Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Josette Calais

Équivalences principales généralisées dans les demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1962-1963), exp. nº 12, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A1_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 12

11 février 1963

ÉQUIVALENCES PRINCIPALES GÉNÉRALISÉES DANS LES DEMI-GROUPES

par Mlle Josette CALAIS

Introduction. - Cet exposé fait suite, en quelque sorte, à celui de R. DESQ, du 12 février 1962. J'ai généralisé la méthode utilisée par R. DESQ, et j'ai été ainsi conduite aux définitions et à l'étude qui vont suivre.

1. Généralités.

DÉFINITION 1.1. - Etant donnés un demi-groupe D et un complexe H de D, on désigne par $\rho_H^{\alpha,\beta}$ (α, β entiers positifs ou nuls) la relation d'équivalence définie dans D par

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$$

si et seulement si

$$y_1\, y_2 \cdots y_\alpha\, x y_{\alpha+1} \cdots y_{\alpha+\beta} \in H \iff y_1\, y_2 \cdots y_\alpha\, x'\, y_{\alpha+1} \cdots y_{\alpha+\beta} \in H .$$

On vérifie en effet facilement qu'une telle relation est une relation d'équivalence. Dans toute cette étude on suppose α et β non simultanément nuls. On distingue alors les cas suivants :

1° $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ $\quad (H \overset{\circ}{\cdot} x) \cap D^\alpha = (H \overset{\circ}{\cdot} x') \cap D^\alpha$

2° $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{0,\beta})$ $\quad (H \cdot^{\circ} x) \cap D^\beta = (H \cdot^{\circ} x') \cap D^\beta$

3° $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ $\quad x = x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$ $\quad (H \circ\circ x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) = (H \circ\circ x') \cap (D^\alpha \times D^\beta)$

Les équivalences $\rho_H^{1,0}$, $\rho_H^{0,1}$ et $\rho_H^{1,1}$ ne sont autres que les équivalences principales ${}_HR$, R_H [1] et R'_H [2].

Dans la suite on utilisera aussi les notations définies par :

$$Q_x^{\alpha,0} = (H \overset{\circ}{\cdot} x) \cap D^\alpha \; ; \quad Q_x^{0,\beta} = (H \cdot^{\circ} x) \cap D^\beta \; ; \quad Q_x^{\alpha,\beta} = (H \circ\circ x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) ,$$

THÉORÈME 1.1. - Les relations d'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) sont régulières à gauche (resp. à droite, à droite et à gauche).

Montrons que $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ entraîne $ax \equiv ax' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ pour tout $a \in D$. En effet $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ implique $yx \in H \iff yx' \in H$ si y appartient

à D^{α}. Par suite, quel que soit $a \in D$, on a $yax \in H \iff yax' \in H$, si y appartient à D^{α}, donc $ax \equiv ax'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$, $\rho_H^{\alpha,0}$ est régulière à gauche.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

DÉFINITION 2.1. - On appelle résidu de H par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) l'ensemble $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta}$) des éléments $x \in D$ pour lesquels $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$ (resp. $Q_x^{0,\beta} = \emptyset$, $Q_x^{\alpha,\beta} = \emptyset$).

Remarque. - On a $W_H^{1,0} = {}_HW$, $W_H^{0,1} = W_H$ et $W_H^{1,1} = W'_H$, avec les notations utilisées dans [1] et [2].

PROPRIÉTÉ 1.1. - Si $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$, $W_H^{\alpha,\beta}$) n'est pas vide, c'est une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) et un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de D.

1° Pour tout $x \in W_H^{\alpha,0}$, on a $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$, donc $W_H^{\alpha,0}$ est une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$.

2° Soient $x \in W_H^{\alpha,0}$ et $a \in D$. Si $ax \notin W_H^{\alpha,0}$, il reste $y \in D^{\alpha}$ tel que $yax \in H$, ce qui entraîne $Q_x^{\alpha,0} \neq \emptyset$. Ceci est contraire à l'hypothèse, donc $ax \in W_H^{\alpha,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

PROPRIÉTÉ 2.1. - On a les relations :

$$W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1} \; ; \qquad W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1} \cdot\!\cdot\, D^{\beta-1}$$

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha,0} \cdot\!\cdot\, D^{\beta} = W_H^{0,\beta} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha} = (W_H^{1,1} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1}) \cdot\!\cdot\, D^{\beta-1}$$

avec la convention suivante : K étant un complexe de D, on pose

$$K \cdot\!\cdot\, D^0 = K \cdot\!\cdot\, D^0 = K .$$

Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$. On a $D^{\alpha} x \cap H = \emptyset$, donc $D^{\alpha-1} x \subseteq W_H^{1,0}$ et par suite $x \in W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1}$.

Soit $x \in W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1}$. On a $D^{\alpha-1} x \subseteq W_H^{1,0}$ par suite

$$D^{\alpha} x \cap H = \emptyset , \qquad \text{donc} \quad x \in W_H^{\alpha,0} .$$

(Démonstrations analogues pour les autres formules.)

Remarque. - Avec la convention faite plus haut, on peut écrire la formule générale suivante :

$$W_H^{\alpha,\beta} = (W_H^{1,0} \cdot\!\!\cdot\, D^{\alpha-1}) \cdot\!\!\cdot\, D^{\beta} = (W_H^{0,1} \cdot\!\!\cdot\, D^{\beta-1}) \cdot\!\!\cdot\, D^{\alpha}$$

valable pour $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

THÉORÈME 2.1.

1° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,0})$;

2° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{0,\beta})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{0,\beta+1})$;

3° $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta})$ entraîne $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,\beta})$ et $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,\beta+1})$.

Soit $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$, on a

$$(H \cdot\!\!\cdot\, x) \cap D^{\alpha} = (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cap D^{\alpha}$$

et par conséquent

$$(H \cdot\!\!\cdot\, x) \cap D^{\alpha+1} = (H \cdot\!\!\cdot\, x') \cap D^{\alpha+1}$$

c'est-à-dire $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+1,0})$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

Conséquences.

1° L'ensemble des relations $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne C_H (resp. C'_H) pour laquelle $\rho_H^{1,0}$ (resp. $\rho_H^{0,1}$) est élément minimum :

$$C_H : \quad ({}_HR =)\ \rho_H^{1,0} \subseteq \rho_H^{2,0} \subseteq \dots \subseteq \rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_H^{\alpha+1,0} \subseteq \dots$$

$$C'_H : \quad (R_H =)\ \rho_H^{0,1} \subseteq \rho_H^{0,2} \subseteq \dots \subseteq \rho_H^{0,\beta} \subseteq \rho_H^{0,\beta+1} \subseteq \dots$$

2° Pour les relations $\rho_H^{\alpha,\beta}$ on peut écrire le tableau suivant T_H :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots \\
& \rho_H^{1,p} & & \rho_H^{2,p-1} & \cdots & \rho_H^{p-1,2} & & \rho_H^{p,1} & \\
& & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
& & \rho_H^{1,3} & \rho_H^{1,2} \arrow[l] \arrow[r] & \rho_H^{2,2} & \rho_H^{2,1} \arrow[l] \arrow[r] & \rho_H^{3,1} & & \\
& & & & \rho_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$(= R'_H)$$

Dans ce tableau, les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion $\subseteq$.

THÉORÈME 3.1. - S'il existe un entier $n > 0$ tel que $D^n = D^{n+1}$, les chaînes C_H et C'_H sont finies, leur élément maximum étant $\rho_H^{n,0}$ pour l'une, $\rho_H^{0,n}$ pour l'autre ; le tableau T_H est fini, l'ensemble des équivalences $\rho_H^{\alpha,\beta}$ admettant pour élément maximum $\rho_N^{n,n}$. En particulier si $D = D^2$, on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_H^{1,0}$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$, $\rho_H^{0,\beta} = \rho_H^{0,1}$ quel que soit $\beta \geqslant 1$ et $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_H^{1,1}$ quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$.

