\ : X_o \longrightarrow M\ ,$$

qui est dit augmentation de $X_\bullet$ (on doit avoir $\varepsilon \circ d_1 = 0$) . Le complexe $X_\bullet$ sur M est dit une résolution acyclique de M si l'augmentation ε induit un isomorphisme des homologies, autrement dit si la suite

$$\dots\ X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

est exacte. Une résolution acyclique projective de M est une résolution acyclique $X_\bullet$ dont tous les modules X_n sont projectifs (autrement dit, les foncteurs $\mathrm{Hom}\ (X_n, Y)$ sont exacts en Y) .

On a le théorème classique suivant, qui, avec le théorème dual, est à la base de la théorie des foncteurs dérivés [1] , prop. 1.2, p. 77 .

(i) Tout module M possède une résolution acyclique projective.

(ii) Si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de modules (identifié au morphisme des complexes associés $M_\bullet$ et $N_\bullet$) , si $X_\bullet$ (resp. $Y_\bullet$) est une résolution acyclique projective de M (resp. N) pour l'augmentation ε^X (resp. ε^Y) , alors il existe un morphisme de complexes $g : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ tel que

$$\varepsilon^Y \circ g = f \circ \varepsilon^X \ .$$

(iii) <u>Si</u> g <u>et</u> g' <u>sont deux morphismes de</u> $X_\bullet$ <u>dans</u> $Y_\bullet$ <u>tels que</u> $\varepsilon^Y \circ g = \varepsilon^Y \circ g' = f \circ \varepsilon^X$, <u>alors</u> g <u>et</u> g' <u>sont homotopes. Cela signifie qu'il existe une famille de morphismes</u> $s_n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$ <u>tels que</u>

$$g_n - g'_n = s_{n-1} \circ d_n^X + d_{n+1}^Y \circ s_n \quad , \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z} .$$

2. <u>Complexes de Wall ; définitions, énoncé du théorème</u>.

Soit $X_{i,j}$ une famille de modules, avec $i, j \in \mathbb{Z}$ et $X_{i,j} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$. Définissons les modules X_n comme les sommes directes (finies) :

$$(2.1) \qquad X_n = \coprod_{i+j=n} X_{i,j}$$

Pour définir au moyen des X_n un complexe de chaînes $X_\bullet$, il ne nous manque plus que la différentielle d . La donnée des morphismes $d_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ équivaut, d'après (2.1) à celle des morphismes

$$(2.2) \qquad d_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \longrightarrow X_{i-k,j+k-1} \quad ,$$

définis comme composés des applications

$$(2.3) \qquad X_{i,j} \longrightarrow X_{i+j} \xrightarrow[d_{i+j}]{} X_{i+j-1} \longrightarrow X_{i-k,j+k-1} \quad .$$

En supprimant les indices inférieurs, nous pouvons écrire

$$(2.4) \qquad d = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d^{(k)} \quad ,$$

et la relation $dd = 0$ équivaut à la famille de relations

$$(2.5) \qquad \sum_{h \in \mathbb{Z}} d^{(k-h)} d^{(h)} = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z} .$$

La notion usuelle de <u>complexe double</u> s'obtient en supposant $d_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $k \neq 0, 1$.

<u>Définition</u>. <u>Nous appelons complexe de Wall</u> $X_{\bullet\bullet}$ <u>la donnée de la famille de modules</u> $X_{i,j}$ <u>et de morphismes</u> $d_{i,j}^{(k)}$ (<u>vérifiant</u> (2.2) <u>et</u> (2.5)) , <u>tels que</u>

(2.6) $$d^{(k)}_{i,j} = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad k < 0 .$$

A un complexe de Wall $X_{\cdot\cdot}$ se trouve donc associé un complexe (simple) $X_{\cdot}$. La condition " $d^{(k)} = 0$ pour $k < 0$ " se traduit par l'existence d'une filtration croissante de $X_{\cdot}$, définie en posant

(2.7) $$F_r X_n = \coprod_{\substack{i+j=n \\ i \leq r}} X_{i,j} ,$$

et compatible avec la différentielle (c'est-à-dire vérifiant les relations $d_n F_r X_n \subset F_r X_{n-1}$) .

A cette filtration correspond une suite spectrale [1] . Le "terme E^o " est le gradué associé ; il est donné par la formule

(2.8) $$E^o_{i,j} = X_{i,j} ,$$

et la différentielle d^o du complexe E^o s'identifie à $d^{(o)}$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, nous avons ainsi un complexe de chaînes $X_{i,\cdot}$ pour la différentielle $d^{(o)}_{i,\cdot}$. Ces complexes seront dits les <u>complexes fibres</u> du complexe de Wall, et nous écrirons parfois d^f au lieu de $d^{(o)}$.

