

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL LAZARD

## Valuations de polynômes et de séries formelles

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 23, p. 1-14

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1962-1963\\_\\_16\\_2\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A9_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# VALUATIONS DE POLYNÔMES ET DE SÉRIES FORMELLES

par Michel LAZARD

## 1. Corps valués et polynômes.

(1.1) Une valuation  $v$  d'un corps commutatif  $k$  est une application  $v : k \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  qui vérifie les axiomes suivants. Pour tous  $x, y \in k$ ,

$$x = 0 \iff v(x) = +\infty ;$$

$$v(x - y) \geq \min(v(x), v(y)) ;$$

$$v(xy) = v(x) + v(y) .$$

(1.2) A partir d'un corps valué  $k$ , nous construisons comme suit le corps résiduel  $\bar{k}$  : soient  $\Omega$  et  $I$  l'ensemble des  $x \in k$  qui vérifient respectivement  $v(x) \geq 0$  et  $v(x) > 0$  ; les axiomes (1.1) montrent que  $\Omega$  est un sous-anneau de  $k$ , et  $I$  un idéal maximal de  $\Omega$ . Le corps  $\bar{k}$  est, par définition, le quotient  $\Omega/I$ .

(1.3) Nous voulons pouvoir parler de l'ensemble des polynômes à coefficients dans un anneau  $\Omega$  (associatif, commutatif et unitaire). Il s'agit des polynômes ordinaires, en un nombre fini quelconque de lettres.

Pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ , nous prenons les  $n$  "lettres"  $x_{n,i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et nous construisons l'anneau de polynômes

$$(1.3.1) \quad A^n(\Omega) = \Omega[x_{n,1}, \dots, x_{n,n}] .$$

Les ensembles  $A^n(\Omega)$  sont disjoints ; leur réunion (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) sera notée  $A(\Omega)$ . Un élément  $f \in A^n(\Omega)$  s'écrit univoquement comme une somme finie de monômes

$$(1.3.2) \quad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha ,$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $X^\alpha = x_{n,1}^{\alpha_1} \dots x_{n,n}^{\alpha_n}$  et  $c_\alpha \in \Omega$ . L'ensemble des monômes de multidegré  $\alpha$ , c'est-à-dire de la forme  $c_\alpha X^\alpha$ , sera noté  $\Lambda_\alpha^n(\Omega)$ . Nous noterons  $P_\alpha f$  le monôme  $c_\alpha X^\alpha$  de la décomposition (1.3.2) de  $f$ .

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous allègerons l'écriture en supprimant la référence à  $\Omega$ . L'anneau  $A^0(\Omega)$  des "polynômes en zéro lettre" se réduit à  $\Omega$ . Il sera plus simple d'écrire  $x$  (resp.  $x$  et  $y$ ) au lieu de  $x_{1,1}$  (resp.  $x_{2,1}$  et  $x_{2,2}$ ).

(1.4) Nous savons composer les polynômes à coefficients dans un même anneau  $\Omega$ . Soient  $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(\Omega)$ ,  $f \in \underline{\Lambda}^n$ ,  $g_1, \dots, g_n \in \underline{\Lambda}^m$ . Nous notons  $f(g_1, \dots, g_n) \in \underline{\Lambda}^m$  le polynôme composé, c'est-à-dire l'image de  $f$  par l'homomorphisme  $\varphi : \underline{\Lambda}^n \rightarrow \underline{\Lambda}^m$  défini par les relations  $\varphi(x_{n,i}) = g_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

(1.5) Enfin si  $\Omega$  est un sous-anneau (resp. un quotient) de l'anneau  $\Omega'$ , chaque  $\underline{\Lambda}^n(\Omega)$  s'identifie à un sous-anneau (resp. à un quotient) de  $\underline{\Lambda}^n(\Omega')$ .

## 2. Valuations des polynômes.

(2.1) Soit  $k$  un corps valué (1.1). Formons l'ensemble  $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(k)$ . Pour tout  $n \in \underline{\mathbb{N}}$  et tout  $f \in \underline{\Lambda}^n$ , écrit sous la forme (1.3.2), nous posons

$$(2.1.1) \quad w_0(f) = \inf_{\alpha \in \underline{\mathbb{N}}^n} v(c_\alpha),$$

et nous appelons  $w_0(f)$  la valuation banale de  $f$ . Si  $\Omega$  désigne l'anneau de valuation de  $k$  (1.2), nous pouvons écrire

$$(2.1.2) \quad f = cf', \text{ avec } c \in k, \quad v(c) = w_0(f)$$

et

$$f' \in \underline{\Lambda}^n(\Omega) \subset \underline{\Lambda}^n \quad (1.5),$$

et  $w_0(f)$  est le plus grand nombre réel auquel correspondent un  $c$  et un  $f'$  vérifiant (2.1.2).