1° Si $D^n = D^{n+1}$, on a $(H \cdot\cdot x) \cap D^n = (H \cdot\cdot x) \cap D^{n+\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$, donc $\rho_H^{n+\lambda,0} = \rho_H^{n,0}$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, de même $\rho_H^{0,n+\mu} = \rho_H^{0,n}$ pour tout $\mu \geqslant 0$.

2° Si $D^n = D^{n+1}$, dans le tableau T_H, on a :

- pour la ligne $\alpha + \beta = n + 2$, $\rho_H^{1,n+1} = \rho_H^{1,n}$ et $\rho_H^{n+1,1} = \rho_H^{n,1}$. En effet l'hypothèse entraîne $(H \cdot\cdot x) \cap (D \times D^n) = (H \cdot\cdot x) \cap (D \times D^{n+1})$ et $(H \cdot\cdot x) \cap (D^n \times D) = (H \cdot\cdot x) \cap (D^{n+1} \times D)$.

La ligne $\alpha + \beta = n + 2$ se réduit donc à

$$\rho_H^{2,n}, \rho_H^{3,n-1}, \ldots, \rho_H^{n-1,3}, \rho_H^{n,2}$$

- la ligne suivante de rang $\alpha + \beta = n + 3$ se réduit de la même façon à

$$\rho_H^{3,n}, \rho_H^{4,n-1}, \ldots, \rho_H^{n-1,4}, \rho_H^{n,3}$$

et ainsi de suite, la ligne de rang $\alpha + \beta = 2n$ se réduit à $\rho_H^{n,n}$, et $\rho_H^{n+\lambda,n+\mu} = \rho_H^{n,n}$ quels que soient $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

D'où le théorème énoncé.

2. Etude des résidus.

PROPRIÉTÉ 1.2. - On a :

1° $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$.

2° $W_H^{0,\beta} \subseteq W_H^{0,\beta+1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$.

3° $W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha+1,\beta} \cap W_H^{\alpha,\beta+1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$; on a $Q_x^{\alpha,0} = \emptyset$ et par suite $Q_x^{\alpha+1,0} = \emptyset$ et $x \in W_H^{\alpha+1,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

Conséquences.

1° L'ensemble des résidus $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne Γ_H (resp. Γ'_H) pour laquelle $W_H^{1,0}$ (resp. $W_H^{0,1}$) est élément

minimum :

$$\Gamma_H : \quad ({}_HW =)\ W_H^{1,0} \subseteq W_H^{2,0} \subseteq \dots \subseteq W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0} \subseteq \dots$$

$$\Gamma'_H : \quad (W_H =)\ W_H^{0,1} \subseteq W_H^{0,2} \subseteq \dots \subseteq W_H^{0,\beta} \subseteq W_H^{0,\beta+1} \subseteq \dots$$

2° Pour les résidus $W_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha\ ,\ \beta \neq 0)$ on peut écrire le tableau suivant τ_H :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & W_H^{1,p} & W_H^{2,p-1} & \cdots & W_H^{p-1,2} & W_H^{p,1} & \cdots \\
\cdots & W_H^{1,3} & & W_H^{2,2} & & W_H^{3,1} & \cdots \\
& & W_H^{1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & W_H^{2,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
& & & W_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$$(= W'_H)$$

Dans ce tableau τ_H , les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion $\subseteq$.

PROPRIÉTÉ 2.2. - On a $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,\beta} = \emptyset$, $W_H^{\alpha,\beta} = \emptyset$) si et seulement si $W_H^{1,0} = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} = \emptyset$, $W_H^{1,1} = \emptyset$) c'est-à-dire si H est net à gauche (resp. à droite, bilatèrement net).

1° Supposons $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$ pour $\alpha > 1$. D'après la propriété précédente on a $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{\alpha,0}$, donc $W_H^{1,0} = \emptyset$.

2° Supposons $W_H^{1,0} = \emptyset$, et supposons que l'on ait $W_H^{\alpha,0} \neq \emptyset$ pour un $\alpha > 1$. Soit $x \in W_H^{\alpha,0}$, quel que soit $a \in D^\alpha$, $ax \notin H$.

Mais on a $H \cdot ax \neq \emptyset$ puisque $W_H^{1,0} = \emptyset$. Il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$ $ba \in D^{\alpha+1}$, par suite $Q_x^{\alpha+1,0} \neq \emptyset$, ce qui entraîne $Q_x^{\alpha,0} \neq \emptyset$, contraire à l'hypothèse, donc $W_H^{\alpha,0} = \emptyset$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

PROPRIÉTÉ 3.2. - Si H satisfait à la condition $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1}$, $W_H^{1,0}$ est un idéal bilatère et l'on a :

(1) $$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1}$$

et

(2) $$W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha-1,\beta+1} , \qquad \alpha \geqslant 1 .$$

La relation (1) a déjà été démontrée dans [1]. Nous en redonnons cependant ici une démonstration.

$W_H^{1,0}$ étant un idéal à gauche, on a :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D \,.$$

D'autre part $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \implies W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D \subseteq W_H^{0,1} \cdot\!\cdot\, D = W_H^{1,1}$ (proposition 2.1).

$$\text{D'où : (1)} \quad W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1} \,.$$

La propriété 2.1 permet aussi d'écrire

$$W_H^{1,1} = W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D$$

et en tenant compte de la relation (1) on a :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D \,.$$

$W_H^{1,0}$ est donc un idéal bilatère.

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \implies (W_H^{1,0} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1}) \cdot\!\cdot\, D^{\beta} \subseteq (W_H^{0,1} \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1}) \cdot\!\cdot\, D^{\beta} = (W_H^{0,1} \cdot\!\cdot\, D^{\beta}) \cdot\!\cdot\, D^{\alpha-1} ,$$

$$\text{d'où : (2)} \quad W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha-1,\beta+1} , \qquad \alpha \geqslant 1 \,.$$

<u>Conséquence</u>. – Les relations (1) et (2) permettent d'écrire :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & W_H^{1,0} & \subseteq & W_H^{0,1} & & \\
 & & & W_H^{2,0} & \subseteq & W_H^{1,1} & \subseteq & W_H^{0,2} & \\
 & & W_H^{3,0} & \subseteq & W_H^{2,1} & \subseteq & W_H^{1,2} & \subseteq & W_H^{0,3} \\
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
 & W_H^{n,0} & \subseteq & W_H^{n-1,1} & \subseteq & \cdots & \subseteq & W_H^{1,n-1} & \subseteq & W_H^{0,n} \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots
\end{array}$$

Contre-exemple montrant que l'hypothèse $W_H^{1,0} \subset W_H^{0,1}$ n'entraîne pas nécessairement $W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$. Soit D le demi-groupe défini par la table suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	b	a
c	a	a	c	a
d	a	b	a	d

Posons $H = \{b , d\}$. On a :

$$W_H^{1,0} = \{a\} , \quad W_H^{0,1} = \{a , c\} , \quad W_H^{1,1} = \{a\} .$$

Contre-exemple montrant que l'hypothèse $W_H^{1,0} \subset W_H^{0,1}$ n'entraîne pas l'égalité entre tous les $W_H^{\alpha,\beta}$ pour lesquels $\alpha + \beta = n$. Soit D, le demi-groupe défini par la table suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	a	b	a

Posons $H = \{b\}$

$W_H^{1,0} = \emptyset \qquad W_H^{0,1} = \{a , c\}$

$W_H^{1,1} = \emptyset \qquad W_H^{2,0} = \emptyset , \quad W_H^{0,2} = \{a , c\}$.