Le "terme E^1 " de la suite spectrale est donné par l'homologie de E^o , c'est-à-dire des complexes fibres. Plus précisément

(2.9) $$E^1_{i,j} = H_j (X_{i,\cdot}) .$$

La différentielle d^1 du complexe E^1 est définie à partir de $d^{(1)}$ par restriction et passage au quotient, comme dans le cas d'un complexe double.

<u>Supposons maintenant que les complexes fibres sont acycliques en degrés</u> > 0 . Autrement dit, supposons

(2.10) $$H_j (X_{i,\cdot}) = 0 \quad \text{pour} \quad j > 0 ,$$

et posons, pour $i \in \mathbb{Z}$,

(2.11) $$Y_i = H_o (X_{i,\cdot}) .$$

La famille des Y_i constitue, avec la différentielle d^1, un complexe qui sera dit <u>complexe base</u> (et dont nous noterons parfois d^b la différentielle).

La suite spectrale du complexe de Wall dégénère, et nous obtenons

$$(2.12) \qquad H_n(X_\bullet) = H_n(Y_\bullet) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Si, en particulier, $Y_\bullet$ est une résolution acyclique de $Z = H_o(Y_\bullet)$, alors $X_\bullet$ est aussi une résolution acyclique de Z.

Soient $X_{\bullet\bullet}$ et $\overline{X}_{\bullet\bullet}$ deux complexes de Wall. Nous appellerons <u>morphisme</u> de $X_{\bullet\bullet}$ dans $\overline{X}_{\bullet\bullet}$ un <u>morphisme</u> $f : X_\bullet \longrightarrow \overline{X}_\bullet$ des complexes simples associés, <u>compatible avec les filtrations</u>, c'est-à-dire vérifiant

$$(2.12) \qquad f_n(F_r X_n) \subset F_r \overline{X}_n , \quad \text{pour} \quad n, r \in \mathbb{N} .$$

La donnée de f équivaut à celle des morphismes

$$(2.13) \qquad f^{(k)}_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow \overline{X}_{i-k,j+k} ,$$

définis comme composés des applications

$$(2.14) \qquad X_{i,j} \longrightarrow X_{i+j} \xrightarrow[f_{i+j}]{} \overline{X}_{i+j} \longrightarrow \overline{X}_{i-k,j+k} .$$

La compatibilité de f avec les filtrations se traduit par les conditions

$$(2.15) \qquad f^{(k)}_{i,j} = 0 \quad \text{pour} \quad k < 0 .$$

Soient f et f' deux morphismes de $X_{\bullet\bullet}$ dans $\overline{X}_{\bullet\bullet}$. Nous disons que f et f' sont <u>homotopes</u> s'il existe une application $s : X_\bullet \longrightarrow \overline{X}_\bullet$, <u>compatible avec les filtrations</u>, pour laquelle

$$(2.16) \qquad f - f' = \overline{d}\, s + s\, d .$$

Plus précisément, s est donné comme une famille d'applications

$$(2.17) \qquad s^{(k)}_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow \overline{X}_{i-k,j+k+1} .$$

La compatibilité avec les filtrations signifie encore " $s_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $k < 0$ " .

Voici maintenant le théorème qui généralise celui rappelé au n° 1 .

Théorème.

(i) Soit $Y_{\bullet}$ un complexe de chaînes. Alors il existe un complexe de Wall $X_{\bullet\bullet}$ dont $Y_{\bullet}$ est le complexe base, et dont chaque complexe fibre $X_{i,\bullet}$ est une résolution acyclique projective de Y_i .

Plus précisément, soit pour chaque $i \in \mathbb{N}$ une résolution acyclique projective de Y_i , notée $X_{i,\bullet}$. Alors il existe un complexe de Wall $X_{\bullet\bullet}$ dont les $X_{i,\bullet}$ sont les complexes fibres.

(ii) Soient $X_{\bullet\bullet}$ et $\overline{X}_{\bullet\bullet}$ deux complexes de Wall, dont les complexes fibres $X_{i,\bullet}$ (resp. $\overline{X}_{i,\bullet}$) sont des résolutions acycliques projectives des modules Y_i (resp. $\overline{Y}_i$) du complexe base. Soit $f : Y_{\bullet} \longrightarrow \overline{Y}_{\bullet}$ un morphisme des complexes bases.

Alors il existe un morphisme $g : X_{\bullet\bullet} \longrightarrow \overline{X}_{\bullet\bullet}$ des complexes de Wall qui induit le morphisme f .

