

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL LAZARD

Complexes de Wall

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 1 (1963-1964), exp. n° 9,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLEXES DE WALL
par Michel LAZARD

On rencontre fréquemment, en algèbre homologique, des complexes doubles ou "complexes de complexes" : voir, par exemple, [1], [2]. La suite spectrale de Hochschild-Serre [3] relative aux extensions de groupes est un cas particulier de la suite spectrale des foncteurs composés [2] et, à ce titre, s'obtient à partir de filtrations de complexes doubles.

Il est cependant des questions où l'on désire appliquer la "méthode directe" de Hochschild-Serre [3] ; celle-ci est assez compliquée. Une construction due à C.T.C. Wall [5] permet de la simplifier. Nous allons exposer cette construction, qui s'applique à d'autres catégories additives que celle des modules [4]. Pour simplifier, nous ne parlerons ici que de modules.

1. Complexes de chaînes ; résolutions projectives.

Le mot "module" signifiera module à gauche unitaire sur un anneau commutatif A (que nous cesserons, provisoirement, de mentionner). Un complexe de chaînes X est constitué par une famille de modules X_n , $n \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} d_{n-1} \circ d_n &= 0 && \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} ; \\ X_n &= 0 && \text{pour } n < 0 . \end{aligned}$$

[On peut évidemment indexer les X_n par les entiers positifs, mais cela complique les notations en fin de compte].

Un morphisme de complexes $f : X \rightarrow Y$ est une famille de morphismes $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ qui commute avec les différentielles d_n^X et d_n^Y des deux complexes :

$$d_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^X , \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} .$$

On définit l'homologie $H_*(X_*)$ d'un complexe par la formule usuelle :

$$H_n(X_*) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$$

Un morphisme $f : X_* \rightarrow Y_*$ définit les morphismes $f_n^* : H_n(X_*) \rightarrow H_n(Y_*)$.

A tout module M on associe le complexe M_* , défini par $M_0 = M$ et $M_n = 0$ pour $n \neq 0$. Un complexe X_* sur M est un complexe muni d'un morphisme

$$\xi : X_* \rightarrow M_*$$

On peut sans inconvénient identifier le morphisme de complexes ξ au morphisme de modules

$$(\xi_0 =) \xi : X_0 \rightarrow M,$$

qui est dit augmentation de X_* (on doit avoir $\xi \circ d_1 = 0$). Le complexe X_* sur M est dit une résolution acyclique de M si l'augmentation ξ induit un isomorphisme des homologies, autrement dit si la suite

$$\dots X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\xi} M \rightarrow 0$$

est exacte. Une résolution acyclique projective de M est une résolution acyclique X_* dont tous les modules X_n sont projectifs (autrement dit, les foncteurs $\text{Hom}(X_n, Y)$ sont exacts en Y).

On a le théorème classique suivant, qui, avec le théorème dual, est à la base de la théorie des foncteurs dérivés [1], prop. 1.2, p. 77.

(i) Tout module M possède une résolution acyclique projective.

(ii) Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de modules (identifié au morphisme des complexes associés M_* et N_*), si X_* (resp. Y_*) est une résolution acyclique projective de M (resp. N) pour l'augmentation ξ^X (resp. ξ^Y), alors il existe un morphisme de complexes $g : X_* \rightarrow Y_*$ tel que

$$\xi^Y \circ g = f \circ \xi^X.$$

(iii) Si g et g' sont deux morphismes de X dans Y tels que $\xi^Y \circ g = \xi^Y \circ g' = f \circ \xi^X$, alors g et g' sont homotopes. Cela signifie qu'il existe une famille de morphismes $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ tels que

$$g_n - g'_n = s_{n-1} \circ d_n^X + d_{n+1}^Y \circ s_n, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Complexes de Wall ; définitions, énoncé du théorème.