On démontrerait de la même façon que si H vérifie

$$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,0}$$

on a

(1') $$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$$

(2') $$W_H^{\alpha,\beta} \subseteq W_H^{\alpha+1,\beta-1} , \qquad \beta \geqslant 1 .$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. - Si H est équirésiduel $(W_H^{1,0} = W_H^{0,1})$ on a

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha',\beta'} \quad \text{si } \alpha + \beta = \alpha' + \beta' , \qquad (\alpha , \beta , \alpha' , \beta' \geqslant 0) .$$

En posant $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^n$ si $\alpha + \beta = n$, on peut écrire la chaîne suivante :

(3) $$W_H^1 \subseteq W_H^2 \subseteq \dots \subseteq W_H^n \subseteq \dots$$

En effet si H est équirésiduel, les relations (2) et (2') sont vérifiées et elles entraînent respectivement :

$$W_H^{n,0} \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq \dots \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq W_H^{0,n}$$

et

$$W_H^{0,n} \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq \dots \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq W_H^{n,0} .$$

PROPRIÉTÉ 4.2. - Si l'on a $\lambda \geqslant 1$,

1. quel que soit $\alpha \geqslant 1$, on a

$$W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \iff W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset .$$

2. quel que soit $\beta \geqslant 1$, on a

$$W_H^{0,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \iff W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = 0 .$$

3. quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$, on a

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \iff W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset .$$

1° Remarquons que $W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$, pour $\alpha > 1$, entraîne

$$W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \quad \text{puisque} \quad W_H^{1,0} \subseteq W_H^{\alpha,0} .$$

D'autre part montrons que

$$W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \quad \text{entraîne} \quad W_H^{\alpha+1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset .$$

Soit $x \in H \cap D^\lambda$, l'hypothèse entraîne $x \notin W_H^{1,0}$. Donc il existe $a \in D$ tel que $ax \in H$, mais $ax \in H \cap D^{\lambda+1} \subseteq H \cap D^\lambda$, par suite $ax \notin W_H^{\alpha,0}$ et il existe $b \in D^\alpha$ tel que $bax \in H$; $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$.

Par suite si $\alpha = 1$, on en déduit que :

$$W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \implies W_H^{2,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \implies W_H^{3,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \implies \cdots$$

Donc

$$W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \implies W_H^{\alpha,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$$

quel que soit $\alpha \geqslant 1$.

2° On remarque comme précédemment que

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \quad \text{pour} \quad \alpha \geqslant 1 , \quad \beta \geqslant 1 , \quad \text{entraîne} \quad W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$$

puisque l'on a $W_H^{1,1} \subseteq W_H^{\alpha,\beta}$. Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait précédemment, on montre que

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \quad \text{entraîne} \quad W_H^{\alpha+1,\beta+1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset .$$

Or $W_H^{\alpha+1,\beta}$ et $W_H^{\alpha,\beta+1}$ sont contenus dans $W_H^{\alpha+1,\beta+1}$, par suite :

$$W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \implies \begin{cases} W_H^{\alpha+1,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \\ W_H^{\alpha,\beta+1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \end{cases}$$

On en déduit alors que

$$W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset \quad \text{entraîne} \quad W_H^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$$

quels que soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$.

THÉORÈME 2.2.

1° Si $W_H^{1,0} \cap H = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H = \emptyset$, $W_H^{1,1} \cap H = \emptyset$) on a $W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0}$

pour tout $\alpha \geqslant 1$ (resp. $W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$, $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$).

2° Soit $\lambda \geqslant 2$.

- Si $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$) la chaîne Γ_H (resp. Γ'_H) des résidus $W_H^{\alpha,0}$ (resp. $W_H^{0,\beta}$) est finie son élément maximum étant $W_H^{\lambda-1,0}$ (resp. $W_H^{0,\lambda-1}$).

- Si $W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ avec $\lambda > 2$, le tableau τ_H des résidus $W_H^{\alpha,\beta}$ est fini, sa dernière ligne étant celle de rang $\alpha + \beta = \lambda - 1$, tous les éléments de cette ligne étant égaux entre eux.

- Si $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \emptyset$ on a $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

a. Supposons $W_H^{1,0} \cap H = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$ $(\alpha \geqslant 1)$; il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$, donc $ax \notin W_H^{1,0}$. Par suite, il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$. Or $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_H^{\alpha+1,0}$, la démonstration précédente entraîne donc $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\alpha+1,0}$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$, d'où le théorème.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

b. Soit $\lambda \geqslant 2$. Supposons $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,0}$, $\alpha \geqslant \lambda - 1$; il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$; $ax \in H \cap D^{\alpha+1} \subseteq H \cap D^\lambda$ donc $ax \notin W_H^{1,0}$ et il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{\alpha+1}$, donc $x \notin W_H^{\alpha+1,0}$, On en déduit $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\alpha+1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant \lambda - 1$, et par suite $W_H^{\alpha,0} = W_H^{\lambda-1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant \lambda - 1$.

(Démonstration analogue pour le cas où $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$.)

Supposons $W_H^{1,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ $(\lambda > 2)$. Soit $x \in W_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha , \beta > 0$ et $\alpha + \beta \geqslant \lambda - 1)$. Il existe $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$ tel que $axb \in H$, $axb \in H \cap D^{\alpha+\beta+1} \subseteq H \cap D^\lambda$, donc $axb \notin W_H^{1,1}$ et il existe $(a' , b') \in D \times D$ tel que $a'axbb' \in H$, on en déduit que $x \notin W_H^{\alpha+1,\beta+1}$ et par suite

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha+1,\beta+1} = W_H^{\alpha+1,\beta} = W_H^{\alpha,\beta+1}$$

puisque $W_H^{\alpha+1,\beta}$ et $W_H^{\alpha,\beta+1}$ contiennent $W_H^{\alpha,\beta}$ et sont contenus dans $W_H^{\alpha+1,\beta+1}$. D'autre part, la condition $\alpha + \beta \geqslant \lambda - 1$ avec $\lambda > 2$, entraîne, dans le cas où $\lambda - 1 \neq 2$, que l'un au moins des nombres α , β est supérieur à 1 . Supposons $\beta > 1$ et considérons le résidu $W_H^{\alpha+1,\beta-1}$ placé immédiatement à droite de $W_H^{\alpha,\beta}$ dans la ligne $\alpha + \beta = \lambda - 1$ du tableau τ_H . La démonstration précédente appliquée à $W_H^{\alpha+1,\beta-1}$ permet d'écrire en particulier

$$W_H^{\alpha+1,\beta-1} = W_H^{\alpha+1,\beta} .$$

Donc

$$W_H^{\alpha+1,\beta-1} = W_H^{\alpha,\beta}$$

et ainsi tous les éléments de la ligne $\alpha + \beta = \lambda - 1$ sont égaux entre eux.

Supposons $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \emptyset$. Soit $x \notin W_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha \geqslant 1 , \beta \geqslant 1)$, il existe $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$ tel que $axb \in H$, $axb \in H \cap D^3 \subseteq H \cap D^2$, donc $axb \notin W_H^{1,1}$ et il existe $(a' , b') \in D \times D$ tel que $a'axbb' \in H$, on en déduit que $x \notin W_H^{\alpha+1,\beta+1}$ et par suite

$$W_H^{\alpha+1,\beta+1} = W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{\alpha,\beta+1} = W_H^{\alpha+1,\beta} \text{ quels que soient } \alpha \geqslant 1 , \beta \geqslant 1 ,$$

$$W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1} \text{ pour tout } \alpha \geqslant 1 \text{ et tout } \beta \geqslant 1 .$$

<u>Remarque.</u> - Le théorème précédent permet de conclure que

1. Si $0 < \lambda \leqslant 2$, $W_H^{1,0} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ entraîne $W_H^{\alpha,0} = W_H^{1,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$, de même $W_H^{0,1} \cap H \cap D^\lambda = \emptyset$ entraîne $W_H^{0,\beta} = W_H^{0,1}$ pour tout $\beta \geqslant 1$

2. Si $0 < \lambda \leqslant 3$, $W_H^{1,1} \cap H \cap D = \emptyset$ entraîne $W_H^{\alpha,\beta} = W_H^{1,1}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

<u>Exemple illustrant le théorème 2.2.</u> - Soit D , défini par la table :

	z	a	b	c	d	e	f	g	h
z	z	z	z	z	z	z	z	z	z
a	z	a	b	a	z	z	z	z	z
b	z	a	b	a	z	z	z	z	z
c	z	a	b	a	z	z	z	z	z
d	z	z	z	z	d	e	d	d	d
e	z	z	z	z	d	e	d	d	d
f	z	z	z	z	d	e	d	d	d
g	z	z	z	z	d	e	d	d	f
h	z	z	z	z	d	e	d	f	g

On a

$$D = \{z , a , b , c , d , e , f , g , h\}$$

$$D^2 = \{z , a , b , d , e , f , g\}$$

$$D^3 = \{z , a , b , e , f\}$$

$$D^4 = \{z , a , b , d , e\} = D^n \text{ quel que soit } n \geqslant 4 .$$

Posons $H = \{b , f , g\}$

$$W_H^{1,0} = \{z , a , c , d , e , f\} \qquad H \cap W_H^{1,0} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{2,0} = \{z , a , c , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{3,0} = \{z , z , c , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{0,1} = \{z , d , e , f\} \qquad H \cap W_H^{0,1} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{0,2} = \{z , d , e , f , g\}$$

$$W_H^{0,3} = \{z , d , e , f , g , h\}$$

$$W_H^{1,1} = \{z , d , e , f , g\} \qquad H \cap W_H^{1,1} \cap D^4 = \emptyset$$

$$W_H^{1,2} = \{z , d , e , f , g , h\} = W_H^{2,1}$$

Cherchons à quelle condition un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W peut être le résidu d'un complexe H par rapport à une équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$).