(2.2) La valuation banale  $w_0$  vérifie les propriétés suivantes, que nous écrivons en remplaçant  $w_0$  par  $w$ ,

$$(V1) \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall f \in \underline{\Lambda}^n, \quad f = 0 \iff w(f) = +\infty.$$

$$(V2) \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall f, g \in \underline{\Lambda}^n, \quad w(f + g) \geq \min(w(f), w(g)).$$

$$(V3) \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall \lambda \in k, \quad \forall f \in \underline{\Lambda}^n, \quad w(\lambda f) = v(\lambda) + w(f).$$

$$(V4) \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall f \in \underline{\Lambda}^n, \quad w(f) = \inf_{\alpha \in \underline{\mathbb{N}}^n} w(P_\alpha f).$$

$$(V5) \quad \forall m, n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \underline{\mathbb{N}}^n, \quad \forall f \in \underline{\Lambda}_\alpha^n, \\ \forall g_1, \dots, g_n \in \underline{\Lambda}^m,$$

$$w(f(g_1, \dots, g_n)) \geq w(f) + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i w(g_i)$$

$$(V6) \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall i \text{ (avec } 1 \leq i \leq n), \quad w(x_{n,i}) = 0.$$

Pour vérifier la propriété (V5) il est commode de définir  $w_0$  par (2.1.2). Toutes les autres propriétés résultent immédiatement de (2.1.1), et des propriétés de la valuation  $v$  de  $k$  (1.1).

(2.3) Définition. - Nous appellerons valuation de  $\underline{A}$  une application  $w : \underline{A} \rightarrow \underline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$  qui vérifie les propriétés (V1) à (V6) de (2.2.1).

(2.4) Soit  $a$  un élément non nul de  $k$ . Nous définissons une application  $f \rightsquigarrow \tilde{f}$  de  $\underline{A}$  sur lui-même en posant (pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $f \in \Lambda^n$ )

$$(2.4.1) \quad \tilde{f} = a^{-1} f(ax_{n,1}, \dots, ax_{n,n}).$$

Si nous interprétons les polynômes  $f$  comme des fonctions qui définissent des transformations de points donnés par leurs coordonnées, la transformation  $f \rightsquigarrow \tilde{f}$  correspond à un changement de coordonnées très simple : une homothétie de rapport  $a^{-1}$ . Remarquons que les éléments de  $\Lambda^0 (= k)$  ne sont pas invariants : ils sont multipliés par  $a^{-1}$ . Par contre les  $x_{n,i}$  sont invariants.

L'application  $f \rightsquigarrow \tilde{f}$  vérifie les propriétés suivantes ;

$$(2.4.2) \text{ elle est } k\text{-linéaire : } (\lambda f + \mu g) \rightsquigarrow \lambda \tilde{f} + \mu \tilde{g} ;$$

$$(2.4.3) \text{ elle respecte les degrés : } P_\alpha f = P_\alpha \tilde{f} ;$$

$$(2.4.4) \text{ elle est compatible avec la composition : si } h = f(g_1, \dots, g_n)$$

$$\tilde{h} = \tilde{f}(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n) ;$$

$$(2.4.5) \text{ si } f \in \Lambda_\alpha^n, \quad \tilde{f} = a^{|\alpha|-1} f, \text{ où } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ est le degré total du monôme } f.$$

(2.5) Conservons les notations de (2.4), et donnons une valuation  $w$  de  $\underline{A}$  (2.3). Pour tout  $f \in \underline{A}$ , posons

$$(2.5.1) \quad \tilde{w}(f) = w(\tilde{f}).$$

L'application  $\tilde{w}$  est encore une valuation de  $\underline{A}$  ; cela résulte de la définition des valuations par les axiomes V (2.2) et des propriétés (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4).

Nous pouvons calculer  $\tilde{w}(f)$  pour un élément homogène  $f$  au moyen de la formule (2.4.5) et de l'axiome (V3). Nous obtenons

$$(2.5.2) \quad \tilde{w}(f) = w(f) + (|\alpha| - 1) v(a), \quad \text{pour } f \in \Lambda_\alpha^n.$$

L'axiome (V4) montre que la relation précédente suffit à calculer  $\tilde{w}(f)$  pour un  $f$  quelconque, et que  $\tilde{w}(f)$  ne dépend que de  $f$ , de  $w$ , et de  $v(a)$ .

(2.6) Les valuations  $w_\pi$ .

(2.6.1) LEMME. - Soient  $k$  un corps valué et  $\pi$  un nombre réel. Il existe une extension valuée  $k'$  de  $k$  et un élément  $a \in k'$ , tel que  $v(a) = \pi$ .

Preuve. - Nous prendrons  $k' = k(a)$  où  $a$  est transcendant sur  $k$ . Formons d'abord l'anneau de polynômes  $k[a]$ . Si  $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$  est un polynôme ( $c_n \in k$ ), nous posons  $\bar{v}(x) = \inf_n (v(c_n) + n\pi)$ . La fonction  $\bar{v}$  vérifie les axiomes (1.1) sur  $k[a]$ , sa restriction à  $k$  est  $v$ , et  $\bar{v}(a) = \pi$ . Il existe un prolongement unique de  $\bar{v}$  à  $k(a)$ , corps des fractions de  $k[a]$  qui soit une valuation. Nous notons encore  $v$  ce prolongement.