Soit $X_{i,j}$ une famille de modules, avec $i, j \in \mathbb{Z}$ et $X_{i,j} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$. Définissons les modules X_n comme les sommes directes (finies) :

$$(2.1) \quad X_n = \bigsqcup_{i+j=n} X_{i,j}$$

Pour définir au moyen des X_n un complexe de chaînes X , il ne nous manque plus que la différentielle d . La donnée des morphismes $d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ équivaut, d'après (2.1) à celle des morphismes

$$(2.2) \quad d_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow X_{i-k,j+k-1},$$

définis comme composés des applications

$$(2.3) \quad X_{i,j} \rightarrow X_{i+j} \xrightarrow{d_{i+j}} X_{i+j-1} \rightarrow X_{i-k,j+k-1}.$$

En supprimant les indices inférieurs, nous pouvons écrire

$$(2.4) \quad d = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d^{(k)},$$

et la relation $dd = 0$ équivaut à la famille de relations

$$(2.5) \quad \sum_{h \in \mathbb{Z}} d^{(k-h)} d^{(h)} = 0, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

La notion usuelle de complexe double s'obtient en supposant $d_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $k \neq 0, 1$.

Définition. Nous appelons complexe de Wall X , la donnée de la famille de modules $X_{i,j}$ et de morphismes $d_{i,j}^{(k)}$ (vérifiant (2.2) et (2.5)), tels que

$$(2.6) \quad d_{i,j}^{(k)} = 0 \text{ pour } k < 0 .$$

A un complexe de Wall X_{\bullet} se trouve donc associé un complexe (simple) X_{\bullet} . La condition " $d^{(k)} = 0$ pour $k < 0$ " se traduit par l'existence d'une filtration croissante de X_{\bullet} , définie en posant

$$(2.7) \quad F_r X_n = \bigcup_{\substack{i+j=n \\ i \leq r}} X_{i,j} ,$$

et compatible avec la différentielle (c'est-à-dire vérifiant les relations $d_n F_r X_n \subset F_r X_{n-1}$).

A cette filtration correspond une suite spectrale [1]. Le "terme E^0 " est le gradué associé ; il est donné par la formule

$$(2.8) \quad E_{i,j}^0 = X_{i,j} ,$$

et la différentielle d^0 du complexe E^0 s'identifie à $d^{(0)}$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, nous avons ainsi un complexe de chaînes $X_{i,\bullet}$ pour la différentielle $d_{i,\bullet}^{(0)}$. Ces complexes seront dits les complexes fibres du complexe de Wall, et nous écrirons parfois d^f au lieu de $d^{(0)}$.

Le "terme E^1 " de la suite spectrale est donné par l'homologie de E^0 , c'est-à-dire des complexes fibres. Plus précisément

$$(2.9) \quad E_{i,j}^1 = H_j(X_{i,\bullet}) .$$

La différentielle d^1 du complexe E^1 est définie à partir de $d^{(1)}$ par restriction et passage au quotient, comme dans le cas d'un complexe double.

Supposons maintenant que les complexes fibres sont acycliques en degrés > 0 .
Autrement dit, supposons

$$(2.10) \quad H_j(X_{i,\bullet}) = 0 \text{ pour } j > 0 ,$$

et posons, pour $i \in \mathbb{Z}$,

$$(2.11) \quad Y_i = H_0(X_{i,\bullet}) .$$

La famille des Y_i constitue, avec la différentielle d^1 , un complexe qui sera dit complexe base (et dont nous noterons parfois d^b la différentielle).

La suite spectrale du complexe de Wall dégénère, et nous obtenons

$$(2.12) \quad H_n(X_\bullet) = H_n(Y_\bullet) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

Si, en particulier, Y_\bullet est une résolution acyclique de $Z = H_0(Y_\bullet)$, alors X_\bullet est aussi une résolution acyclique de Z .