THÉORÈME 3.2. - Pour qu'un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W soit le résidu d'un complexe H par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (resp. $\rho_H^{0,\beta}$, $\rho_H^{\alpha,\beta}$) il faut et il suffit qu'il vérifie la relation $(F_{\alpha,0})$: $W = D^\alpha W \cdot^\circ D^\alpha$ (resp. $(F_{0,\beta})$: $W = WD^\beta \circ^\cdot D^\beta$, $(F_{\alpha,\beta})$: $(D^\alpha WD^\beta \cdot^\circ D^\alpha) \circ^\cdot D^\beta = W$).

1° Par hypothèse $W_H^{\alpha,0} = W$.

$$x \in W \implies D^\alpha x \subseteq (D - H) \implies x \in (D - H) \cdot^\circ D^\alpha$$

$$x \in (D - H) \cdot^\circ D^\alpha \implies D^\alpha x \subseteq (D - H) \implies x \in W_H^{\alpha,0} = W$$

par suite

$$\underline{W = (D - H) \cdot^\circ D^\alpha} .$$

W est un idéal à gauche fermé à gauche par rapport à D^α [2] et l'on peut écrire :

$(F_{\alpha,0})$ $$\underline{W = D^\alpha W \cdot^\circ D^\alpha} .$$

D'autre part, $x \in W \implies D^\alpha x \subseteq D - H$, or $D^\alpha x \subseteq D^{\alpha+1}$ par suite

$$D^\alpha x \subseteq D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)$$

et

$$x \in [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)] \cdot^\circ D^\alpha .$$

Réciproquement, si $x \in [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H)] \cdot^{\bullet} D^{\alpha}$, on a

$$D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap H) .$$

Donc

$$D^{\alpha} x \subseteq D - H \quad \text{et} \quad x \in W_H^{\alpha,0} .$$

On a donc

$$\underline{W = [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} - H)] \cdot^{\bullet} D^{\alpha}} .$$

2° Par hypothèse W est un idéal à gauche, fermé à gauche par rapport à D^{α} , c'est-à-dire vérifiant la relation $(F_{\alpha,0})$. Montrons qu'il existe des complexes H admettant W comme résidu par rapport à $\rho_H^{\alpha,0}$.

$(F_{\alpha,0})$ $$W = D^{\alpha} W \cdot^{\bullet} D^{\alpha}$$

Posons $H = D - D^{\alpha} W$ et $K = D^{\alpha+1} - D^{\alpha} W$.

On a $$W_H^{\alpha,0} = (D - H) \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = D^{\alpha} W \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = W$$

$$W_K^{\alpha,0} = [D^{\alpha+1} - (D^{\alpha+1} \cap K)] \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = D^{\alpha} W \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = W .$$

(Démonstrations analogues dans les autres cas ; pour le cas $W_H^{\alpha,\beta}$, on utilise les résultats démontrés dans [1] dans le paragraphe "Idéaux bilatères bilatèrement fermés ".)

PROPRIÉTÉ 5.2. - Si W est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) vérifiant la condition $(F_{\alpha,0})$ (resp. $(F_{0,\beta})$, $(F_{\alpha,\beta})$) il vérifie aussi la condition $F_{\alpha-1,0}$ (resp. $F_{0,\beta-1}$, $F_{\alpha-1,\beta}$ et $F_{\alpha,\beta-1}$).

Soit W un idéal à gauche vérifiant la condition

$(F_{\alpha,0})$ $$W = D^{\alpha} W \cdot^{\bullet} D^{\alpha}$$

c'est-à-dire $D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha} W \implies x \in W$.

Supposons que l'on ait $D^{\alpha-1} x \subseteq D^{\alpha-1} W$, on a alors

$$D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha} W , \text{ d'où } x \in W .$$

Par suite $D^{\alpha-1} x \subseteq D^{\alpha-1} W \implies x \in W$, W vérifie la condition $(F_{\alpha-1,0})$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas.)

<u>Conséquences</u>. - On peut écrire les chaînes et le tableau suivants :

$$\cdots \subseteq F_{\alpha,0} \subseteq F_{\alpha-1,0} \subseteq \cdots \subseteq F_{2,0} \subseteq F_{1,0} .$$

$$\cdots \subseteq F_{0\beta} \subseteq F_{0,\beta-1} \subseteq \cdots \subseteq F_{0,2} \subseteq F_{0,1} .$$

$$\begin{tikzcd}
 & & F_{1,1} & & \\
 & F_{1,2} \arrow[ur] & & F_{2,1} \arrow[ul] & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & F_{1,n-1} & & F_{2,n-2} & \cdots & F_{n-2,2} & & F_{n-1,1} \\
F_{1,n} \arrow[ur] & & F_{2,n-1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & F_{n-1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & F_{n,1} \arrow[ul] \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Contre-exemple montrant que la condition $(F_{\alpha-1,0})$ n'entraîne pas nécessairement la condition $(F_{\alpha,0})$. Soit D le demi-groupe défini par la table :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

Soit $W = \{a , c\}$.

On vérifie que $Dx \subseteq DW \implies x \in W$, mais que $D^2 x \subseteq D^2 W \not\Rightarrow x \in W$.

Donc $(F_{1,0}) \not\Rightarrow (F_{2,0})$.

PROPRIÉTÉ 6.2. - Si W est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) la condition $W \cdot^{\bullet} D = W$ (resp. $W \,^{\bullet}\!\cdot D = W$, $(W \cdot^{\bullet} D) \,^{\bullet}\!\cdot D = W$) est équivalente à la condition $W \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = W$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$ (resp. $W \,^{\bullet}\!\cdot D^{\beta} = W$ quel que soit $\beta \geqslant 1$, $(W \cdot^{\bullet} D^{\alpha}) \,^{\bullet}\!\cdot D^{\beta} = W$ quels que soient $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$).

Soit W, un idéal à gauche, vérifiant la condition $(L_{\alpha,0})$: $W \cdot^{\bullet} D^{\alpha} = W$, c'est-à-dire $D^{\alpha} x \subseteq W \implies x \in W$, ou $D^{\alpha} K \subseteq W \implies K \subseteq W$.

Soit $x \in D$ tel que $Dx \subseteq W$, on en déduit $D^{\alpha} x \subseteq D^{\alpha-1} W \subseteq W$, d'où $x \in W$. Par conséquent W vérifie $(L_{1,0})$: $W \cdot^{\bullet} D = W$.

Réciproquement, soit W un idéal à gauche vérifiant la condition $(L_{1,0})$: $W \cdot^{\bullet} D = W$, c'est-à-dire $Dx \subseteq W \implies x \in W$ ou $DK \subseteq W \implies K \subseteq W$. Soit $x \in D$ tel que $D^{\alpha} x \subseteq W$ pour un entier $\alpha > 1$. On peut écrire $D.D^{\alpha-1} x \subseteq W$ d'où $D^{\alpha-1} x \subseteq W$; de la même façon on obtient $D^{\alpha-2} x \subseteq W$ et ainsi de suite jusqu'à $Dx \subseteq W$ qui entraîne $x \in W$. Donc $D^{\alpha} x \subseteq W \implies x \in W$, W vérifie $(L_{\alpha,0})$.

