

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE KOSKAS

Application de la théorie des hypertas aux demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, n° 1 (1963-1964), exp. n° 3, p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_1_A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATION DE LA THÉORIE DES HYPERTAS AUX DEMI-GROUPES

par Maurice KOSKAS

Nous avons, dans un précédent exposé, étudié la structure d'hypertas [4], et nous avons donné quelques applications aux demi-groupes, groupoïdes et demi-hyper-groupes [3].

Nous allons, à présent, exposer d'autres applications de la théorie des hypertas. Mais il nous faut auparavant approfondir la théorie. Nous introduisons pour cela la notion de bi-hypertas.

I. Etude de la structure de bi-hypertas.

1. Définitions, exemples.

Définitions. - On appelle bi-hypertas la donnée d'un ensemble E , et de deux demi-groupes d'applications de E dans $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$, tels que :

$$\forall \theta_1 \in \mathcal{Q}_1, \theta_2 \in \mathcal{Q}_2 : \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1.$$

Un **bi-hypertas** est noté $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$. Nous notons $\mathcal{Q}$ le demi-groupe engendré par $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$. Nous considérerons souvent par la suite les trois hypertas

$$(E, \mathcal{Q}_1), (E, \mathcal{Q}_2), (E, \mathcal{Q}).$$

Etant donné un bi-hypertas $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$, on peut définir les hypertas inverses ([4]) de $(E, \mathcal{Q}_1)$, $(E, \mathcal{Q}_2)$, $(E, \mathcal{Q})$, soit respectivement

$$(E, \mathcal{Q}'_1), (E, \mathcal{Q}'_2), (E, \mathcal{Q}').$$

On vérifie facilement que $\mathcal{Q}'$ est engendré par $\mathcal{Q}'_1 \cup \mathcal{Q}'_2$, et que $(E, \mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2)$ est un bi-hypertas, que l'on appelle bi-hypertas inverse de $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$.

Remarque. - Un bi-hypertas $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ est appelé bi-tas lorsque $(E, \mathcal{Q}_1)$ et $(E, \mathcal{Q}_2)$ sont des tas.

Exemples. - Soit D (resp. H), un demi-groupe (resp. un demi-hypergroupe). Nous notons $\mathcal{R}$, le demi-groupe engendré par les translations à droite de D (resp. de H), $\mathcal{L}$, le demi-groupe engendré par les translations à gauche de D (resp. de H).

$(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ (resp. $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$) est un bi-hypertas ; son bi-hypertas inverse est $(D, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$ (resp. $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$).

On vérifie aisément que $(D, \mathcal{L}')$ (resp. $(H, \mathcal{L}')$) est un pseudo-tas lorsque D (resp. H) est simplifiable à gauche.

Rappelons que H est dit simplifiable à gauche si

$$a \star x \cap a \star y \neq \emptyset \Rightarrow x = y.$$

2. Régularité, conditions S pour un hypertas.

Définition. - Un bi-hypertas $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ est dit régulier si :

$\forall \alpha_1$, idéal de $(E, \mathcal{Q}_1)$, α_2 , idéal de $(E, \mathcal{Q}_2)$, on a : $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$.

Exemples. - D est un demi-groupe, H , un demi-hypergroupe.

a. Les bi-hypertas $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ et $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ sont réguliers.

b. $(D, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$ (resp. $(H, \mathcal{R}', \mathcal{L}')$) est régulier si et seulement si D (resp. H) n'est pas réunion d'un idéal à gauche propre et d'un idéal à droite propre.

c. Nous donnerons au cours de l'exposé d'autres exemples de régularité.

Les conditions S. - $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ étant un bi-hypertas, nous définissons sur E , deux relations d'équivalence ρ_1 et ρ_2 en posant :

$\forall x, y \in E$,

$$x \rho_i y \quad (i = 1, 2) \Leftrightarrow \forall \alpha_i, \text{ idéal de } (E, \mathcal{Q}_i), \quad x \in \alpha_i \Leftrightarrow y \in \alpha_i.$$

Nous définissons alors les conditions S, éventuellement vérifiées par $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$:

$$(S_{12}) \quad \forall x, y, u \in E, \quad \theta_1 \in \mathcal{Q}_1 : x \in \theta_1(u), \quad y \in \theta_1(u) \Rightarrow x \rho_2 y.$$

$$(S_{21}) \quad \forall x, y, u \in E, \quad \theta_2 \in \mathcal{Q}_2 : x \in \theta_2(u), \quad y \in \theta_2(u) \Rightarrow x \rho_1 y.$$

$$(S'_{12}) \quad \forall x, y \in E, \quad \theta_1 \in \mathcal{Q}_1 : \theta_1(x) \cap \theta_1(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \rho_2 y.$$

$$(S'_{21}) \quad \forall x, y \in E, \quad \theta_2 \in \mathcal{Q}_2 : \theta_2(x) \cap \theta_2(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \rho_1 y.$$

On montre aisément que $(E, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ vérifie S_{12} (resp. S_{21}), si et seulement si $(E, \mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2)$ vérifie S'_{12} (resp. S'_{21}).

D'autre part :

Si $(E, \mathcal{O}_1)$ est un pseudo-tas, $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie S_{12} .

Si $(E, \mathcal{O}_1)$ est un hypertas injectif, $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie S'_{12} .

Exemples.

D est un demi-groupe, H est un demi-hypergroupe.

$(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie toujours les conditions S_{12} et S_{21} (nous posons : $\mathcal{O}_2 = \mathcal{L}$, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{R}$)

$(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S'_{12} , si et seulement si D vérifie la condition :

$$(C'_1) \quad \forall a, x, y \in D : \quad xa = ya \implies Dx \cup \{x\} = Dy \cup \{y\}.$$

On définit de même pour un demi-groupe D, la condition :

$$(C'_2) \quad \forall a, x, y \in D, \quad ax = ay \implies xD \cup \{x\} = yD \cup \{y\}.$$

Il est clair que C'_1 (resp. C'_2) généralise la simplifiabilité à droite (resp. à gauche).