Soient X_\bullet et \bar{X}_\bullet deux complexes de Wall. Nous appellerons morphisme de X_\bullet dans \bar{X}_\bullet un morphisme $f : X_\bullet \rightarrow \bar{X}_\bullet$ des complexes simples associés, compatible avec les filtrations, c'est-à-dire vérifiant

$$(2.12) \quad f_n(F_r X_n) \subset F_r \bar{X}_n, \quad \text{pour } n, r \in \mathbb{N} .$$

La donnée de f équivaut à celle des morphismes

$$(2.13) \quad f_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow \bar{X}_{i-k,j+k},$$

définis comme composés des applications

$$(2.14) \quad X_{i,j} \rightarrow X_{i+j} \xrightarrow{f_{i+j}} \bar{X}_{i+j} \rightarrow \bar{X}_{i-k,j+k} .$$

La compatibilité de f avec les filtrations se traduit par les conditions

$$(2.15) \quad f_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \text{pour } k < 0 .$$

Soient f et f' deux morphismes de X_\bullet dans \bar{X}_\bullet . Nous disons que f et f' sont homotopes s'il existe une application $s : X_\bullet \rightarrow \bar{X}_\bullet$, compatible avec les filtrations, pour laquelle

$$(2.16) \quad f - f' = \bar{d} s + s d .$$

Plus précisément, s est donné comme une famille d'applications

$$(2.17) \quad s_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow \bar{X}_{i-k,j+k+1} .$$

La compatibilité avec les filtrations signifie encore " $s_{i,j}^{(k)} = 0$ pour $k < 0$ " .

Voici maintenant le théorème qui généralise celui rappelé au n° 1 .

Théorème.

(i) Soit Y_{\bullet} un complexe de chaînes. Alors il existe un complexe de Wall $X_{\bullet\bullet}$ dont Y_{\bullet} est le complexe base, et dont chaque complexe fibre $X_{i,\bullet}$ est une résolution acyclique projective de Y_i .

Plus précisément, soit pour chaque $i \in \mathbb{N}$ une résolution acyclique projective de Y_i , notée $X_{i,\bullet}$. Alors il existe un complexe de Wall $X_{\bullet\bullet}$ dont les $X_{i,\bullet}$ sont les complexes fibres.

(ii) Soient $X_{\bullet\bullet}$ et $\bar{X}_{\bullet\bullet}$ deux complexes de Wall, dont les complexes fibres $X_{i,\bullet}$ (resp. $\bar{X}_{i,\bullet}$) sont des résolutions acycliques projectives des modules Y_i (resp. \bar{Y}_i) du complexe base. Soit $f : Y_{\bullet} \rightarrow \bar{Y}_{\bullet}$ un morphisme des complexes bases.

Alors il existe un morphisme $g : X_{\bullet\bullet} \rightarrow \bar{X}_{\bullet\bullet}$ des complexes de Wall qui induit le morphisme f .

Plus précisément, donnons nous, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, un morphisme des complexes fibres

$$g_i^f : X_{i,\bullet} \rightarrow \bar{X}_{i,\bullet}$$

qui induit (par passage à l'homologie) le morphisme

$$f_i : Y_i \rightarrow \bar{Y}_i$$

Alors il existe un morphisme $g : X_{\bullet\bullet} \rightarrow \bar{X}_{\bullet\bullet}$ tel que

$$g_{i,j}^{(0)} = (g_i^f)_j \quad \text{pour tous } i, j \in \mathbb{N} .$$

(iii) Soient $X_{..}$ et $\bar{X}_{..}$ comme précédemment. Si le morphisme $g : X_{..} \rightarrow \bar{X}_{..}$ induit le morphisme nul des complexes bases, alors g est homotope au morphisme nul.

De plus, si l'on a $g_{i,j}^{(k)} = 0$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq r$ ($r > 0$), alors

$$g = \bar{d} s + s d, \quad \text{où l'on peut choisir les morphismes}$$

$s_{i,j}^{(k)}$ nuls pour $i, j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq r$.