(Démonstration analogue pour les autres cas.)

On désignera par $L_{0,1}$ la condition $W \,^{\bullet}\!\cdot D = W$ pour un idéal à droite et par $L_{1,1}$ la condition $(W \cdot^{\bullet} D) \,^{\bullet}\!\cdot D$ pour un idéal bilatère [1].

---

[1] Un idéal à gauche vérifiant la condition $L_{1,0}$ est dit : fortement large à gauche [3]. De même un idéal à droite (resp. bilatère) vérifiant $L_{0,1}$ (resp. $L_{1,1}$) est dit fortement large à droite (resp. bilatère).

THÉORÈME 4.2. - Si $W = W_H^{\alpha,0}$ $(W \neq D)$ et si $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$, W vérifie la condition $W \cdot^{\circ} D = W$. Réciproquement, si W vérifie $W \cdot^{\circ} D = W$, quel que soit $\alpha \geqslant 1$, il existe un complexe H tel que $W_H^{\alpha,0} = W$ et $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$.

(On a un énoncé analogue pour $W = W_H^{0,\beta}$ et $W \cap H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$ et pour $W = W_H^{\alpha,\beta}$ et $W^{\alpha,\beta} \cap H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$.)

Soit $W = W_H^{\alpha,0}$ et $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que W vérifie la condition $(L_{\alpha,0})$ équivalente d'après la propriété 6.2 à la condition $(L_{1,0})$. Soit $x \in D$ tel que $D^{\alpha} x \subseteq W$. Si $x \notin W$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W$ ce qui contredit l'hypothèse, par conséquent $x \in W$, et W vérifie la condition $(L_{\alpha,0})$ donc la condition $(L_{1,0})$: $W \cdot^{\circ} D = W$.

Soit W un idéal à gauche vérifiant la condition $(L_{1,0})$, W vérifie donc n'importe quelle condition $(L_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

$(L_{\alpha,0})$: $W \cdot^{\circ} D^{\alpha} = W$. Remarquons que la condition $(L_{\alpha,0})$ entraîne la condition $(F_{\alpha,0})$.

D'après le théorème 3.2, il existe donc des complexes H admettant W comme résidu par rapport à l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ (par exemple les complexes $D - D^{\alpha} W$ et $D^{\alpha+1} - D^{\alpha} W$). D'autre part, soit $x \in D - W$, il existe $a \in D$ tel que $ax \notin W$.

Posons $H = \{ax\ ,\ a \in D^{\alpha}\ ,\ ax \notin W\}$.

On a $H \cap W = \emptyset$ et $H \subseteq D^{\alpha+1}$, donc $H \cap W \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que $W_H^{\alpha,0} = W$.

Soit $x \in D - W$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H$, par définition de H. Soit $x \in D - W_H^{\alpha,0}$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H$, alors $ax \notin W$, puisque $H \cap W = \emptyset$, donc $W_H^{\alpha,0} = W$. Remarquons que dans ce cas particulier on a aussi $W_H^{1,0} = W = W_H^{\alpha,0}$ pour tout $\alpha \geqslant 1$, d'après le théorème 2.2.

Désignons par $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, l'ensemble des complexes H de D admettant un idéal à gauche W fermé à gauche par rapport à D donné comme résidu par rapport à $\rho_H^{\alpha,0}$ et tels que pour tout $H \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$, $H \cap W \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ ordonné par l'inclusion est stable pour la réunion. En effet soit $H^* = \bigcup_{i \in I} H_i$, $H_i \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$. On sait que $K \subseteq H$ entraîne $W_H^{1,0} \subseteq W_K^{1,0}$ [2], et par suite $W_H^{\alpha,0} \subseteq W_K^{\alpha,0}$ d'après la propriété 2.1.

On a donc $W_{H^*}^{\alpha,0} \subseteq W$. D'autre part soit $x \in D - W_{H^*}^{\alpha,0}$, il existe $a \in D^{\alpha}$ tel que $ax \in H^*$, donc il existe $i \in I$ tel que $ax \in H_i$. Puisque $W_{H_i}^{\alpha,0} = W$ il en résulte que $x \in D - W$.

Par suite on a $W = W^{\alpha,0}_{H^*}$. $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ n'est pas en général stable pour l'intersection (voir contre-exemple dans [3]).

On définit et on étudie de façon analogue les ensembles $\mathcal{E}_{0,\beta}$ et $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$.

PROPRIÉTÉ 7.2. - Soit H un complexe tel que son résidu $W^{\alpha,0}_H$ (resp. $W^{0,\beta}_H$, $W^{\alpha,\beta}_H$) soit contenu dans un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W. Si $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ (resp. $W \cap H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $W \cap H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$), on a $W^{\alpha,0}_H = W$ (resp. $W^{0,\beta}_H = W$, $W^{\alpha,\beta}_H = W$).

Soit $W^{\alpha,0}_H \subseteq W$, $W \cap H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$. Montrons que $W \subseteq W^{\alpha,0}_H$; soit $x \notin W^{\alpha,0}_H$, il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W$ et par suite $x \notin W$. On a donc $D - W^{\alpha,0}_H \subseteq D - W$, c'est-à-dire $W \subseteq W^{\alpha,0}_H$.

Puisque $K \subseteq H$ entraîne $W^{\alpha,0}_H \subseteq W^{\alpha,0}_K$ (resp. $W^{0,\beta}_H \subseteq W^{0,\beta}_K$, $W^{\alpha,\beta}_H \subseteq W^{\alpha,\beta}_K$), on déduit de la propriété 7.2, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2. - Si l'on a $K \subseteq H$ et si $H \cap W^{\alpha,0}_K \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ (resp. $H \cap W^{0,\beta}_K \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $H \cap W^{\alpha,\beta}_K \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$), on a $W^{\alpha,0}_H = W^{\alpha,0}_K$ (resp. $W^{0,\beta}_H = W^{0,\beta}_K$, $W^{\alpha,\beta}_H = W^{\alpha,\beta}_K$).

<u>Remarque</u>. - Si $H \cap W^{\alpha,0}_H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ et si $W^{\alpha,0}_H \cap H = H$, on a $W^{\alpha,0}_H = D$. En effet on a $H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$, donc, quel que soit $x \in D$, $D^\alpha x \cap H = \emptyset$, $x \in W^{\alpha,0}_H$.

De même si $H \cap W_H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$ (resp. $H \cap W_H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$) et si $W^{0,\beta}_H \cap H = H$ (resp. $W^{\alpha,\beta}_H \cap H = H$) on a $W^{0,\beta}_H = D$ (resp. $W^{\alpha,\beta}_H = D$).

PROPRIÉTÉ 8.2. - Si $H \cap W^{\alpha,0}_H \cap D^{\alpha+1} = \emptyset$ $(W^{\alpha,0}_H \neq D)$ (resp. $H \cap W^{0,\beta}_H \cap D^{\beta+1} = \emptyset$, $H \cap W^{\alpha,\beta}_H \cap D^{\alpha+\beta+1} = \emptyset$) on a

$$W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W^{\alpha,0}_H)} = W^{\alpha,0}_H$$

(resp. $W^{0,\beta}_{H-(H\cap W^{0,\beta}_H)} = W^{0,\beta}_H$, $W^{\alpha,\beta}_{H-(H\cap W^{\alpha,\beta}_H)} = W^{\alpha,\beta}_H$).

Il suffit de démontrer l'inclusion $D - W^{\alpha,0}_H \subseteq D - W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W^{\alpha,0}_H)}$. Soit $x \notin W^{\alpha,0}_H$, il existe $a \in D^\alpha$ tel que $ax \in H$, $ax \in H \cap D^{\alpha+1}$, donc $ax \notin W^{\alpha,0}_H$, par suite $ax \in H - (H \cap W^{\alpha,0}_H)$ et $x \notin W^{\alpha,0}_{H-(H\cap W^{\alpha,0}_H)}$.