Examinons maintenant le cas de H. Nous posons également $\mathcal{O}_1 = \mathcal{R}$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{L}$.
 $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S_{12} , si et seulement si H vérifie la condition :

$$(D_1) \quad \forall a_1, \dots, a_n, x, y \in H :$$

$$x \in a_1 \star \dots \star a_n, \quad y \in a_1 \star \dots \star a_n \implies H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\}.$$

On définit de même D_2 :

$$(D_2) \quad \forall a_1, \dots, a_n, x, y \in H :$$

$$x \in a_1 \star \dots \star a_n, \quad y \in a_1 \star \dots \star a_n \implies x \star H \cup \{x\} = y \star H \cup \{y\}.$$

Tout hypergroupe vérifie manifestement les conditions D_1 et D_2 .

D'autre part, $(H, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ vérifie la condition S'_{12} si et seulement si H vérifie la condition :

$$(C'_1) \quad \forall a_1, \dots, a_n, x, y \in H :$$

$$(x \star a_1 \star \dots \star a_n) \cap (y \star a_1 \star \dots \star a_n) \neq \emptyset \implies H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\}.$$

On définit de même la condition C'_2 :

$(C'_2) \quad \forall a_1, \dots, a_n, x, y \in H :$

$$(a_1 \star \dots \star a_n \star x) \cap (a_1 \star \dots \star a_n \star y) \neq \emptyset \implies x \star H \cup \{x\} = y \star H \cup \{y\}$$

Ces deux dernières conditions généralisent celles de simplifiabilité d'un côté.

3. Noyau, éléments nets d'un bi-hypertas.

Dans ce paragraphe, $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est un bi-hypertas fixé, $\mathcal{O}$ est le demi-groupe engendré par $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$.

Définitions.

On appelle idéal bilatère de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ tout complexe de E qui est à la fois un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$ et de $(E, \mathcal{O}_2)$.

On appelle noyau de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ l'intersection de tous les idéaux bilatères de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ (ce peut être la partie vide).

$(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est dit simple si E coïncide avec le noyau, autrement dit si $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ ne possède pas d'idéal bilatère propre.

Le théorème qui suit est fondamental dans notre exposé.

THÉORÈME I-1. - Soit $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ un bi-hypertas vérifiant la condition S_{21} , et tel que la famille $\mathfrak{T}$ des idéaux minimaux de $(E, \mathcal{O}_1)$ est non vide. Dans ces conditions, $\bigcup_{L \in \mathfrak{T}} L$ est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$.

Lorsque de plus, $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est simple, ou est régulier, $\bigcup_{L \in \mathfrak{T}} L$ coïncide avec le noyau de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, et tout idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$ contient un élément de $\mathfrak{T}$.

Démonstration. - $\bigcup_{L \in \mathfrak{T}} L$ est un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$; nous allons démontrer que c'est aussi un idéal de $(E, \mathcal{O}_2)$. Pour cela, il suffit d'établir que :

$$\theta_2 \in \mathcal{O}_2, L \in \mathfrak{T}, \theta_2(L) \neq \emptyset \implies \theta_2(L) \in \mathfrak{T}.$$

Compte tenu de la permutabilité des applications de $\mathcal{O}_1$ avec celles de $\mathcal{O}_2$, il est clair que $\theta_2(L)$ est un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$. Montrons que c'est un idéal minimal.

Soit A_1 un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$ contenu dans $\theta_2(L)$. Posons :

$$B_1 = \{b \in L : \theta_2(b) \subseteq A_1\}.$$

On a manifestement :

$$\theta_2(B_1) \subseteq A_1 \subseteq \theta_2(L) ; \quad B_1 \subseteq L .$$

B_1 n'est pas vide, car si a est un élément de A_1 , il existe $\ell \in L$ tel que a appartient à $\theta_2(\ell)$. Autrement dit, on a : $\theta_2(\ell) \cap A_1 \neq \emptyset$. Compte tenu de la condition S_{21} , il en résulte que l'on a :

$$\theta_2(\ell) \subseteq A_1 ,$$

donc ℓ appartient à B_1 .

On vérifie facilement que B_1 est un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$. Par suite, puisque L est un idéal minimal, on a $B_1 = L$, soit $A_1 = \theta_2(L)$.

On conclut que $\theta_2(L)$ est un idéal minimal de $(E, \mathcal{O}_1)$, et en définitive que $\bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L$ est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$.

Supposons maintenant que $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ soit régulier (le cas où $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est simple se traite de la même façon).

Soient A un idéal de $(E, \mathcal{O})$, L un idéal minimal de $(E, \mathcal{O}_1)$. $A \cap L$ est non vide, et est un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$ contenu dans L . Donc on a :

$$A \cap L = L , \text{ soit } L \subseteq A .$$

L étant un élément quelconque de $\mathfrak{S}$, on a :

$$\bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L \subseteq A .$$

Il résulte immédiatement de là que $\bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L$ est le noyau de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$. Nous posons : $K = \bigcup_{L \in \mathfrak{S}} L$.

Soit alors A_1 un idéal quelconque de $(E, \mathcal{O}_1)$. $A_1 \cap K$ est non vide, autrement dit, il existe $L \in \mathfrak{S}$, et $a_1 \in L \cap A_1$. On a alors :

$$L = \bigcup_{\theta_1 \in \mathcal{O}_1 \cup \{1_E\}} \theta_1(a_1) \subseteq A_1 .$$

C. Q. F. D.

Le théorème I-1 a de nombreuses conséquences, que nous étudions par la suite ; en particulier, il permet l'étude des éléments nets d'un bi-hypertas.