(2.6.2) PROPOSITION. - Soient  $k$  un corps valué,  $\pi$  un nombre réel,  $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(k)$  comme en (1.3),  $w_0$  la valuation banale de  $\underline{\Lambda}$  comme en (2.1). Il existe une valuation de  $\underline{\Lambda}$  et une seule, notée  $w_\pi$ , qui possède la propriété suivante :

$$(2.6.3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall f \in \underline{\Lambda}_\alpha^n, \quad w_\pi(f) = w_0(f) + (|\alpha| - 1)\pi.$$

Preuve. - L'unicité de la valuation  $w_\pi$  est une conséquence de l'axiome (V4). S'il existe dans  $k$  un élément  $a$  vérifiant  $v(a) = \pi$ , nous avons montré en (2.5) l'existence de  $w_\pi$  (cf. (2.5.2)). Sinon nous appliquons le lemme (2.6.1) et nous construisons une extension valuée  $k'$  de  $k$  qui contient l'élément  $a$  cherché. Nous avons l'inclusion évidente (1.5)

$$\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(k) \subset \underline{\Lambda}(k') ;$$

la valuation banale de  $\underline{\Lambda}(k')$  induit sur  $\underline{\Lambda}(k)$  sa valuation banale ; nous pouvons donc désigner sans danger les valuations par la lettre  $w_0$ . La valuation  $w_\pi$  est alors définie sur  $\underline{\Lambda}(k')$ , et sa restriction à  $\underline{\Lambda}$  (que nous notons encore  $w_\pi$ ) possède les propriétés voulues.

(2.6.4) Remarque. - La proposition (2.6.2) reste valable si l'on remplace la valuation banale  $w_0$  dont nous sommes partis par une valuation  $w$  quelconque. Dans le cas où  $k$  contient un élément de valuation  $\pi$ , la démonstration est la même. Sinon on peut montrer qu'une valuation quelconque  $w$  de  $\underline{\Lambda}(k)$  se prolonge en une valuation de  $\underline{\Lambda}(k')$  et se ramener ainsi au cas précédent. Mais cette vérification est assez longue, et il est alors préférable de donner une démonstration directe : cf. [1], proposition 1.

(2.7) Exemple. - Soit  $p$  un nombre premier. Prenons pour  $k$  le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels muni de sa valuation  $p$ -adique, pour laquelle  $v(p) = 1$ , et prenons

$\pi = (p - 1)^{-1}$ . Les monômes  $n^{-1} x^n$  sont des éléments de  $\Lambda^1 = \Lambda^1(\underline{\mathbb{Q}})$ .

(2.7.1) LEMME. - Pour tout entier  $n \geq 1$ .

$$w_{\pi}(n^{-1} x^n) \geq 0,$$

et l'égalité n'est atteinte que pour  $n = 1$  et  $n = p$ .

Preuve. - D'après (2.6.3), nous avons

$$(2.7.2) \quad w_{\pi}(n^{-1} x^n) = (n - 1)\pi - v(n), \text{ avec } \pi = (p - 1)^{-1}.$$

Posons  $n = n_0 p^k$ , où  $k = v(n)$ . Nous obtenons

$$(2.7.3) \quad (n - 1)\pi \geq (p^k - 1)\pi = \sum_{0 \leq i < k} p^i \geq k = v(n),$$

et l'égalité des membres extrêmes exige  $n_0 = 1$  et  $k = 0$  ou  $1$ .

### 3. Structures résiduelles.

(3.1) Soient  $k$  un corps valué et  $w$  une valuation (2.3) de  $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(k)$ . Nous avons défini en (1.2) l'anneau de valuation  $\Omega$  de  $k$  et l'idéal de valuation  $I$ ; le corps résiduel  $\bar{k}$  est le quotient  $\Omega/I$ .

Nous allons donner des définitions et constructions analogues pour  $\underline{\Lambda}$ . Nous posons

$$(3.1.1) \quad \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}} = \{f \mid f \in \underline{\Lambda} \text{ et } w(f) \geq 0\}$$

$$(3.1.2) \quad \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}} = \{f \mid f \in \underline{\Lambda} \text{ et } w(f) > 0\}$$

$$(3.1.3) \quad \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n} = \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}} \cap \underline{\Lambda}^n; \quad \underline{\Omega}_{\alpha}^{\underline{\Lambda}^n} = \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}} \cap \underline{\Lambda}_{\alpha}^n \quad (\text{pour } n \in \underline{\mathbb{N}}, \alpha \in \underline{\mathbb{N}}^n)$$

$$(3.1.4) \quad \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n} = \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}} \cap \underline{\Lambda}^n; \quad \underline{\Omega}_{\alpha}^{+\underline{\Lambda}^n} = \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}} \cap \underline{\Lambda}_{\alpha}^n.$$

(3.2) Les axiomes (V2) et (V3) de (2.2) montrent que (pour tout  $n$ )  $\underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n}$  et  $\underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n}$  sont des  $\Omega$ -modules, avec  $\underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n} \subset \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n}$ . De plus,  $I \cdot \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n} \subset \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n}$ , ce qui montre que le  $\Omega$ -module quotient  $\underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n} / \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n}$  est un  $\bar{k}$ -espace vectoriel. Nous le noterons  $B^n$  et nous noterons  $\rho$  l'épimorphisme canonique de  $\underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n}$  sur  $B^n$ . Nous avons donc les suites exactes

$$(3.2.1) \quad 0 \rightarrow \underline{\Omega}^{+\underline{\Lambda}^n} \rightarrow \underline{\Omega}^{\underline{\Lambda}^n} \xrightarrow{\rho} B^n \rightarrow 0.$$

Nous noterons  $\underline{B}$  la réunion des  $B^n$  (pour  $n \in \underline{\mathbb{N}}$ ), et  $\rho$  l'application  $\underline{\Lambda} \rightarrow \underline{B}$  dont les restrictions aux  $\underline{\Lambda}^n$  sont définies par (3.2.1).