COROLLAIRE 2.2. - Si W $(W \neq D)$ est un idéal à gauche fermé à gauche par rapport à D^{α}, et si H est un complexe minimal de l'ensemble $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, H est disjoint de W.

(On a un énoncé analogue pour les deux cas semblables.)

Conclusion. - Si W $(W \neq D)$ est un idéal fermé à gauche par rapport à D^{α} et si H est un complexe minimal de $\mathcal{E}_{\alpha,0}$, H est un complexe W-minimal à gauche [3]. En effet, d'après le théorème 2.2 si $H \cap W_H^{\alpha,0} = \emptyset$, on a $H \cap W_H^{1,0} = \emptyset$ et $W_H^{1,0} = W_H^{\alpha,0}$ quel que soit $\alpha \geqslant 1$.

(Conclusion analogue pour les cas semblables.)

Remarque. - Dans le cas particulier où $W = D$, on a $H \cap W = H$ et la propriété 8.2 ainsi que le corollaire 2.2 ne sont plus valables ; un complexe minimal de $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ n'est pas nécessairement D-minimal à gauche comme le montre l'exemple suivant :

Soit D le demi-groupe défini par la table :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

Posons $H = \{b\}$.

On a

$$W_H^{1,0} = \{a , b\}$$

$$W_H^{2,0} = \{a , b , c , d\} = D$$

H est un complexe minimal admettant D comme résidu par rapport à l'équivalence $\rho_H^{2,0}$, mais $W_H^{1,0} \neq D$.

3. Complexes

DÉFINITION 1.3. - Un complexe H d'un demi-groupe D est dit $\rho^{\alpha,0}$-fort si

$$(H \circ x) \cap D^{\alpha} \cap (H \circ x') \neq \emptyset \implies (H \circ x) \cap D^{\alpha} = (H \circ x') \cap D^{\alpha} .$$

On définit de façon analogue un complexe $\rho^{0,\beta}$-fort ou un complexe $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta \neq 0)$.

Etant donné un demi-groupe D, on désignera par $\mathcal{H}_{\alpha,0}$ (resp. $\mathcal{H}_{0,\beta}$, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$) l'ensemble des complexes $\rho^{\alpha,0}$-forts (resp. $\rho^{0,\beta}$-forts, $\rho^{\alpha,\beta}$-forts) de D.

PROPRIÉTÉ 1.3. - L'ensemble $\mathcal{H}_{\alpha,0}$ est une famille de Moore. Il en est de même de $\mathcal{H}_{0,\beta}$ et $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$.

a. $D \in \mathcal{H}_{\alpha,0}$.

b. Si H et H' appartiennent à $\mathcal{H}_{\alpha,0}$, il en est de même de $H_1 = H \cap H'$, si $H_1 \neq \emptyset$.

En effet, supposons $(H_1 \cdot x) \cap D^\alpha \cap H_1 \cdot x' \neq \emptyset$.

Il existe $a \in D^\alpha$ tel que

$$ax \in H_1 = H \cap H'$$

$$ax' \in H_1 = H \cap H' .$$

Soit $b \in (H_1 \cdot x) \cap D^\alpha$, on a $bx \in H_1 = H \cap H'$.

Or H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort,

$$\left.\begin{array}{ll} ax \in H & \\ ax' \in H & a\ ,\ b \in D^\alpha \\ ax \in H & \end{array}\right\} \Longrightarrow bx' \in H .$$

H' étant aussi $\rho^{\alpha,0}$-fort, on a de même $bx' \in H'$.

Par suite :

$$\left.\begin{array}{ll} ax \in H_1 & \\ ax' \in H_1 & a\ ,\ b \in D^\alpha \\ bx' \in H_1 & \end{array}\right\} bx' \in H_1 .$$

H_1 est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

PROPRIÉTÉ 2.3. - $H \in \mathcal{H}_{\alpha,0} \Longrightarrow H \in \mathcal{H}_{\alpha+1,0}$. De même

$$H \in \mathcal{H}_{0,\beta} \Longrightarrow H \in \mathcal{H}_{0,\beta+1} \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} H \in \mathcal{H}_{\alpha+1,\beta} \\ H \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta+1} \end{array}\right.$$

Soit $H \in \mathcal{H}_{\alpha,0}$, et supposons $Q_x^{\alpha+1,0} \cap Q_{x'}^{\alpha+1,0} \neq \emptyset$.

Cette condition entraîne $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$, et par suite $x \equiv x' \ (\rho_H^{\alpha,0})$ puisque H est $\rho^{\alpha,0}$-fort. D'après le théorème 2.1, on a alors $x \equiv x' \ (\rho_H^{\alpha+1,0})$. En particulier si H est fort, H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et $\rho^{0,\beta}$-fort, quels que soient $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas.)

THÉORÈME 1.3. - Les deux conditions suivantes,

1. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

2. Il existe une bijection φ de $(D/\rho_H^{\alpha,0} - W_H^{\alpha,0})$ sur $[D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)]$ telle que

$$\varphi(X) = A = Q_x^{\alpha,0}\ ,\quad x \in X\ ,\qquad \text{et}\quad \varphi^{-1}(A) = X = Q_a^{0,1}\ ,\quad a \in A\ .$$

1° (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ différente de $W_H^{\alpha,0}$. $\forall\ x\ ,\ x' \in X$, on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$.

Soit $a \in Q_x^{\alpha,0}$, $ax \in H$ et $a \in D^\alpha$.

D'où $x \in H \cdot^{\bullet} a$ et par suite $X \subseteq H \cdot^{\bullet} a$, $\forall\ a \in Q_x^{\alpha,0}$.

Soit $y \in H \cdot^{\bullet} a$, on a $ay \in H$ avec $a \in Q_x^{\alpha,0} \subseteq D^\alpha$.

Par suite $a \in Q_y^{\alpha,0}$. On a donc $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_y^{\alpha,0} \neq \emptyset$; H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort, on en déduit $y \equiv x\ (\rho_H^{\alpha,0})$ et $y \in X$.

D'où

$$\underline{X = H \cdot^{\bullet} a}\ ,\quad \forall\ a \in Q_x^{\alpha,0} \subseteq D^\alpha\ .$$

$$\underline{X = Q_a^{0,1}}\ ,\quad a \in D^\alpha\ .$$

D'après ce qui précède $\forall\ a\ ,\ b \in Q_x^{\alpha,0}$, on a

$$H \cdot^{\bullet} a = H \cdot^{\bullet} b$$

c'est-à-dire $a \equiv b\ (\rho_H^{0,1})$. Soit $c \in D^\alpha$ tel que $c \equiv a\ (\rho_H^{0,1})$. $\forall\ x \in Q_c^{0,1} = X$, on a $cx \in H$, $c \in D^\alpha$, donc $c \in Q_x^{\alpha,0}$.

Par suite si A désigne la classe modulo la trace de $\rho_H^{0,1}$ sur D^α et contenant a, on a :

$$\underline{A = Q_x^{\alpha,0}}\qquad \forall\ x \in X\ \text{ et }\ A \neq (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)\ .$$

Donc à toute classe $X \in (D/\rho_H^{\alpha,0} - W_H^{\alpha,0})$ correspond une classe $\varphi(X) = A$ de $[D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)]$ de telle façon que :

$$\varphi(X) = A = Q_x^{\alpha,0}\ ,\quad x \in X\ .$$

Réciproquement, à une classe A correspond une classe X. Soit $A \in D^\alpha/\rho_H^{0,1} - (W_H^{0,1} \cap D^\alpha)$. Soit $x \in Q_a^{0,1}$, $a \in A$. On a

$$ax \in H\ \text{ avec }\ a \in D^\alpha\ .$$

D'où $a \in Q_x^{\alpha,0}$. Et d'après ce qui précède $Q_x^{\alpha,0} = A$ et $X = Q_a^{0,1}$. L'application φ est donc injective et l'application inverse est

$$\varphi^{-1}(A) = X = Q_a^{0,1} , \qquad a \in A .$$

2° (2) $\Longrightarrow$ (1). Par hypothèse $Q_x^{\alpha,0}$ est une classe d'équivalence, donc $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset \Longrightarrow Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$, H est $\rho^{\alpha,0}$-fort.