Remarque. Il est aisé d'affaiblir les hypothèses du théorème, en généralisant la proposition 1.1, p. 76 de [1].

3. Indications sur la démonstration.

Il s'agit de construire une différentielle d (resp. un morphisme g , une homotopie s). Cela équivaut à construire les morphismes $d_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow X_{i-k,j+k-1}$ (resp. $g_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow \bar{X}_{i-k,j+k}$, $s_{i,j}^{(k)} : X_{i,j} \rightarrow \bar{X}_{i-k,j+k+1}$).

Dans tous les cas, nous ordonnons lexicographiquement les triplets (k, j, i) et nous construisons les morphismes $d_{i,j}^{(k)}$ (resp. $g_{i,j}^{(k)}$, $s_{i,j}^{(k)}$) par récurrence. Plus précisément, nous prenons un triplet (k, j, i) , et nous supposons les morphismes $d_{i',j'}^{k'}$ (resp. etc.) définis pour les triplets

$$(k', j', i') < (k, j, i),$$

c'est-à-dire si $k' < k$, ou $k = k'$, $j' < j$, ou $k = k'$, $j = j'$, $i' < i$. Les morphismes déjà construits sont supposés vérifier certaines identités. Ainsi, pour la construction de d , nous devons avoir $d d = 0$, qui se traduit par les relations

$$(3.1) \quad \sum_{0 \leq h \leq k} d_{i-h,j+h-1}^{(k-h)} d_{i,j}^{(h)} = 0.$$

De même, pour le morphisme g , la relation $g d = \bar{d} g$ se traduit par

$$(3.2) \quad \sum_{0 \leq h \leq k} \left(\bar{d}_{i-h,j+h}^{(k-h)} g_{i,j}^{(h)} - g_{i-h,j+h-1}^{(k-h)} d_{i,j}^{(h)} \right) = 0.$$

Pour l'homotopie s , la relation $\bar{d} s + s d = g$ équivaut à

$$(3.3) \quad \sum_{0 \leq h \leq k} \left(\bar{d}_{i-h, j+h+1}^{(k-h)} s_{i, j}^{(h)} + s_{i-h, j+h-1}^{(k-h)} d_{i, j}^{(h)} \right) = g_{i, j}^{(k)} .$$

Dans tous les cas on aboutit au problème suivant : soient M un module et X une résolution acyclique projective d'un module Y (pour l'augmentation \mathcal{E}). On se donne, pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$, un morphisme $u : M \rightarrow X_{i-1}$, et l'on cherche un morphisme $v : M \rightarrow X_i$ vérifiant la relation

$$(3.4) \quad d_i v = u .$$

La condition de possibilité est alors

$$(3.5) \quad d_{i-1} u = 0 \quad \text{si} \quad i > 1 \quad ;$$

$$(3.6) \quad \mathcal{E} u = 0 \quad \text{si} \quad i = 1 \quad .$$

Les hypothèses de récurrence permettent, dans chaque cas, de vérifier la condition de possibilité.

4. Application aux extensions de groupes.

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G . Notons respectivement A , B et C les algèbres $\mathbb{Z}[G]$, $\mathbb{Z}[H]$ et $\mathbb{Z}[G/H]$. Nous considérons B (resp. C) comme une sous-algèbre (resp. une algèbre quotient) de A .

Le calcul de la cohomologie (ou de l'homologie) de G peut s'effectuer au moyen d'une résolution acyclique projective de \mathbb{Z} par des A -modules (G opérant trivialement sur \mathbb{Z}).