(3.2.2) PROPOSITION. - Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , le  $\bar{k}$ -espace  $B^n$  est somme directe des sous-espaces  $B_\alpha^n = \rho_0 \Lambda_\alpha^n$  ( $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ). Si  $f \in \Lambda^n$ ,  $g_1, \dots, g_n \in \Lambda^m$ ,  $h = f(g_1, \dots, g_n)$ , alors  $h \in \Lambda^m$  et  $\rho h$  ne dépend que de  $\rho f$  et des  $\rho g_i$ , ce qui nous permet de définir la composition des éléments de  $B$  en posant

$$(3.2.3) \quad \rho h = \rho f(\rho g_1, \dots, \rho g_n).$$

Preuve. - L'assertion concernant les  $B_\alpha^n$  est une conséquence de (V4), d'après lequel  $\Lambda^n$  (resp.  $\Lambda_+^n$ ) est somme directe des  $\Lambda_\alpha^n$  (resp.  $\Lambda_+^\alpha$ ).

Pour établir la fin de notre proposition, nous pouvons supposer  $f \in \Lambda_\alpha^n$  pour un certain  $\alpha$  (d'après (1.3.2) et l'axiome (V4)). L'axiome (V5) nous montre alors que  $h \in \Lambda^m$  et que  $\rho h$  dépend seulement de  $f$  par l'intermédiaire de  $\rho f$ .

Pour montrer que  $\rho h$  ne dépend de  $g_1$  (par exemple) que par l'intermédiaire de  $\rho g_1$ , introduisons le polynôme  $f' \in \Lambda^{n+1}$  défini par

$$f' = f(x_{n+1,1} + x_{n+1,2}, x_{n+1,3}, \dots, x_{n+1,n+1}).$$

Les axiomes (V2), (V5) et (V6) nous montrent que la relation  $f \in \Lambda_\alpha^n$  implique  $f' \in \Lambda^{n+1}$ . Si nous remplaçons  $g_1$  par un polynôme  $g'_1 = g^* + g_1$  où  $g^* \in \Lambda_+^m$ , le polynôme  $h$  se trouve remplacé par  $f'(g^*, g_1, \dots, g_n)$  et

$$h' - h = f'(g^*, g_1, \dots, g_n) - f'(0, g_1, \dots, g_n).$$

Or les composantes homogènes non nulles du polynôme

$$f'(x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \dots, x_{n+1,n+1}) - f'(0, x_{n+1,2}, \dots, x_{n+1,n+1})$$

sont de degré strictement positif en  $x_{n+1,1}$ , et nous déduisons de l'axiome (V5) la relation  $h' - h \in \Lambda_+^m$ , c'est-à-dire  $\rho h = \rho h'$ .

(3.3) Exemple. - Reprenons, comme en (2.7) le corps  $\mathbb{Q}$  muni de sa valuation  $p$ -adique, et une valuation  $w_\pi$  de  $\Lambda$ , où  $\pi$  est l'inverse d'un entier  $e \geq 1$  (pas nécessairement  $p-1$ ). L'anneau  $\Omega$  est l'anneau  $\mathbb{Z}_{(p)}$  des rationnels  $p$ -entiers, et  $\bar{k}$  est le corps premier  $\mathbb{F}_p$ .

Soit  $\varphi \in B^n$ . Nous avons  $\varphi = \rho f$ , où  $f$  est un élément de  $\Lambda^n$ , que nous écrivons sous la forme (1.3.2). Seuls importent, pour la détermination de  $\varphi$ , les monômes  $c_\alpha X^\alpha$  tels que  $w_\pi(c_\alpha X^\alpha) = 0$ . D'après (2.6.3) et (2.1.1), cette relation signifie

$$(3.3.1) \quad v(c_\alpha) + \pi(|\alpha| - 1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3.3.2) \quad \text{ev}(c_\alpha) + |\alpha| - 1 = 0 .$$