Nous posons :

$$i = 1, 2, \quad Z_i = \{a \in E : \forall b \in E, \exists \theta \in \mathcal{O}_i : a \in \theta(b)\} .$$

On vérifie facilement que Z_1 est la partie vide ou un idéal de $(E, \mathcal{O}_1)$. On a le théorème suivant :

THÉOREME I-2. - Si $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie la condition S_{21} , et si Z_1 n'est pas vide, on a :

- Z_1 est un idéal bilatère de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, plus précisément, est le noyau de $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$.
- $Z_2 \subseteq Z_1$.

COROLLAIRE I-2.a. - Si $(E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ vérifie les conditions S_{21} et S_{12} (en particulier si $(E, \mathcal{O}_1)$ et $(E, \mathcal{O}_2)$ sont des pseudos-tas), et si Z_1 et Z_2 ne sont pas vides, on a :

$$Z_1 = Z_2 = \text{noyau de } (E, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) .$$

II. Applications des théorèmes de la partie I.

L'application du théorème I-2 au bi-hypertas $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})$ associé à un demi-groupe D , fournit le théorème suivant bien connu :

THÉOREME ([1]). - Si D est un demi-groupe possédant un idéal à droite minimal, son noyau est réunion des idéaux à droite minimaux. De plus, tout idéal à droite de D , contient un idéal à droite minimal.

Ce théorème peut être généralisé dans différentes directions.

1. Applications directes du théorème I-1.

Nous nous bornerons dans ce paragraphe à des indications sommaires.

a. M idéaux d'un côté d'un demi-groupe. - Soit D un demi-groupe dont M est un sous-demi-groupe.

Définition. - Un complexe A de D est appelé M -idéal à droite de D si on a

$$AM \subseteq A .$$

Pour tout $m \in M$, soit θ_m la translation à droite de D définie par m . Nous notons $\mathcal{R}_M$ le demi-groupe des translations à droite de D de la forme θ_m , ($\forall m \in M$).

Il est clair que $(D, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$ est un bi-tas.

La proposition suivante permet d'appliquer à ce bi-tas le théorème I-1.

PROPOSITION. - Si M rencontre tout idéal à gauche de D (en particulier si M contient un complexe net à gauche), $(D, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$ est régulier.

Nous n'énonçons pas les théorèmes auxquels on parvient en appliquant le théorème I-1.

b. M idéaux d'un côté d'un demi-hypergroupe. - H étant un demi-hypergroupe dont M est un sous-demi-hypergroupe, on peut généraliser les considérations de la partie (a) en introduisant le bi-hypertas $(H, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$.

En général on impose à M les deux conditions suivantes :

- M rencontre tout idéal à gauche de H (ceci entraîne la régularité de $(H, \mathcal{R}_M, \mathcal{L})$).
- $\forall x \in H, m \in M, x \star m$ est réduit à un élément.

On peut alors appliquer le théorème I-1 au bi-hypertas $(H, \mathcal{L}, \mathcal{R}_M)$.

c. Demi-hypergroupe vérifiant une condition D . - On a le résultat suivant :

THÉORÈME II-1. - Si H est un demi-hypergroupe vérifiant la condition D_2 et possédant un idéal à droite minimal, son noyau est réunion des idéaux à droite minimaux. De plus, tout idéal à droite de H contient un idéal à droite minimal.

2. Applications du théorème I-1 utilisant l'hypertas inverse.

On peut établir d'autres résultats à partir du théorème I-1, en utilisant l'hypertas inverse.

Donnons tout d'abord la définition suivante :

Définition. - On appelle idéal à gauche maximal d'un demi-hypergroupe ou d'un demi-groupe D , tout idéal à gauche qui est :

- égal à D lorsque D est simple à gauche.
- un élément maximal de la famille des idéaux à gauche propres de D , lorsque D n'est pas simple à gauche.

On peut de même définir les notions d'idéal à droite maximal, et d'idéal bilatère maximal.

Ces définitions se généralisent immédiatement au cas où D est remplacé par un bi-hypertas.

THÉOREME II-2. - Soit H un demi-hypergroupe vérifiant la condition C'_1 et tel que la famille $\mathcal{S}$ de ses idéaux à gauche maximaux est non vide. Alors $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p$ est un idéal bilatère de H , éventuellement vide.

De plus pour que H soit simple, il faut et il suffit que H soit simple à gauche.

Démonstration. - Considérons le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ inverse de $(H, \mathcal{L}, \mathcal{R})$. Puisque H vérifie la condition C'_1 , $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ vérifie la condition S_{12} .

Nous remarquons tout de suite que pour qu'un complexe A de H soit un idéal à gauche propre (resp. un idéal bilatère propre), il faut et il suffit que $H - A$ soit un idéal propre de l'hypertas $(H, \mathcal{L}')$ (resp. un idéal bilatère propre du bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$).

Il en résulte que :

a. les idéaux à gauche, propres, maximaux de H sont les complémentaires d'idéaux propres minimaux de $(H, \mathcal{L}')$.

b. H est simple si et seulement si le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ l'est aussi.

Ceci dit nous allons supposer que H n'est pas simple à gauche, ce qui entraîne que tout idéal de H , appartenant à la famille $\mathcal{S}$ est propre.

On peut appliquer le théorème I-1 au bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$. Il entraîne, compte tenu des remarques faites plus haut que $\bigcup_{p \in \mathcal{S}} H - p$ est un idéal bilatère du bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ éventuellement égal à H .

Donc $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} p$ est un idéal bilatère de H , éventuellement vide. Montrons alors que H ne peut être simple, et pour cela faisons un raisonnement par l'absurde en supposant H simple.

Alors le bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$ est lui aussi simple, et on a, par suite

$$\bigcup_{p \in \mathcal{S}} H - p = H, \text{ soit } \bigcap_{p \in \mathcal{S}} p = \emptyset.$$

De plus, tout idéal de $(H, \mathcal{L}')$ non vide contient un idéal de $(H, \mathcal{L}')$ minimal. Autrement dit, on peut plonger tout idéal à gauche propre de H dans un idéal à gauche maximal.