Soit d'abord Y une résolution acyclique projective de \mathbb{Z} par les C -modules. Considérons chaque module Y_i comme un A -module (par l'intermédiaire de C), et construisons une résolution acyclique projective $X_{i, \cdot}$ de Y_i par des A -modules. Il existe un complexe de Wall $X_{\cdot, \cdot}$ dont les $X_{i, \cdot}$ sont les complexes fibres. Le complexe simple associé X_{\cdot} est une résolution acyclique projective de \mathbb{Z} par des A -modules ; ce complexe est filtré et la suite spectrale associée du

complexe $\text{Hom}_A^\bullet(X_\bullet, M)$ donne, pour chaque A -module M , la suite de Hochschild-Serre

$$(4.1) \quad H^p(G/H, H^q(H, M)) \implies H^n(G, M) .$$

Indiquons comment on peut expliciter la construction du complexe X_\bullet . Soit Z_\bullet une résolution acyclique projective de \mathbb{Z} par des B -modules. Comme l'algèbre C s'identifie à $A \otimes_B \mathbb{Z}$, le complexe $A \otimes_B Z_\bullet$ est une résolution acyclique projective de C par des A -modules.

Supposons que les Y_i soient des C -modules libres, que nous écrivons

$$(4.2) \quad Y_i = C \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{Y}_i ,$$

où les \tilde{Y}_i sont des \mathbb{Z} -modules libres.

Nous pouvons alors poser, pour $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(4.3) \quad X_{i,j} = A \otimes_B Z_j \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{Y}_i .$$

Les complexes fibres

$$(4.4) \quad X_{i,\bullet} = A \otimes_B Z_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{Y}_i$$

ont leur différentielle d^f définie par la différentielle du complexe Z_\bullet .

Prenons, par exemple, pour Y_\bullet le complexe standard (non normalisé) du groupe G/H . Rappelons que nous avons

$$(4.5) \quad Y_n = T^{n+1} C , \quad \tilde{Y}_n = T^n C ,$$

T^n désignant la n -ième puissance tensorielle sur \mathbb{Z} . La différentielle est donnée par la formule

$$d(x_0 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i x_0 \otimes \dots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n \\ + (-1)^n x_0 \otimes \dots \otimes x_{n-1}$$

pour tous $x_0, \dots, x_n \in G/H$.

Nous prenons de même pour Z le complexe standard de H , et nous obtenons, d'après (4.3),

$$(4.6) \quad X_{i,j} = A \otimes_{\mathbb{Z}} T^j B \otimes_{\mathbb{Z}} T^i C .$$

Nous allons écrire la différentielle $d^{(1)}$ grâce au choix d'une section de G/H dans G (que nous noterons $\xi \mapsto \bar{\xi}$). Indiquons d'abord comment le groupe G (et par conséquent A) opère à droite sur le complexe $A \otimes_{\mathbb{Z}} Z$. Si $x \in G$ et $u \in A \otimes_{\mathbb{Z}} T^j B$, avec

$$u = x_0 \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_j ,$$

nous posons

$$(4.7) \quad u \cdot x = x_0 x \otimes x^{-1} y_1 x \otimes \dots \otimes x^{-1} y_j x .$$

Si maintenant nous prenons $\xi_1, \dots, \xi_i \in G/H$, nous obtenons l'élément $v = u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_i \in X_{i,j}$, et nous posons par définition

$$(4.8) \quad \begin{aligned} (-1)^j d_{i,j}^{(1)} v &= (u \cdot \bar{\xi}_1) \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_i \\ &+ \sum_{1 < k < i} (-1)^k u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k \xi_{k+1} \otimes \dots \otimes \xi_i \\ &+ (-1)^i u \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_{i-1} . \end{aligned}$$

Si l'extension de G/H par H se décompose, c'est-à-dire si l'on peut choisir comme section un homomorphisme de groupes, alors $d^{(1)} d^{(1)} = 0$, et on peut prendre $d^{(k)} = 0$ pour $k \gg 2$. Le complexe de Wall est alors un complexe double ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [2] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-224.
- [3] HOCHSCHILD (G. P.) and SERRE (J.-P.). - Cohomology of group extensions, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 110-134.
- [4] LAZARD (Michel). - Groupes analytiques p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 26).
- [5] WALL (C. T. C.). - Resolutions for extensions of groups, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 57, 1961, p. 251-255.