Nous devons donc avoir

$$(3.3.3) \quad |\alpha| \equiv 1 \pmod{e} ,$$

et  $c_\alpha$  est de la forme

$$(3.3.4) \quad c_\alpha = p^{-\pi(|\alpha|-1)} c'_\alpha$$

où  $c'_\alpha$  est un élément inversible de  $\underline{\mathbb{Z}}(p)$ . Notons  $c \rightsquigarrow \bar{c}$  l'épimorphisme canonique de  $\underline{\mathbb{Z}}(p)$  sur  $\underline{\mathbb{F}}_p$ . Le polynôme

$$(3.3.5) \quad \sum_{\alpha} \bar{c}'_{\alpha} X^{\alpha} \in \underline{\Lambda}^n(\underline{\mathbb{F}}_p)$$

ne dépend que de  $\varphi$ . Nous le noterons  $\sigma\varphi$ . Nous venons de construire une application  $\sigma : \underline{B} \rightarrow \underline{\Lambda}(\underline{\mathbb{F}}_p)$  qui est injective. L'image de  $\underline{B}$  par  $\sigma$  est formée des polynômes à coefficients dans  $\underline{\mathbb{F}}_p$  dont les monômes (non nuls) ont un degré total congru à 1 modulo e. L'application  $\sigma$  est  $\underline{\mathbb{F}}_p$ -linéaire, et respecte les degrés, c'est-à-dire que  $\sigma(B_\alpha^n) \subset \underline{\Lambda}_\alpha^n(\underline{\mathbb{F}}_p)$ . De plus  $\sigma$  est compatible avec la composition dans  $\underline{B}$  et dans  $\underline{\Lambda}(\underline{\mathbb{F}}_p)$ , c'est-à-dire que

$$(3.3.6) \quad \sigma(\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) = (\sigma\varphi)(\sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_n) ,$$

pour  $\varphi \in B^n$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in B^m$ .

Dans le cas où  $e > 1$ , remarquons que  $B^0 = 0$ , et qu'il n'y a pas d'élément bilinéaire (non nul) dans  $B^2$ .

Pour toutes les valuations  $w_\pi$ , où  $\pi > 0$ , le produit de deux éléments de  $0^{\Lambda^n}$  appartient à  $0^{\Lambda^n}$ , mais a une image nulle dans  $B^n$ .

### (3.4) Les B-modules.

Reprenons les notations générales de (3.1) et (3.2). Chaque  $\Lambda^n$  peut être considéré comme une structure libre à  $n$  générateurs donnés dans la catégorie des  $k$ -algèbres associatives, commutatives et unitaires.

Montrons que les  $B^n$  sont aussi des structures libres à  $n$  générateurs donnés dans une catégorie que nous allons définir.

(3.4.1) Définition. - Un B-module est un ensemble  $E$  muni, pour chaque  $n \in \underline{\mathbb{N}}$ , d'une famille d'application de  $E^n$  (puissance cartésienne  $n$ -ième de  $E$ ) dans  $E$  en correspondance biunivoque avec les éléments de  $B^n$ . L'image dans  $E$  de  $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$  par l'application associée à  $\varphi \in B^n$  est notée  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ . L'axiome suivant doit être vérifié :

soient  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi \in B^n$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in B^m$ ,  $\psi = \varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  
 $a_1, \dots, a_m \in E$ ,  $b_i = \gamma_i(a_1, \dots, a_m)$ ; alors  
 $\varphi(b_1, \dots, b_n) = \psi(a_1, \dots, a_m)$ .

(3.4.2) Définition. - Soient  $E$  et  $E'$  deux  $B$ -modules. Un morphisme  
 $u : E \rightarrow E'$  est une application qui vérifie l'axiome suivant :

soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi \in B^n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in E$ ; alors

$$u(\varphi(a_1, \dots, a_n)) = \varphi(u(a_1), \dots, u(a_n)).$$

La catégorie des  $B$ -modules est définie par (3.4.1) et (3.4.2). L'associativité de la composition des polynômes entraîne que chaque  $B^n$  est un  $B$ -module. Il est aisé de vérifier que  $B^n$  est libre pour les générateurs  $x_{n,1}, \dots, x_{n,m}$ . Les  $B$ -modules sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{F}_p$ . Si  $\Omega$  est une  $\mathbb{F}_p$ -algèbre associative, commutative et unitaire, on a une définition naturelle des  $(\Omega \otimes B)$ -modules, pour laquelle nous renvoyons à [2]. Dans l'exemple étudié en (3.3), un  $B$ -module peut être défini (pour  $e > 1$ ), par sa structure de  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel et par une seule loi de composition  $(e+1)$ -aire.

### (3.5) Les $\nu B$ .

Conservons les notations de (3.1). Pour tout nombre réel  $\nu \geq 0$ , notons respectivement  $\nu A^n$  et  $\nu^+ A^n$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $A^n$  qui vérifient  $w(f) \geq \nu$  et  $w(f) > \nu$ . Pour  $\nu = 0$ , nous retrouvons les définitions de (3.1). Nous voyons comme précédemment que  $\nu A^n$  et  $\nu^+ A^n$  sont des  $\Omega$ -modules, et que leur quotient, que nous noterons  $\nu B^n$ , est un  $k$ -espace vectoriel. Nous définissons les applications  $\rho_\nu$  par les suites exactes :

$$(3.5.1) \quad 0 \rightarrow \nu^+ A^n \rightarrow \nu A^n \xrightarrow{\rho_\nu} \nu B^n \rightarrow 0.$$

Les espaces  $\nu B^n$  sont, comme précédemment, sommes directes des  $\nu B_\alpha^n = \rho_\nu(A_\alpha^n \cap \nu A_\alpha^n)$ . La proposition (3.2.2) admet la généralisation suivante, qui se démontre de même.