On a, puisque H est supposé simple :

$$H \star H = H.$$

On peut alors appliquer à l'hypertas $(H, \mathcal{L})$ le théorème 118 de [4]. Il en résulte que :

H possède un complexe générateur à gauche minimal A dont le cardinal coïncide avec celui de $\mathfrak{S}$.

On a : $H = H \star A$.

Soit alors $a \in A$. Il existe $h \in H$ et $b \in A$ tel que $a \in h \star b$. Compte tenu des propriétés des complexes générateurs minimaux, il vient $a = b$, donc $a \in h \star a$.

Soit $x \in H$. On a :

$$x \star a \subseteq x \star h \star a.$$

Il existe donc $u \in x \star h$ tel que $(x \star a) \cap (u \star a) \neq \emptyset$.

En vertu de la condition C'_1 , il en résulte que x appartient à $H \star u$. Autrement dit,

$$x \in H \star x \star h.$$

On a donc :

$$H = H \star h.$$

$\{h\}$ est un complexe générateur à gauche minimal, et donc on a :

$$\overline{A} = \overline{\mathfrak{S}} = 1.$$

La famille $\mathfrak{S}$ ne contient donc qu'un seul idéal, ce qui contredit le résultat $\bigcap_{p \in \mathfrak{S}} p = \emptyset$.

Donc H n'est pas simple.

Il est évident d'autre part que si H est simple à gauche, H est simple.

C. Q. F. D.

Enonçons le théorème lorsque H est remplacé par un demi-groupe D .

THÉORÈME II-2'. - Soit D un demi-groupe vérifiant la condition C'_1 , et tel que la famille $\mathfrak{S}$ de ses idéaux à gauche maximaux est non vide. Alors $\bigcap_{p \in \mathfrak{S}} p$ est un idéal bilatère de H , éventuellement vide. De plus, pour que D soit simple, il faut et il suffit que D soit simple à gauche.

Remarque. - Si D ou H est simplifiable à droite, il vérifie C'_1 . On pourrait donc (nous ne le faisons pas) énoncer des corollaires évidents des théorèmes II-2 et II-2'.

COROLLAIRE II-2.a. - Tout demi-hypergroupe H (resp. tout demi-groupe D) sim-

ple à droite, vérifiant C_1' et possédant au moins un idéal à gauche maximal, est un hypergroupe (resp. est un groupe).

En effet H (resp. D) est simple à gauche et à droite.

COROLLAIRE II-2.b. - Tout demi-hypergroupe H (resp. tout demi-groupe D) simple à droite, vérifiant C_1' et possédant un élément neutre à droite e , est un hypergroupe (resp. est un groupe).

On démontre ce corollaire en raisonnant par l'absurde. Si par exemple H n'était pas un hypergroupe, l'ensemble p défini par $p = \{x \in H : e \notin H \star x\}$ serait un idéal à gauche maximum de H . Le corollaire II-2.a permet alors de conclure. Nous examinerons plus loin un cas particulier intéressant du corollaire II-2.a.

3. Applications du théorème I-2.

Le théorème I-2 permet l'étude des éléments zéroïds de Clifford-Miller ([1]), et des éléments inversibles de Ljapin ([2], [7]). Il permet même des généralisations assez intéressantes.

On sait que les éléments zéroïds d'un côté d'un demi-groupe (ou d'un demi-hypergroupe) sont les éléments nets du même côté. Le corollaire I-2.a entraîne alors le théorème bien connu de Clifford-Miller ([1]) :

THÉOREME. - Si D est un demi-groupe possédant des éléments nets à gauche et des éléments nets à droite, l'ensemble des premiers coïncide avec l'ensemble des seconds, et est le noyau K de D . K est un groupe et D est un homogroupe ([8]).

Nous allons maintenant indiquer sommairement comment on peut généraliser ce théorème.

A. Éléments M -nets dans un demi-groupe.

Définition. - Soit D un demi-groupe dont M est un sous-demi-groupe. Un élément x de D est dit M -net à droite si :

$$\forall y \in D, \exists m \in M : ym = x.$$

On définit de même les éléments M -nets à gauche.

Notons $Z_1(M)$ (resp. $Z_2(M)$), l'ensemble des éléments de D , M -nets à droite (resp. à gauche). Notons Z_1 (resp. Z_2) l'ensemble des éléments nets à droite (resp. à gauche) de D . On a manifestement :

$$Z_{1,M} \subseteq Z_1 ; \quad Z_{2M} \subseteq Z_2.$$

On montre alors la proposition suivante :

PROPOSITION II-3.

- a. Si $Z_1(M)$ et Z_2 ne sont pas vides, on a : $Z_1(M) = Z_2 = Z_1$.
- b. Si $Z_1(M)$ et $Z_2(M)$ ne sont pas vides, on a : $Z_1(M) = Z_2(M) = Z_1 = Z_2$.
- c. Si M' est un autre sous-demi-groupe de D et si $Z_1(M)$ et $Z_2(M')$ ne sont pas vides, on a :

$$Z_1(M) = Z_2(M') = Z_1 = Z_2 .$$

B. Éléments M-nets dans un demi-hypergroupe.

On peut généraliser de différentes façons les considérations précédentes au cas où H est un demi-hypergroupe dont M est un **sous-demi-hypergroupe**. Il est nécessaire que M vérifie une condition supplémentaire. On impose en général la condition suivante :

$$\forall x, y, a \in H, m_1 \dots m_n \in M :$$

$$x \in a \star m_1 \star \dots \star m_n, y \in a \star m_1 \star \dots \star m_n \implies H \star x \cup \{x\} = H \star y \cup \{y\} .$$

Nous n'énonçons pas les résultats que l'on peut obtenir.