On démontre de même la propriété symétrique relative aux complexes $\rho^{0,\beta}$-forts.

<u>Remarque</u>. - Les conditions " H est $\rho^{\alpha,0}$-fort" et " H est $\rho^{0,\alpha}$-fort" ne sont pas équivalentes si $\alpha > 1$, comme le montre l'exemple suivant.

	a	b	c	d
a	a	b	c	a
b	a	b	c	a
c	a	b	c	b
d	a	b	c	a

$D = \{a , b , c , d\}$, $D^2 = \{a , b , c\} = D^\alpha$, $\forall \ \alpha > 1$

Posons $H = \{a\}$.

On vérifie que H n'est ni fort, ni $\rho^{2,0}$-fort, mais H est $\rho^{0,2}$-fort.

THÉORÈME 2.3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes,

1. H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha > 0 , \ \beta > 0)$.

2. Il existe une bijection φ de

$$(D/\rho_H^{\alpha,\beta} - W_H^{\alpha,\beta}) \quad \text{sur} \quad [(D^\alpha \times D^\beta)/\mathcal{E}_H - (D^\alpha \times D^\beta) \cap W_H]$$

telle que

$$\varphi(X) = A = (H \,..\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) , \quad x \in X$$

$$\text{et} \quad \varphi^{-1}(A) = X = (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b , \quad (a , b) \in A$$

($\mathcal{E}_H$ est l'équivalence définie par R. DESQ dans sa conférence du 12 février 1962.)

1° (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ différente de $W_H^{\alpha,\beta}$. $\forall \ x , x' \in X$, on a $Q_x^{\alpha,\beta} = Q_{x'}^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$.

Soit $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$; $axb \in H$, $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$.

Donc $x \in (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$ et $X \subseteq (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$, $\forall \ (a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ $(x \in X)$.

Soit $y \in (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b$. On a $ayb \in H$, $(a , b) \in D^\alpha \times D^\beta$.

Donc

$$(a , b) \in Q_y^{\alpha,\beta} \quad \text{et} \quad Q_y^{\alpha,\beta} \cap Q_x^{\alpha,\beta} \neq \emptyset .$$

H étant $\rho^{\alpha,\beta}$-fort, on en déduit $Q_y^{\alpha,\beta} = Q_x^{\alpha,\beta}$, et $y \in X$.

D'où $\underline{X = (H \,.^{\bullet}\, a) \,^{\bullet}.\, b}$, $\forall \ (a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$, $x \in X$.

Soit A la classe modulo la trace de $\mathcal{L}_H$ sur $D^\alpha \times D^\beta$ contenant (a , b). D'après ce qui précède on a :

$$Q_x^{\alpha,\beta} \subseteq A .$$

Soit $(c , d) \in A$, $(H \cdot\!\!\cdot\, c) \cdot\!\!\cdot\, d = (H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, b = X$.

Soit $x \in X$, $cxd \in H$, $(c , d) \in D^\alpha \times D^\beta$, donc $(c , d) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ et

$$\underline{A = Q_x^{\alpha,\beta}} = (H \cdot\cdot\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) .$$

On a évidemment $A \neq (D^\alpha \times D^\beta) - W_H$.

Réciproquement, soit A une classe appartenant à $[(D^\alpha \times D^\beta)/\mathcal{L}_H - ((D^\alpha \times D^\beta) - W_H)]$ Soit $(a , b) \in A$ et soit $x \in (H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, b$. On a

$$axb \in H , \qquad (a , b) \in D^\alpha \times D^\beta .$$

Donc $(a , b) \in Q_x^{\alpha,\beta}$ et, d'après l'étude précédente, on a $Q_x^{\alpha,\beta} = A$ et $X = (H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, b$, X désignant la classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ contenant x . Puisque $Q_x^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$, on a $X \neq W_H^{\alpha,\beta}$.

Posons

$$\varphi(X) = A = (H \cdot\cdot\, x) \cap (D^\alpha \times D^\beta) , \qquad x \in X .$$

D'après ce qui précède φ est une bijection et

$$\varphi^{-1}(A) = X = (H \cdot\!\!\cdot\, a) \cdot\!\!\cdot\, b , \qquad (a , b) \in A .$$

2° (2) $\Longrightarrow$ (1). Par hypothèse $Q_x^{\alpha,\beta}$ est une classe d'équivalence, par suite

$$Q_x^{\alpha,\beta} \cap Q_{x'}^{\alpha,\beta} \neq \emptyset \Longrightarrow Q_x^{\alpha,\beta} = Q_{x'}^{\alpha,\beta} ,$$

H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort.

PROPRIÉTÉ 3.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, les équivalences $\rho_H^{\alpha,0}$ et $\rho_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort, les équivalences $\rho_H^{0,\beta}$ et $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\mu \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{0,\beta+\mu}$.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta > 0)$ les équivalences $\rho_H^{0,\beta}$ et $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geq 0)$ coïncident dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$.

Supposons que H est $\rho^{\alpha,0}$-fort. D'après le théorème 2.1, on sait que

$$\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_H^{\alpha+\lambda,0} \qquad \forall \ \lambda \geq 0 .$$

Montrons que

$$\left.\begin{array}{l}(x \equiv x') \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda}) \\ \\ x \notin W_H^{\alpha+\lambda,0}\end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0}) .$$

Par hypothèse $Q_x^{\alpha+\lambda,0} = Q_{x'}^{\alpha+\lambda,0}$. D'où

$$Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset .$$

Mais H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort, on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$ et $x \equiv x'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$.

(Démonstration analogue pour les autres cas.)

THÉORÈME 3.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et net à gauche, la chaîne C_H est finie, son élément maximum étant $\rho_H^{\alpha,0}$.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort et net à droite, la chaîne C'_H est finie, son élémant maximum étant $\rho_H^{0,\beta}$.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et bilatèrement net, toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geqslant 0)$ coïncident avec $\rho_H^{\alpha,\beta}$.

Ce théorème est une conséquence directe de la propriété 3.3.

Cas particuliers :

1. H est fort et net à gauche, on a $\rho_H^{\alpha,0} = {}_HR$, $\forall$ $\alpha \geqslant 1$.

2. H est fort et net à droite, on a $\rho_H^{0,\beta} = R_H$, $\forall$ $\beta \geqslant 1$.

3. H est bilatèrement fort et bilatèrement net, on a $\rho_H^{\alpha,\beta} = R'_H$ pour tout $\alpha \geqslant 1$ et tout $\beta \geqslant 1$.

PROPRIÉTÉ 4.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geqslant 0)$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort, toute équivalence $\rho_H^{0,\beta+\mu}$ $(\mu \geqslant 0)$ est simplifiable à droite dans $D - W_H^{0,\beta+\mu}$.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort $(\alpha , \beta > 0)$ toute équivalence $\rho_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$ $(\lambda , \mu \geqslant 0)$ est simplifiable dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,\beta+\mu}$.

Supposons que H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et montrons que

$$\left.\begin{array}{l} ax \equiv ax' \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda,0}) \\ ax \notin W_H^{\alpha+\lambda,0} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha+\lambda,0}) \ .$$

L'hypothèse entraîne qu'il existe $y \in D^{\alpha+\lambda}$ tel que $yax \in H$ et $yax' \in H$, $ya \in D^{\alpha+\lambda+1} \subseteq D^{\alpha}$.

Par suite $Q_x^{\alpha,0} \cap Q_{x'}^{\alpha,0} \neq \emptyset$. H étant $\rho^{\alpha,0}$-fort on a $Q_x^{\alpha,0} = Q_{x'}^{\alpha,0}$ et $x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0})$.

On sait d'après la propriété 3.3 que $\rho_H^{\alpha+\lambda,0} = \rho_H^{\alpha,0}$ dans $D - W_H^{\alpha+\lambda,0}$ $(\lambda \geqslant 0)$.

(Démonstration analogue dans les autres cas.)

THÉORÈME 4.3.

- Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et net à gauche, l'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ est simplifiable à gauche dans D.

- Si H est $\rho^{0,\beta}$-fort et net à droite, l'équivalence $\rho_H^{0,\beta}$ est simplifiable à droite dans D.

- Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et bilatèrement net, l'équivalence $\rho_H^{\alpha,\beta}$ est simplifiable dans D.

Ce théorème est une conséquence de la propriété 4.3.

THÉORÈME 5. 3. - Si H est symétrique-fort, les équivalences $\rho_H^{p,n-p}$ (n fixe et $0 \leqslant p \leqslant n$) coïncident. En posant $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$, on a

$$\rho_H^1 \subseteq \rho_H^2 \subseteq \dots \subseteq \rho_H^n \subseteq \dots$$

De plus les équivalences ρ_H^1 et ρ_H^n coïncident dans $D - W_H^n$. H étant symétrique on a

$$W_H^{1,0} = W_H^{0,1} \quad \text{et} \quad \rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1} \ .$$

1. D'après le théorème 1.2, si H est équirésiduel on a pour n fixe, $W_H^n = W_H^{p,n-p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$, d'où la chaîne :

$$W_H^1 \subseteq W_H^2 \subseteq \dots \subseteq W_H^n \subseteq \dots$$

2. Montrons que la condition $\rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$ entraîne $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^{q,n-q}$, $\forall$ p et q tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant q \leqslant n$, n fixe.

a. Montrons que $\rho_H^{n,0} = \rho_H^{0,n}$.

Soit $x \in D - W_H^n$ et supposons $x \equiv x' \quad (\rho_H^{n,0})$. On a

$$Q_x^{n,0} = Q_{x'}^{n,0} \neq \emptyset \ .$$

Par suite

$$Q_x^{1,0} \cap Q_{x'}^{1,0} \neq \emptyset \ .$$

H étant fort, on a $x \equiv x' \quad (\rho_H^{1,0})$.

Or $\rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$ d'où $x \equiv x' \quad (\rho_H^{0,1})$, et $Q_x^{0,1} = Q_{x'}^{0,1} \neq \emptyset$.

On en déduit $Q_x^{0,n} = Q_{x'}^{0,n} \neq \emptyset$ puisque $x \notin W_H^n$. D'où $\rho_H^{n,0} = \rho_H^{0,n}$; désignons par ρ_H^n cette équivalence.

b. Montrons que $\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n$ pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Soit $x \notin W_H^n$ et $x' \equiv x \quad (\rho_H^{p,n-p})$.

$\exists \ (a \ , \ b) \in (D^p \times D^{n-p})$ tel que $axb \in H$, $ax'b \in H$. D'où

$$Q_{ax}^{0,1} \cap Q_{ax'}^{0,1} \neq \emptyset \ .$$

H étant fort on a $ax \equiv ax' \quad (\rho_H^1)$ en posant $\rho_H^1 = \rho_H^{1,0} = \rho_H^{0,1}$. $x \notin W_H^n \Rightarrow x \notin W_H^1$, et l'équivalence ρ_H^1 étant simplifiable dans $D - W_H^1$, on a

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^1)$$

d'où

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^n) \ .$$

Par suite

$$\underline{\rho_H^{p,n-p} = \rho_H^n}$$

pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$ et ρ_H^n coïncide avec ρ_H^1 dans $D - W_H^n$.

THÉORÈME 6.3.

1° Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$ différente de $W_H^{\alpha,0}$.

a. On a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$ et $W_H^{\alpha+\alpha',0} \subseteq W_X^{\alpha',0}$ quel que soit $\alpha' \geqslant 1$.

b. Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, X est fort et dans $D - W_X^{1,0}$ on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0}$.

c. Si H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et si de plus on a $H \subseteq X$, alors

$$W_H^{\alpha',0} = W_X^{\alpha',0} = W_X^{1,0} \quad \text{et} \quad \rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0} = \rho_X^{\alpha',0}$$

quel que soit $\alpha' \geqslant 1$.

2° On a un énoncé analogue en considérant une classe X modulo $\rho_H^{0,\beta}$, distincte de $W_H^{0,\beta}$.

3° Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ distincte de $W_H^{\alpha,\beta}$.

a. On a $\rho_H^{\alpha,\beta} \subseteq \rho_X^{1,1}$ et $W_H^{\alpha+\alpha',\beta+\beta'} \subseteq W_X^{\alpha',\beta'}$ quels que soient α', $\beta' \geqslant 0$ (non simultanément nuls).

b. Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort, X est bilatèrement fort et dans $D - W_X^{1,1}$ on a $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_X^{1,1}$.

c. Si H est $\rho^{\alpha,\beta}$-fort et si de plus $H \subseteq X$, alors $W_H^{\alpha',\beta'} = W_X^{\alpha',\beta'} = W_X^{1,1}$ et $\rho_H^{\alpha,\beta} = \rho_X^{1,1} = \rho_X^{\alpha',\beta'}$ quels que soient α', $\beta' \geqslant 1$.

Soit X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$, $X \neq W_H^{\alpha,0}$;

a. $\rho_H^{\alpha,0}$ étant une équivalence régulière à gauche et X une classe modulo $\rho_H^{\alpha,0}$, on a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$ ([2], théorème 20).

D'autre part, soit $x \notin W_X^{\alpha',0}$ $(\alpha' \geqslant 1)$, il existe $a \in D^{\alpha'}$ tel que $ax \in X$ et par suite il existe $b \in D^{\alpha}$ tel que $bax \in H$, donc $x \notin W_H^{\alpha+\alpha',0}$ et l'on a

$$W_H^{\alpha+\alpha',0} \subseteq W_X^{\alpha',0}, \quad \alpha' \geqslant 1 .$$

En particulier $W_H^{\alpha+1,0} \subseteq W_X^{1,0}$.

b. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort, montrons que X est fort.

Supposons $(X \cdot x) \cap (X \cdot x') \neq \emptyset$. Il existe $a \in D$ tel que $ax \in X$ et $ax' \in X$, donc $ax \equiv ax'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$.

Puisque l'on a $X \neq W_H^{\alpha,0}$ et que $\rho_H^{\alpha,0}$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{\alpha,0}$ d'après la propriété 4.3, on a $x \equiv x'$ $(\rho_H^{\alpha,0})$.

Soit $b \in X \cdot x$, $bx \in X$. L'équivalence $\rho_H^{\alpha,0}$ étant régulière à gauche on a $bx' \equiv bx$ $(\rho_H^{\alpha,0})$ c'est-à-dire $bx' \in X$. Et par suite $X \cdot x = X \cdot x'$, X est fort.

Montrons que dans $D - W_X^{1,0}$ on a $\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0}$.

Soit $x \notin W_X^{1,0}$ et soit $x' \equiv x$ $(\rho_X^{1,0})$. On a

$$X \cdot x = X \cdot x' \neq \emptyset .$$

On en déduit comme plus haut que l'on a

$$x \equiv x' \quad (\rho_H^{\alpha,0}) .$$

D'où $\rho_X^{1,0} \subseteq \rho_H^{\alpha,0}$ et par suite $\rho_X^{1,0} = \rho_H^{\alpha,0}$ puisque d'après (a) on a $\rho_H^{\alpha,0} \subseteq \rho_X^{1,0}$.

c. H est $\rho^{\alpha,0}$-fort et de plus $H \subseteq X$.

$$H \subseteq X \implies W_X^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \implies W_X^{\alpha',0} \subseteq W_H^{\alpha',0} \quad \text{quel que soit} \quad \alpha' \geqslant 1 .$$

Par suite en tenant compte de (a) on a :

$$W_H^{\alpha',0} = W_X^{\alpha',0} = W_X^{1,0} \quad \text{pour tout} \quad \alpha' \geqslant 1 \ ;$$

et en tenant compte de (b),

$$\rho_H^{\alpha,0} = \rho_X^{1,0} = \rho_X^{\alpha',0} \quad \text{pour tout} \quad \alpha' \geqslant 1 .$$

(La démonstration est analogue pour les cas 2° et 3° du théorème énoncé.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROISOT (R.). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 70, 1953, p. 361-379.

[2] DUBREIL (P.). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Institut de France, Mémoires, t. 63, 52 p.).

[3] LEFEBVRE (P.). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Mat. pura ed appl., 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).