(3.5.2) PROPOSITION. - Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\nu, \nu_1, \dots, \nu_n$  des nombres réels  $\geq 0$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $f \in \nu A_\alpha^n = \nu A_\alpha^n \cap \nu A_\alpha^n$ ,  $g_i \in \nu_i A_i^m$

(pour  $1 \leq i \leq n$ ) et  $h = f(g_1, \dots, g_n)$ . Alors  $h \in \mu A^m$ , où  $\mu = \nu + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \nu_i$ , et  $\rho_\mu h$  ne dépend que de  $\rho_\nu f$  et des  $\rho_{\nu_i} g_i$ , ce qui nous permet d'écrire

$$(3.5.3) \quad \rho_\mu h = \rho_\nu f(\rho_{\nu_1} g_1, \dots, \rho_{\nu_n} g_n).$$

(3.5.4) COROLLAIRE. - Si tous les  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont nuls, nous pouvons supposer simplement  $f \in \underset{v}{A}^n$  dans l'énoncé (3.5.2).

#### 4. Séries formelles.

##### (4.1) Extension des résultats précédents aux séries formelles.

Nous noterons  $\hat{A}^n(\Omega)$  l'anneau des séries formelles

$$(4.1.1) \quad \hat{A}^n(\Omega) = \Omega[[x_{n,1}, \dots, x_{n,n}]] .$$

Les éléments de  $\hat{A}^n(\Omega)$  s'écrivent encore univoquement sous la forme

$$(4.1.2) \quad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha ,$$

mais les  $c_\alpha$  sont maintenant des éléments quelconques de  $\Omega$ . Nous considérons  $A^n(\Omega)$  comme un sous-anneau de  $\hat{A}^n(\Omega)$ . Si nous munissons  $\hat{A}^n(\Omega)$  de la topologie usuelle des séries formelles,  $\hat{A}(\Omega)$  apparaît comme le complété de  $A^n(\Omega)$ . Comme précédemment, nous supprimons la référence à  $\Omega$  quand cela est possible. Nous notons  $\hat{\underline{A}}$  la réunion des  $\hat{A}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

La composition (1.4) se prolonge à  $\hat{\underline{A}}$  par continuité, mais n'est pas partout définie : si  $f \in \hat{A}^n$ ,  $g_1, \dots, g_n \in \hat{A}^m$ , nous ne savons définir  $f(g_1, \dots, g_n) \in \hat{A}^m$  que si  $f$  est un polynôme ou si les termes constants des  $g_i$  sont nuls.

Soient  $k$  un corps valué,  $\underline{A} = \underline{A}(k)$ ,  $\hat{\underline{A}} = \hat{\underline{A}}(k)$  et  $w$  une valuation de  $\underline{A}$ . Si  $f \in \hat{\underline{A}}$ , donné par le développement (4.1.2), vérifie

$$(4.1.3) \quad \inf_{\alpha \in \mathbb{N}^n} w(c_\alpha X^\alpha) > -\infty ,$$

nous posons

$$(4.1.4) \quad w(f) = \inf_{\alpha \in \mathbb{N}^n} w(c_\alpha X^\alpha) .$$

Nous prolongeons ainsi  $w$  à une partie  $\hat{A}[w]$  de  $\hat{\underline{A}}$ , qui dépend de  $w$ . L'axiome (V4) est vérifié par définition ; il est aisé de voir que les autres axiomes (V) sont satisfaits.

Nous noterons  $\underset{v}{\hat{\underline{A}}}$  (resp.  $\underset{v+}{\hat{\underline{A}}}$ ) l'ensemble des  $f \in \hat{A}[w]$  qui vérifient  $w(f) \geq v$  (resp.  $w(f) > v$ ). Ce sont les complétés (pour la topologie des séries

formelles) de  $\varprojlim A$  et  $\varprojlim A$ . De même, le quotient de  $\hat{A}^n = \varprojlim \hat{A} \cap \hat{A}^n$  par  $\varprojlim \hat{A}^n = \varprojlim \hat{A} \cap \hat{A}^n$  s'identifie au complété  $\hat{B}^n$  de  $\varprojlim B^n$ , c'est-à-dire au produit direct des  $\varprojlim B^n$  dont  $\varprojlim B^n$  est la somme directe. Nous appellerons encore  $\rho$  l'épimorphisme de  $\varprojlim \hat{A}^n$  sur  $\hat{B}^n (= \varprojlim \hat{B}^n)$ , et, de même,  $\rho_{\varprojlim}$  l'épimorphisme de  $\varprojlim \hat{A}^n$  sur  $\varprojlim \hat{B}^n = \varprojlim \hat{A}^n / \varprojlim \hat{A}^n$ .

Les propositions (3.2.2) et (3.5.2) restent valables pour les séries formelles. Il faut, bien entendu, supposer que l'élément  $f(g_1, \dots, g_n)$  est défini dans  $\hat{A}$ . Mais si, comme dans l'exemple étudié en (3.3), avec  $e > 1$ , l'espace  $B^0$  se réduit à 0, nous pouvons toujours supposer que les  $g_i$  ont des termes constants nuls; dans ce cas  $\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  est défini pour tous  $\varphi \in \hat{B}^n$  et tous  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \hat{B}^m$ .