C. Demi-hypergroupes vérifiant une condition D .

Parmi les théorèmes que l'on peut obtenir, citons le théorème suivant :

THÉOREME II-3'. - Si H est un demi-hypergroupe vérifiant les conditions D_1 et D_2 , et possédant des éléments nets à gauche, et des éléments nets à droite, l'ensemble des **premiers** coïncide avec l'ensemble des seconds et est le noyau K de H . K est un sous-hypergroupe de H .

Remarque. - Ce théorème fournit une généralisation intéressante de la notion d'homogroupe.

Nous allons maintenant étudier les éléments inversibles au sens de Ljapin dans un demi-groupe ou un demi-hypergroupe. Auparavant, nous allons établir quelques résultats concernant les hypergroupes vérifiant une condition de simplifiabilité.

THÉOREME II-4. - Tout hypergroupe simplifiable d'un côté est un groupe.

Démonstration. - Elle comporte plusieurs étapes.

Soit H un hypergroupe simplifiable à droite, par exemple. Montrons tout d'abord

que H possède une unité.

Soit $x_0 \in H$. Il existe $e \in H$ tel que $x_0 \in e \star x_0$. Si y appartient à H , on a :

$$y \star x_0 \subseteq y \star e \star x_0.$$

Il résulte de la simplifiabilité à droite que l'on a $y \in y \star e$. Donc e est unité à droite de H .

Posons alors :

$$H_e = \{z \in H : z \in e \star z\}.$$

On a : $e \in H_e$. Montrons que $H_e = H$ (ce qui entraîne que e est unité de H).

Soient $u \in H$, $y \in H_e$. Il existe $z, f \in H$ tels que

$$u \in (y \star z) \cap (f \star u).$$

On peut alors écrire :

$$u \in f \star u \subseteq f \star y \star z.$$

Donc :

$$(y \star z) \cap (f \star y \star z) \neq \emptyset.$$

Ceci entraîne que y appartient à $f \star y$. Mais, puisque $y \in H_e$, on a aussi $y \in e \star y$. Donc $e = f$.

On a alors : $u \in e \star u$, ce qui entraîne $u \in H_e$. u étant quelconque, on a $H_e = H$.

En définitive, H possède une unité e . Nous allons maintenant établir que H est simplifiable à gauche.

H étant un hypergroupe simplifiable à droite, on a :

$$\forall x \in H, \exists x' \in H \text{ unique} : e \in x' \star x.$$

x' est noté x^{-1} . On peut alors écrire si $x \in H$:

$$x \in x \star e \subseteq x \star x^{-1} \star x ; x \in e \star x.$$

On a donc :

$$x \star x^{-1} \star x \cap e \star x \neq \emptyset,$$

ce qui entraîne $e \in x \star x^{-1}$.

Etablissons alors quelques propriétés de "l'inverse" introduit ici.

On a tout d'abord :

$$y \in a \star x \Rightarrow a \in y \star x^{-1}.$$

En effet, si $y \in a \star x$, on peut écrire :

$$y \in (y \star e) \cap (a \star x) \subseteq (y \star x^{-1} \star x) \cap (a \star x).$$

Ceci entraîne $a \in y \star x^{-1}$. On a aussi :

$$a \in x \star y \Rightarrow a^{-1} \in y^{-1} \star x^{-1}.$$

En effet, si $a \in x \star y$, on peut écrire :

$$e \in a^{-1} \star a \subseteq a^{-1} \star x \star y,$$

d'où il résulte,

$$y^{-1} \in a^{-1} \star x,$$

donc, en vertu de la propriété précédente,

$$a^{-1} \in y^{-1} \star x^{-1}.$$

Montrons maintenant la simplifiabilité à gauche. On a :

$$u \in (x \star y) \cap (x \star y') \Rightarrow u^{-1} \in (y^{-1} \star x^{-1}) \cap (y'^{-1} \star x^{-1})$$

et donc $y^{-1} = y'^{-1}$, $y = y'$.

Ainsi H est un hypergroupe simplifiable des deux côtés.

Pour terminer, montrons que H est un groupe, soit que la loi $\star$ est univoque.

Soient $x, y \in H$; $u, v \in x \star y$. Il existe $a, b \in H$ tels que y appartient à $(a \star u) \cap (b \star v)$. u appartient alors à

$$(e \star u) \cap (x \star a \star u),$$

donc e appartient à $x \star a$.

On montre de même que e appartient à $x \star b$. Donc on a $a = b$.

Puisque de plus y appartient à $(a \star u) \cap (a \star v)$, on a $u = v$.

Ainsi $x \star y$ est réduit à un seul élément.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE II-4.a. - Tout demi-hypergroupe H simple à droite, simplifiable à droite et possédant un idéal à gauche maximal, est un groupe.

En effet, il résulte du corollaire II-2.a que H est un hypergroupe. Le théo-

rème II-4 entraîne alors que H est un groupe.

Remarque. - Je ne sais pas construire un demi-hypergroupe simplifiable d'un côté qui n'est pas un demi-groupe.

Rappelons maintenant quelques définitions et résultats relatifs aux éléments inversibles d'un côté au sens de LJAPIN ([7]).

Définition. - Un élément a d'un demi-groupe D est dit inversible à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin, si on a $D = aD$ (resp. $D = Da$).

Un élément inversible des deux côtés est dit inversible.

Nous notons I_d (resp. I_g) l'ensemble des éléments inversibles à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin.

Nous posons d'autre part, $I = I_d \cap I_g$.

On établit alors les résultats suivants ([2], [7]) :

- I_d , I_g , I s'ils ne sont pas vides sont des demi-groupes.
- I_d (resp. I_g) est vide ou est un complexe consistant à gauche (¹) (resp. à droite) de D .
- I est vide ou est un sous-groupe de D dont l'unité est celle de D .

On peut maintenant généraliser aux demi-hypergroupes ces définitions.

Définitions. - Un élément a d'un demi-hypergroupe H est dit inversible à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin si on a $H = a \star H$ (resp. $H = H \star a$). Un élément inversible des deux côtés est dit inversible.