Plus précisément, donnons nous, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, un morphisme des complexes fibres

$$g_i^f : X_{i,\bullet} \longrightarrow \overline{X}_{i,\bullet}$$

qui induit (par passage à l'homologie) le morphisme

$$f_i : Y_i \longrightarrow \overline{Y}_i$$

Alors il existe un morphisme $g : X_{\bullet\bullet} \longrightarrow \overline{X}_{\bullet\bullet}$ tel que

$$g_{i,j}^{(o)} = (g_i^f)_j \quad \text{pour tous} \quad i, j \in \mathbb{N} .$$

(iii) Soient $X_{\cdot\cdot}$ et $\overline{X}_{\cdot\cdot}$ comme précédemment. Si le morphisme $g : X_{\cdot\cdot} \longrightarrow \overline{X}_{\cdot\cdot}$ induit le morphisme nul des complexes bases, alors g est homotope au morphisme nul.

De plus, si l'on a $g^{(k)}_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ et $o \leqslant k \leqslant r$ $(r \geqslant o)$, alors

$$g = \overline{d}\, s + s\, d \quad ,$$ où l'on peut choisir les morphismes

$s^{(k)}_{i,j}$ nuls pour $i, j \in \mathbb{N}$ et $o \leqslant k \leqslant r$.

Remarque. Il est aisé d'affaiblir les hypothèses du théorème, en généralisant la proposition 1.1, p. 76 de [1] .

3. Indications sur la démonstration.

Il s'agit de construire une différentielle d (resp. un morphisme g , une homotopie s). Cela équivaut à construire les morphismes $d^{(k)}_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow X_{i-k,j+k-1}$ (resp. $g^{(k)}_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow \overline{X}_{i-k,j+k}$, $s^{(k)}_{i,j} : X_{i,j} \longrightarrow \overline{X}_{i-k,j+k+1}$) .

Dans tous les cas, nous ordonnons lexicographiquement les triplets (k, j, i) et nous construisons les morphismes $d^{(k)}_{i,j}$ (resp. $g^{(k)}_{i,j}$, $s^{(k)}_{i,j}$) par récurrence. Plus précisément, nous prenons un triplet (k, j, i) , et nous supposons les morphismes $d^{k'}_{i',j'}$ (resp. etc.) définis pour les triplets

$$(k', j', i') < (k, j, i) \quad ,$$

c'est-à-dire si $k' < k$, ou $k = k'$, $j' < j$, ou $k = k'$, $j = j'$, $i' < i$. Les morphismes déjà construits sont supposés vérifier certaines identités. Ainsi, pour la construction de d , nous devons avoir $d\, d = 0$, qui se traduit par les relations

$$\sum_{o \leqslant h \leqslant k} d^{(k-h)}_{i-h,j+h-1} \; d^{(h)}_{i,j} = 0 \quad . \tag{3.1}$$

De même, pour le morphisme g , la relation $g\, d = \overline{d}\, g$ se traduit par

$$\sum_{o \leqslant h \leqslant k} \left(\overline{d}^{(k-h)}_{i-h,j+h} \; g^{(h)}_{i,j} - g^{(k-h)}_{i-h,j+h-1} \; d^{(h)}_{i,j} \right) = 0 \quad . \tag{3.2}$$

Pour l'homotopie s , la relation $\bar{d}\, s + s\, d = g$ équivaut à

$$(3.3) \qquad \sum_{0 \leq h \leq k} \left(\bar{d}^{(k-h)}_{i-h,j+h+1}\, s^{(h)}_{i,j} + s^{(k-h)}_{i-h,j+h-1}\, d^{(h)}_{i,j} \right) = g^{(k)}_{i,j} \; .$$

Dans tous les cas on aboutit au problème suivant : soient M un module et $X_{\bullet}$ une résolution acyclique projective d'un module Y (pour l'augmentation ε). On se donne, pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$, un morphisme $u : M \longrightarrow X_{i-1}$, et l'on cherche un morphisme $v : M \longrightarrow X_i$ vérifiant la relation

$$(3.4) \qquad d_i\, v = u \; .$$

La condition de possibilité est alors

$$(3.5) \qquad d_{i-1}\, u = 0 \quad \text{si} \quad i > 1 \quad ;$$

$$(3.6) \qquad \varepsilon\, u = 0 \quad \text{si} \quad i = 1 \quad .$$

Les hypothèses de récurrence permettent, dans chaque cas, de vérifier la condition de possibilité.

4. Application aux extensions de groupes.

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G . Notons respectivement A, B et C les algèbres $\mathbb{Z}[G]$, $\mathbb{Z}[H]$ et $\mathbb{Z}[G/H]$. Nous considérons B (resp. C) comme une sous-algèbre (resp. une algèbre quotient) de A .