#### (4.2) Séries réciproques.

Soit  $f$  un élément de  $\hat{A}^1$ , c'est-à-dire une série formelle en une lettre, que nous écrirons  $f(x)$ . Nous supposons que les termes de degré  $< 2$  de  $f(x) - x$  sont nuls. Alors il existe une série  $g(x) \in \hat{A}^1$  possédant les mêmes propriétés, et déterminée par l'une des relations équivalentes

$$(4.2.1) \quad f(g(x)) = x; \quad g(f(x)) = x.$$

La série  $g$  est dite réciproque de  $f$ . Nous pouvons la calculer par la méthode des approximations successives. Posons

$$(4.2.2) \quad f(x) = x - r(x),$$

où  $r(x)$  est de la forme  $\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ . La série  $g$  est déterminée par la relation  $f(g(x)) = x$ , qui s'écrit encore

$$(4.2.3) \quad g(x) = x + r(g(x)).$$

Or, pour calculer les termes de  $r(g(x))$  jusqu'au degré  $n$ , il suffit de connaître ceux de  $g$  jusqu'au degré  $n-1$ . La série  $g(x)$  est donc la limite (au sens de la topologie des séries formelles) de la suite  $g_n(x)$ , définie par

$$(4.2.4) \quad g_1(x) = x; \quad g_{n+1}(x) = x + r(g_n(x)).$$

Nous en déduisons le résultat suivant.

(4.2.5) LEMME. - Soit  $f \in \hat{A}^1$  un élément tel que  $f - x$  ait ses termes de degré  $< 2$  nuls. Alors la série réciproque  $g$  appartient aussi à  $\hat{A}^1$ , son image  $\rho g$  ne dépend que de  $\rho f$ . Elle est déterminée par l'une des relations équivalentes

$$\rho f(\rho g) = x, \quad \rho g(\rho f) = x$$

(où  $x$  désigne encore l'image  $\rho x$  de  $x = x_{1,1}$ ). Nous obtenons  $\rho g$  par la méthode des approximations successives, comme en (4.2.4).

#### (4.3) Application au logarithme et à l'exponentielle.

Prenons pour  $k$  le corps  $\mathbb{Q}$  muni de sa valuation  $p$ -adique, et pour valuation  $w$  la valuation  $w_\pi$  où  $\pi = (p-1)^{-1}$ .

Définissons les séries  $L(x)$  et  $e(x)$  par les formules

$$(4.3.1) \quad L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1} x^n;$$

$$(4.3.2) \quad e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} x^n.$$

Ce sont les séries classiques  $\text{Log}(1+x)$  et  $e^x - 1$ ; elles sont donc réciproques l'une de l'autre.

(4.3.3) PROPOSITION. - La série  $L(x)$  appartient à  $\hat{A}_0^1$  et  $\rho L(x) = x - \rho u_p(x)$ ,  
où

$$(4.3.4) \quad u_p(x) = -p^{-1} x^p.$$

Preuve. - Notre assertion ne fait que répéter le lemme (2.7.1).

(4.3.5) PROPOSITION. - La série  $e(x)$  appartient à  $\hat{A}_0^1$ , et  $\rho e(x) = \rho e^*(x)$ ,  
où

$$(4.3.6) \quad e^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_p^n(x),$$

$u_p^n(x)$  désignant le  $n$ -ième itéré de  $u_p(x)$ , c'est-à-dire

$$(4.3.7) \quad u_p^n(x) = (-1)^n p^{-\pi(p^n-1)} x^{p^n}.$$

Preuve. - Nous utilisons le lemme (4.2.5) et la proposition (4.3.3). Pour calculer  $\rho e(x)$ , nous pouvons remplacer  $L(x)$  par  $x - u_p(x)$ . Or la relation

$$(4.3.8) \quad (x+y)^p = x^p + y^p,$$

valable dans les anneaux associatifs et commutatifs de caractéristique  $p$ , entraîne

$$(4.3.9) \quad \rho u_p(x+y) = \rho u_p(x) + \rho u_p(y).$$

Le calcul par approximations successives de la série réciproque de  $x - \rho u_p(x)$  est le calcul classique de l'inverse d'un opérateur linéaire de la forme  $1 - T$ .

### 5. Polynômes et séries formelles associatives (non commutatives).

(5.1) Rappelons que l'algèbre des polynômes associatifs (non commutatifs) en  $n$  lettres et à coefficients dans  $\Omega$  est la  $\Omega$ -algèbre associative (et unitaire) libre engendrée par ces lettres. Si, comme précédemment, les lettres sont notées  $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ , les polynômes sont encore des combinaisons linéaires de monômes, mais les monômes  $x_{n,i_1}, \dots, x_{n,i_r}$  sont distincts et linéairement indépendants pour toutes les valeurs de  $r \in \mathbb{N}$  et toutes les suites d'entiers  $i_1, \dots, i_r$  variant indépendamment de 1 à  $n$ . Pour chaque

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

il existe  $|\alpha|! / \prod_i \alpha_i!$  monômes distincts de multidegré  $\alpha$ .

(5.2) Modifions désormais nos notations, en appelant  $\Lambda^n(\Omega)$ , ou  $\Lambda^n$ , l'algèbre des polynômes associatifs en  $n$  lettres  $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$  à coefficients dans  $\Omega$ . Remarquons que, pour  $n = 1$ , cela n'entraîne aucune modification, car les polynômes associatifs en une lettre sont aussi commutatifs.