Nous notons I_d (resp. I_g) l'ensemble des éléments inversibles à droite (resp. à gauche) au sens de Ljapin. $I = I_d \cap I_g$.

LEMME II-5.a.

$$x, y \in I_d \text{ (resp. } I_g) \Rightarrow (x \star y) \cap I_d \neq \emptyset \text{ (resp. } x \star y \cap I_g \neq \emptyset).$$

On peut écrire, si x et y appartiennent à I_d :

$$H = x \star H = y \star H = x \star y \star H.$$

Donc il existe $u \in x \star y$ tel que $y \in u \star H$. On a :

$$H = y \star H = u \star H.$$

Donc $u \in I_d \cap (x \star y)$.

(¹) Cela signifie que l'on a : $uv \in I_d \Rightarrow u \in I_d$.

Définition. - Un complexe A de H est dit consistant à gauche (resp. à droite) si :

$$(x \star y) \cap A \neq \emptyset \implies x \in A \quad (\text{resp.} \quad (x \star y) \cap A \neq \emptyset \implies y \in A) .$$

LEMME II-5.b. - Si I_d (resp. I_g) n'est pas vide, c'est un complexe consistant à gauche (resp. à droite) de H .

LEMME II-5.c. - Si H vérifie la condition C'_1 , en particulier si H est simplifiable à droite, et si I_g n'est pas vide, I_g est un complexe consistant de H et on a : $I_d \subseteq I_g$.

Ce résultat fort important découle de l'application du théorème I-2 au bi-hypertas $(H, \mathcal{L}', \mathcal{R}')$. Nous allons maintenant, en supposant H simplifiable à droite, l'affiner.

LEMME II-5.d. - Si H est simplifiable à droite, et si I_g n'est pas vide, I_g peut être muni d'une structure de demi-hypergroupe simplifiable à droite et simple à gauche, en posant :

$$\forall x, y \in I_g, \quad x \times y = (x \star y) \cap I_g .$$

Tout élément de I_d est inversible à droite au sens de Ljapin dans I_g .

Remarquons tout d'abord que si x et y appartiennent à I_g , $x \star y$ rencontre I_g . On peut donc poser :

$$x \times y = (x \star y) \cap I_g .$$

Soient x, y, z des éléments de I_g . Montrons que l'on a :

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z .$$

Pour cela nous allons établir que l'on a :

$$x \times (y \times z) = (x \star y \star z) \cap I_g .$$

(On montre de même que $(x \times y) \times z = x \star y \star z \cap I_g$.)

Il est évident que l'on a :

$$x \times (y \times z) \subseteq (x \star y \star z) \cap I_g .$$

Soit alors $u \in (x \star y \star z) \cap I_g$. Il existe $v \in y \star z$, tel que $u \in (x \star v) \cap I_g$. I_g étant consistant, il en résulte $v \in I_g$ soit $v \in y \times z$, et $u \in x \times (y \times z)$.

En définitive I_g muni de la loi $\times$ est un demi-hypergroupe, évidemment simplifiable à droite.

Montrons que I_g est simple à gauche, c'est-à-dire ne possède pas d'idéal à gauche propre.

Soient x, y des éléments de I_g . Il existe $z \in H$ tel que x appartient à $z \star y$ (puisque $y \in I_g$). I_g étant consistant, z appartient à I_g , et on a : $x \in z \times y$.

Soit enfin $z \in I_d$. Montrons que z est inversible à droite au sens de Ljapin dans I_g .

Il est clair tout d'abord que z appartient à I_g (car $I_d \subseteq I_g$). Soit alors $x \in I_g$. Il existe $y \in H$ tel que x appartient à $z \star y$. I_g étant consistant, y appartient à I_g , et on a :

$$x \in z \times y.$$

LEMME II-5.e. - Tout demi-hypergroupe simplifiable à droite, simple à gauche, possédant des éléments inversibles à droite au sens de Ljapin est un groupe.

Soit K un tel demi-hypergroupe. Nous notons I_d l'ensemble de ses éléments inversibles à droite au sens de Ljapin ($I_d \neq \emptyset$). Pour montrer que K est un groupe, il suffit d'établir que K est un hypergroupe (en vertu du théorème II-4).

Montrons tout d'abord que K possède une unité. Soit $x_0 \in K$. Il existe $e \in K$, tel que x_0 appartient à $e \star x_0$. En vertu de la simplifiabilité à droite de K , e est unité à droite de K .

Soit alors $a \in I_d$. Il existe $b \in K$ tel que x_0 appartient à $a \star b$. On peut écrire :

$$x_0 \in e \star x_0 \subseteq e \star a \star b.$$

Donc on a :

$$(a \star b) \cap (e \star a \star b) \neq \emptyset,$$

donc aussi :

$$a \in e \star a.$$

Soit alors $y \in K$. Il existe aussi $f \in K$ tel que y appartient à $f \star y$. On montre alors par le même raisonnement que a appartient à $f \star a$. On a :

$$(e \star a) \cap (f \star a) \neq \emptyset.$$

Ceci entraîne $e = f$. e est donc unité de K .

Soit alors $x \in K$. Il existe x' unique, tel que $e \in x' \star x$. x' est noté

x^{-1} . On peut écrire :

$$x \in x \star e \subseteq x \star x^{-1} \star x.$$

Donc il existe $u \in x \star x^{-1}$, tel que l'on ait : $x \in u \star x$. Il est clair que $u = e$. Donc, on a :

$$\forall x \in K, \quad e \in (x \star x^{-1}) \cap (x^{-1} \star x).$$

Soient alors x et y des éléments de K . On a :

$$e \in y \star y^{-1} \quad \text{et} \quad x \in e \star x \subseteq y \star y^{-1} \star x.$$

En d'autres termes, il existe $z \in K$ tel que : $x \in y \star z$.

K est donc également simple à droite ; c'est par suite un hypergroupe.