Le calcul de la cohomologie (ou de l'homologie) de G peut s'effectuer au moyen d'une résolution acyclique projective de $\mathbb{Z}$ par des A-modules (G opérant trivialement sur $\mathbb{Z}$) .

Soit d'abord $Y_{\bullet}$ une résolution acyclique projective de $\mathbb{Z}$ par les C-modules. Considérons chaque module Y_i comme un A-module (par l'intermédiaire de C) , et construisons une résolution acyclique projective $X_{i,\bullet}$ de Y_i par des A-modules. Il existe un complexe de Wall $X_{\bullet\bullet}$ dont les $X_{i,\bullet}$ sont les complexes fibres. Le complexe simple associé $X_{\bullet}$ est une résolution acyclique projective de $\mathbb{Z}$ par des A-modules ; ce complexe est filtré et la suite spectrale associée du complexe $\mathrm{Hom}_A^\bullet(X_\bullet, M)$ donne, pour chaque A-module M, la suite de Hochschild-Serre

$$(4.1) \qquad H^p(G/H, H^q(H, M)) \Longrightarrow H^n(G, M) .$$

Indiquons comment on peut expliciter la construction du complexe $X_{\bullet\bullet}$. Soit $Z_\bullet$ une résolution acyclique projective de $\mathbb{Z}$ par des B-modules. Comme l'algèbre C s'identifie à $A \otimes_B \mathbb{Z}$, le complexe $A \otimes_B Z_\bullet$ est une résolution acyclique projective de C par des A-modules.

Supposons que les Y_i soient des C-modules libres, que nous écrivons

$$(4.2) \qquad Y_i = C \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{Y}_i ,$$

où les $\tilde{Y}_i$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres.

Nous pouvons alors poser, pour $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(4.3) \qquad X_{i,j} = A \otimes_B Z_j \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{Y}_i .$$

Les complexes fibres

$$(4.4) \qquad X_{i,\bullet} = A \otimes_B Z_\bullet \otimes \tilde{Y}_i$$

ont leur différentielle d^f définie par la différentielle du complexe $Z_\bullet$.

Prenons, par exemple, pour $Y_\bullet$ le complexe standard (non normalisé) du groupe G/H. Rappelons que nous avons

$$(4.5) \qquad Y_n = T^{n+1} C , \quad \tilde{Y}_n = T^n C ,$$

T^n désignant la n-ième puissance tensorielle sur $\mathbb{Z}$. La différentielle est donnée par la formule

$$d(x_0 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{0 \leqslant i < n} (-1)^i x_0 \otimes \dots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n + (-1)^n x_0 \otimes \dots \otimes x_{n-1}$$

pour tous $x_0, \dots, x_n \in G/H$.

Nous prenons de même pour $Z_\bullet$ le complexe standard de H , et nous obtenons, d'après (4.3) ,

$$X_{i,j} = A \otimes_{\mathbb{Z}} T^j B \otimes_{\mathbb{Z}} T^i C \ . \tag{4.6}$$

Nous allons écrire la différentielle $d^{(1)}$ grâce au choix d'une section de G/H dans G (que nous noterons $\xi \longmapsto \bar{\xi}$) . Indiquons d'abord comment le groupe G (et par conséquent A) opère à droite sur le complexe $A \otimes_B Z_\bullet$. Si $x \in G$ et $u \in A \otimes_{\mathbb{Z}} T^j B$, avec

$$u = x_0 \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_j \quad ,$$

nous posons

$$u \cdot x = x_0 x \otimes x^{-1} y_1 x \otimes \dots \otimes x^{-1} y_j x \quad . \tag{4.7}$$

Si maintenant nous prenons $\xi_1 , \dots , \xi_i \in G/H$, nous obtenons l'élément $v = u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_i \in X_{i,j}$, et nous posons par définition

$$\begin{aligned} (-1)^j d^{(1)}_{i,j} v = {} & (u \cdot \bar{\xi}_1) \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_i \\ & + \sum_{1 \leq k < i} (-1)^k u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k \xi_{k+1} \otimes \dots \otimes \xi_i \\ & + (-1)^i u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_{i-1} \quad . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si l'extension de G/H par H se décompose, c'est-à-dire si l'on peut choisir comme section un homomorphisme de groupes, alors $d^{(1)} d^{(1)} = 0$, et on peut prendre $d^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 2$. Le complexe de Wall est alors un complexe double ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-224.

[3] HOCHSCHILD (G. P.) and SERRE (J.-P.). - Cohomology of group extensions, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 110-134.

[4] LAZARD (Michel). - Groupes analytiques p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 26).

[5] WALL (C. T. C.). - Resolutions for extensions of groups, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 57, 1961, p. 251-255.