Toutes les considérations des paragraphes 1 à 3, ainsi que de (4.1) et de (4.2) s'étendent sans aucun changement. Dans [1] elles se trouvent exposées directement pour les polynômes et séries formelles associatives.

### (5.3) Applications à la série de Hausdorff.

Reprenons les notations de (4.3). Puisque nous n'avons pas modifié les définitions de  $\Lambda^1$ ,  $\hat{\Lambda}^1$ , etc., les propositions (4.3.3) et (4.3.5) restent valables, bien que la preuve de cette dernière utilise l'identité (4.3.8), qui suppose les anneaux commutatifs.

La série de Hausdorff  $\Phi(x, y)$  est définie par la relation

$$(5.3.1) \quad \Phi(x, y) = \text{Log}(e^x e^y)$$

c'est-à-dire, en utilisant les séries  $L$  et  $e$  :

$$(5.3.2) \quad \Phi(x, y) = L(e(x) + e(y) + e(x) e(y)).$$

La série  $\Phi$  est un élément de  $\hat{\Lambda}^2$ . Nous avons, (4.3.5),  $e(x) \in \hat{\Lambda}^1$ , d'où, d'après (3.5.2),

$$(5.3.3) \quad e(x) e(y) \in \hat{\Lambda}^2_\pi,$$

puisque  $w(xy) = \pi$ .

Rappelons l'identité de Jacobson, qui remplacera la relation (4.3.8). Dans tout anneau associatif, on a la relation

$$(5.3.4) \quad (x + y)^p = x^p + y^p + \Lambda(x, y) + pR(x, y),$$

où  $p$  est un nombre premier,  $x$  et  $y$  deux éléments de l'anneau,  $\Lambda$  et  $R$  des polynômes associatifs à coefficients entiers, tels que  $\Lambda$  soit construit au moyen du crochet de Lie  $[u, v] = uv - vu$  (et de l'addition).

Posons

$$(5.3.5) \quad \theta(x, y) = p^{-1} \Lambda(x, y).$$

L'identité de Jacobson s'écrit

$$(5.3.6) \quad u_p(x + y) = u_p(x) + u_p(y) - \theta(x, y) - R(x, y),$$

et conduit à

$$(5.3.7) \quad \rho u_p(x + y) = \rho u_p(x) + \rho u_p(y) - \rho \theta(x, y).$$

(5.3.8) THÉOREME. - La série  $\phi(x, y)$  appartient à  $\hat{A}^2$  et

$$(5.3.9) \quad \rho \phi(x, y) = x + y + \rho \theta(\rho e^*(x), \rho e^*(y)).$$

Preuve. - Nous savons déjà que  $\phi \in \hat{A}^2$ . Pour calculer  $\rho \phi$  à partir de (5.3.2), nous pouvons, (3.2.2), remplacer  $L(x)$  par  $x - u_p(x)$ ,  $e(x)$  par  $e^*(x)$  et  $e(x) e(y)$  par 0 (5.3.3). Si nous appliquons (5.3.7), nous obtenons la formule (5.3.9).

Le "commutateur de Hausdorff"  $\Psi(x, y)$  est défini par la formule

$$(5.3.10) \quad \Psi(x, y) = \text{Log}(e^{-x} e^{-y} e^x e^y),$$

c'est-à-dire

$$(5.3.11) \quad \Psi(x, y) = L((1 + e(-x))(1 + e(-y))(1 + e(x))(1 + e(y)) - 1).$$

Si on utilise la relation  $e(-x) + e(x) + e(-x) e(x) = 0$ , on voit que

$$(1 + e(-x))(1 + e(-y))(1 + e(x))(1 + e(y)) - 1$$

se réduit à  $e(x) e(y) - e(y) e(x)$  à condition de négliger les produits d'au moins trois éléments de la forme  $e(-x)$ ,  $e(x)$ ,  $e(-y)$ ,  $e(y)$ . Si nous appliquons la proposition (3.5.2), nous parvenons au résultat suivant.

(5.3.12) La série  $\Psi(x, y)$  appartient à  $\frac{\hat{A}^2}{\pi}$ , et

$$(5.3.13) \quad \rho_{\pi} \Psi(x, y) = \rho_{\pi} [\rho e^*(x), \rho e^*(y)],$$

où  $[x, y] = xy - yx \in \frac{\hat{A}^2}{\pi}$ .

(5.4) Toutes les considérations que nous avons développées s'étendent plus généralement aux analyseurs incomplets ou complets au sens de [2]. Les axiomes (V) de (2.2) permettent de définir la valuation d'un analyseur  $\underline{A}$  sur un corps valué  $k$ . Les constructions du § 3 conduisent à la définition de l'analyseur résiduel  $\underline{B}$  de  $\underline{A}$ , et aux espaces  ${}_y B^n$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] LAZARD (Michel). - Quelques calculs concernant la formule de Hausdorff, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, P. 435-451.
  - [2] LAZARD (Michel). - Lois de groupes et analyseurs, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 72, 1955, p. 299-400.
-