C. Q. F. D.

Remarque. - On montre de la même façon qu'un demi-groupe simplifiable à droite, simple à gauche, possédant des éléments inversibles à droite au sens de Ljapin, est un groupe.

THÉOREME II-5.

a. Si H est un demi-hypergroupe simplifiable d'un côté, et si I_d et I_g ne sont pas vides, on a $I_d = I_g = I$.

Muni de la loi $\times$, I est un groupe dont l'unité est unité à droite de H , et est un complexe consistant de H .

b. Soit H un demi-hypergroupe dont H' est un complexe consistant possédant les propriétés suivantes :

- $H = H \star H' = H' \star H$.
- $\forall x, y \in H', \exists z, z' \in H : x \in (y \star z) \cap (z' \star y)$.
- $\forall x, y \in H', x \star y \cap H' \neq \emptyset$.

Alors on a :

$$H' = I_d = I_g = I.$$

Muni de la loi $\times$ ($x \times y = x \star y \cap H'$), H' est un hypergroupe.

Démonstration. - Nous montrons la partie (a). La partie (b) est évidente.

En vertu des lemmes II-5.d et II-5.e, I_g muni de la loi $\times$ est un groupe. On a vu de plus que c'est un complexe consistant de H .

On vérifie aisément que son unité est unité à droite de H .

Montrons pour terminer que $I_d = I_g$.

Soient $x \in I_g$, $a \in I_d$. Il existe $y \in I_g$ tel que a appartient à $x \star y$. I_d étant consistant à gauche, on a donc $x \in I_d$.

C. Q. F. D.

On peut particulariser le théorème II-5 au cas où H est remplacé par un demi-groupe D .

THÉORÈME II-6.

a. Si D est demi-groupe simplifiable d'un côté, et si I_d et I_g ne sont pas vides, on a $I_d = I_g = I$. I est un sous-groupe consistant de D , dont l'élément neutre est unité bilatère de D .

b. Si D est un demi-groupe avec élément unité bilatère e , dont G est un sous-groupe consistant, on a $I_d = I_g = G$.

On peut comparer ce théorème au résultat de CLIFFORD-MILLER établissant qu'un demi-groupe possédant des éléments zéroïds à gauche et à droite est un homogroupe ([8]). Ici la condition d'être un idéal est remplacée par celle de consistance.

4. Éléments grossissants.

Définition ⁽²⁾. - Un élément x d'un demi-groupe D est dit grossissant à gauche, s'il existe un sous-demi-groupe propre M de D tel que $D = xM$.

On montre aisément ([2], [7]) la proposition suivante :

PROPOSITION II-7. - Tout élément grossissant à gauche de D est inversible à droite, mais non inversible à gauche.

Il en résulte le corollaire ci-après.

COROLLAIRE II-7.a. - Tout demi-groupe vérifiant la condition C'_1 et possédant une unité à droite, ne possède pas d'éléments grossissants à gauche. On peut généraliser de la façon suivante ce corollaire :

Soit M un sous-demi-groupe strict de D vérifiant la condition :

$$\forall x, y \in D, m \in M : xm = ym \Rightarrow Dx \cup \{x\} = Dy \cup \{y\}.$$

⁽²⁾ Notre définition est différente de celle donnée par LJAPIN qui impose l'existence d'un complexe M strictement contenu dans D tel que $D = xM$.

Posons :

$$I_d(M) = \{x \in D : D = xM\} .$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION II-8. - Si $I_d(M)$ n'est pas vide, I_g est vide.

On établit cette proposition en appliquant le théorème I-2 au bi-hypertas $(D, \mathcal{E}', \mathcal{R}'_M)$ (inverse du bi-tas $(D, \mathcal{E}, \mathcal{R}_M)$) : Si $I_d(M)$ et I_g ne sont pas vides tous les deux, ce théorème entraîne l'inclusion $I_d(M) \subseteq I_g$, ce qui est absurde, en vertu de la proposition II-7.

III. Complexes W-minimaux.

1. Rappel ([4]) ; idéaux p-minimaux d'un demi-hypergroupe.

PROPOSITION III-1. - Soit $(E, \mathcal{Q})$ un hypertas dont W est un idéal différent de E , mais éventuellement vide. Pour que W soit le résidu d'un complexe de E disjoint de W , il faut et il suffit que l'on ait : $W \cdot \dot{\mathcal{Q}} = W$ ⁽³⁾. Dans ce cas, W est dit fortement large.

Dans ce paragraphe 1, W est supposé implicitement fortement large, et est éventuellement vide, mais distinct de E .

Définition. - Un complexe A de E est dit W-minimal s'il est disjoint de W , admet W pour résidu et est minimal pour ces conditions. Nous notons $\mathcal{K}_W$, la famille des complexes W -minimaux de $(E, \mathcal{Q})$.

Nous posons $E_W = E - W$. D'autre part, si θ appartient à $\mathcal{Q}$, nous notons θ_W l'application, en général multivoque, définie sur E_W par :

$$\forall x \in E_W, \quad \theta_W(x) = \theta(x) \cap E_W .$$

Nous posons $\mathcal{Q}_W = \{\theta_W\}_{\theta \in \mathcal{Q}}$. On vérifie que $(E_W, \mathcal{Q}_W)$ est un hypertas. On pose :

$$(E, \mathcal{Q})_W = (E_W, \mathcal{Q}_W) .$$

La proposition suivante ramène l'étude des complexes W -minimaux à celle des complexes nets minimaux (entreprise dans [4]).

⁽³⁾ Rappelons que l'on pose : $W \cdot \dot{\mathcal{Q}} = \{x \in E : \theta(x) \subseteq W, \forall \theta \in \mathcal{Q}\} .$

PROPOSITION III-2. - Les complexes disjoints de W et admettant W pour résidu sont les complexes de E_W , nets dans l'hypertas $(E, \mathcal{O})_W$.

Définition ([5]). - Un idéal $\mathfrak{J}$ de $(E, \mathcal{O})$ qui rencontre E_W est dit W -minimal si on a :

$$\forall \alpha \subseteq E, \text{ idéal de } (E, \mathcal{O}) : \quad \mathfrak{J} \cap W \subseteq \alpha \subset \mathfrak{J} \implies \alpha = \mathfrak{J} \cap W.$$

Le rapport qui existe entre cette notion et celle d'idéal minimal d'un hypertas est précisé par la proposition qui suit :

PROPOSITION III-3.

a. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal W -minimal de $(E, \mathcal{O})$, $\mathfrak{J} \cap E_W$ est un idéal minimal de $(E, \mathcal{O})_W$, $\mathfrak{J} \cup W$ est un idéal W -minimal de $(E, \mathcal{O})$.

b. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal minimal de $(E, \mathcal{O})_W$, $\mathfrak{J} \cup W$ est un idéal W -minimal de $(E, \mathcal{O})$.

THÉORÈME III-4. - Soit $(E, \mathcal{O})$ un hypertas dont W est un idéal fortement large.

a. Pour que $\mathcal{K}_W$ soit non vide, il faut et il suffit que tout idéal de $(E, \mathcal{O})$ rencontrant E_W contienne un idéal W -minimal. Le cardinal de tout complexe W -minimal de $(E, \mathcal{O})$ est alors égal au cardinal de la famille des idéaux W -minimaux de $(E, \mathcal{O})$ contenant W . De plus, tout complexe disjoint de W et admettant W pour résidu contient un complexe W -minimal.

b. $\mathcal{K}_W$ étant supposé non vide, soient Σ_W la réunion des complexes W -minimaux de $(E, \mathcal{O})$, R_W la réunion des idéaux W -minimaux de $(E, \mathcal{O})$. On a :

$$R_W = \Sigma_W \cup W.$$

On peut appliquer ce théorème aux demi-groupes et aux demi-hypergroupes. Plus précisément H étant un demi-hypergroupe, D , un demi-groupe, si on l'applique à :

$(H, \mathcal{E})$: on trouve des résultats sur les complexes W -minimaux à gauche de H ;

$(D, \mathcal{E})$: on retrouve les résultats de P. LEFÈVRE [5] ;

$(D, \mathcal{E}, \mathcal{R})$: on retrouve ici encore des résultats de P. LEFÈVRE [5] ;

$(H, \mathcal{E}')$ ou $(D, \mathcal{E}')$: on trouve des résultats nouveaux, dont nous avons exposé une partie dans (1). Citons brièvement un résultat non donné dans [4].

Définitions. - Soit p un idéal à gauche de H , non vide. Un complexe A de H est dit p -générateur à gauche s'il est contenu dans p , et si on a $p = H \star A$. Un idéal à gauche α de H non vide est dit p -maximal s'il ne contient pas p ,

et si :

$$\forall b, \text{ idéal à gauche de } H, \alpha \subset b \subseteq \alpha \cup p \Rightarrow b = \alpha \cup p.$$

Nous convenons également que lorsque p est un idéal à gauche minimal, c'est aussi un idéal à gauche p -maximal.

La notion d'idéal à gauche p -maximal généralise clairement la notion d'idéal à gauche maximal.

Le résultat suivant découle du théorème III-4.

THÉOREME III-5. - Soit H un demi-hypergroupe, dont p est un idéal à gauche, non vide et tel que $p = H \star p$.

Pour que H possède des complexes p -générateurs à gauche minimaux, il faut et il suffit que tout idéal à gauche de H , ne contenant pas p , soit contenu dans un idéal à gauche, p -maximal.

Le cardinal de tout complexe p -générateur à gauche minimal de H est égal au cardinal de la famille des idéaux à gauche, p -maximaux contenus dans p .

2. Utilisation des bi-hypertas.

Dans ce paragraphe, D est un demi-groupe dont W est un idéal bilatère éventuellement vide, mais distinct de D .

Nous savons définir les pseudo-tas $(D_W, \mathcal{R}_W)$ et $(D_W, \mathcal{L}_W)$. On vérifie facilement que $(D_W, \mathcal{R}_W, \mathcal{L}_W)$ est un bi-pseudo-tas ; on le note $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})_W$.

Définition. - W est dit :

- premier si $ab \in W, a \notin W \Rightarrow b \in W$.
- premier au sens de LESIEUR ([6]) si, $aDb \subseteq W, a \notin W \Rightarrow b \in W$.

PROPOSITION III-6. - Si W est premier, ou premier au sens de LESIEUR, l'hypertas $(D, \mathcal{R}, \mathcal{L})_W$ est régulier.

On montre, en utilisant la théorie des bi-hypertas, le théorème qui suit.

THÉOREME III-7.

a. Si W est fortement large ([5]) à droite, et si D possède des complexes W -minimaux à droite, la réunion R_W des idéaux W -minimaux à droite de D est un idéal bilatère.

b. Si W est fortement large des deux côtés, et est premier, ou premier au sens de LESIEUR, si D possède des complexes W -minimaux à droite et des complexes W -minimaux à gauche, la réunion, R_W , des idéaux W -minimaux à droite coïncide avec la réunion, R'_W , des idéaux W -minimaux à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Semi-groups having zeroïd elements, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 117-125.
 - [2] DESQ (Roger). - Eléments inversibles dans un demi-groupe D , Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 4, 16 p.
 - [3] KOSKAS (Maurice). - Contribution à l'étude des groupoïdes, Demi-hypergroupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 9, 26 p.
 - [4] KOSKAS (Maurice). - Les hypertas, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des Nombres, t. 16, 1962/63, n° 10, 42 p.
 - [5] LEFEBVRE (Pierre). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).
 - [6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémoires des Sciences mathématiques, 154).
 - [7] LJAPIN (E. S.). - Polugrupp'. - Moskva, 1960.
 - [8] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).
-