Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marie-Paule Brameret

Treillis d'idéaux et structure d'anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1962-1963), exp. nº 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 1

5 novembre 1962

TREILLIS D'IDÉAUX ET STRUCTURE D'ANNEAUX

par Mlle Marie-Paule BRAMERET

L'objet de cet exposé est de donner une caractérisation de certains anneaux, dont le treillis des idéaux est totalement ordonné. Nous dirons qu'un anneau de ce type satisfait la condition C, ou encore, est un C-anneau.

La condition C est préservée par homomorphisme.

Tout sous-groupe complètement invariant du groupe additif A_+ d'un anneau A étant un idéal de l'anneau, la première partie de cet exposé consistera en l'étude de certains groupes abéliens dont le treillis des sous-groupes complètement invariants est totalement ordonné. Ces groupes seront appelés C-groupes. Nous adopterons la terminologie et les notations de [3].

1. - Chacune des composantes primaires du sous-groupe de torsion maximal T d'un groupe G est un sous-groupe complètement invariant de G.

Donc :

REMARQUE 1. - S'il n'est pas nul, le sous-groupe de torsion maximal d'un C-groupe est un groupe primaire.

Soient p et q deux nombres premiers distincts ; de la comparaison des sous-groupes complètement invariants pG et qG résulte :

REMARQUE 2. - Il existe au plus un nombre premier par lequel un C-groupe donné n'est pas divisible.

LEMME 1. - S'il n'est pas nul, le sous-groupe divisible maximal B d'un C-groupe G contient le sous-groupe de torsion maximal T de G.

Les sous-groupes B et T, étant complètement invariants, sont comparables. Si l'on a l'inclusion :

$$B \subseteq T ,$$

B est un sous-groupe divisible de T et, par suite, T admet une décomposition en somme directe dont B est un des termes :

$$T = B \oplus T' .$$

D'après la remarque 1, T est un p-groupe, et le nombre premier p divise B.

Le sous-groupe complètement invariant

$$T[p] = \{x \; ; \; x \in T \; ; \; px = 0\}$$

est donc contenu dans B. Et, par suite,

$$T'[p] \subseteq B \, .$$

On a alors $T' \cap T'[p] = 0$. Par conséquent, T' est nul et $T = B$.

On a alors :

THÉORÈME 1. - Soit G un groupe périodique non réduit. Le treillis des sous-groupes complètement invariants de G est totalement ordonné si et seulement si G est un p-groupe divisible, c'est-à-dire si et seulement si :

$$(1) \qquad G = \sum_{m} \underset{\sim}{C}(p^{\infty}) \, ,$$

où m est un nombre cardinal quelconque et où $\underset{\sim}{C}(p^{\infty})$ désigne le groupe quasi-cyclique relatif au nombre premier p.

Les sous-groupes complètement invariants d'un groupe de ce type sont : G et les sous-groupes $G[p^k]$, k entier positif.

COROLLAIRE. - Si G est le groupe additif d'un C-anneau A et si G est un groupe périodique non réduit, alors $G = \underset{\sim}{C}(p^{\infty})$.

En effet, chacun des groupes quasi-cycliques qui apparaît dans la décomposition (1), appartient à l'annulateur de A [cf. [3] lemme 72.3]. Il n'en existe donc qu'un seul.

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe réduit possédant des éléments d'ordre fini (non nuls). Le treillis des sous-groupes complètement invariants de G est totalement ordonné si et seulement si G est un p-groupe borné de la forme :

$$(2) \qquad G = \sum_{m} \underset{\sim}{C}(p^{k}) + \sum_{n} \underset{\sim}{C}(p^{k-1}) \, ,$$

où m et n sont des nombres cardinaux arbitraires et où k est un entier > 1.

Soit G un C-groupe réduit dont le sous-groupe de torsion maximal T n'est pas nul. Soit p le seul nombre premier qui ne divise pas G. Alors T est un p-groupe, car si T était un q-groupe relatif à un nombre premier q distinct de p, T serait un sous-groupe divisible de G.

D'autre part, T, n'étant pas divisible, n'est pas contenu dans le sous-groupe complètement invariant $\bigcap_{k=1}^{\infty} p^k G$. Il existe donc un entier k pour lequel

$$p^k G \subseteq T \quad .$$

Par conséquent, tous les éléments de G sont d'ordre fini et G est un p-groupe. On a donc

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G[p^k] \quad ,$$

où $G[p^k] = \{x \ , \ x \in G \ , \ p^k x = 0\}$. Soit s un entier > 0. Si pour tout entier $h > 0$, l'on avait

$$G[p^h] \subset p^s G \ ,$$

alors $G = p^s G$ et p diviserait G.

Il existe donc un entier positif n pour lequel

$$p^s G \subseteq G[p^n] \quad ,$$

et par suite $p^{s+n} G = 0$; G est un p-groupe borné. Il existe alors une décomposition de G en somme directe :

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \quad \text{où} \quad G_i = \sum_{m_i} \underset{\sim}{C}(p^{k_i})$$

(m_i étant un nombre cardinal arbitraire et k_i un entier $\geqslant 1$) et où $k_1 > k_2 > \dots > k_n$.

Le sous-groupe G_n étant contenu dans le sous-groupe complètement invariant $G[p^{k_n}]$, l'inclusion

$$G[p^{k_n}] \subseteq pG$$

ne peut avoir lieu ; donc $p^{k_n+1} G = 0$.

On a, alors, $k_1 = k_n + 1$, $n = 2$ et $G = G_1 \oplus G_2$.

Soit G un p-groupe borné de la forme (2). Posons

$$G_1 = \sum_m \underset{\sim}{C}(p^k) \quad \text{et} \quad G_2 = \sum_n \underset{\sim}{C}(p^{k-1}) \ .$$

Si H est un sous-groupe complètement invariant de G, alors :

$$H = H_1 \oplus H_2 \quad ,$$

où $G_i \cap H = H_i$ est un sous-groupe complètement invariant de G_i.

Par conséquent :

$$H_i = p^{r_i} G_i \ , \quad 0 \leqslant r_i \leqslant k_i \quad .$$

On montre que $r_1 = r_2$ ou bien $r_1 = r_2 + 1$ en utilisant les décompositions de G_1 et G_2 en somme directe de groupes cycliques. Les sous-groupes complètement invariants de G sont par suite les sous-groupes $p^r G$ et $G[p^r]$ et ils sont deux à deux comparables.

Il en résulte que, si A est un C-anneau, dont le groupe additif A_+ est périodique, alors, A_+ est un p-groupe borné ou un groupe quasi-cyclique suivant qu'il est réduit ou non.

2. - Soit A un anneau ; nous noterons A^n l'idéal de A engendré par les produits de n éléments de A.

L'anneau A est <u>nilpotent</u> s'il existe un entier $h > 1$ pour lequel $A^h = 0$. <u>L'ordre de nilpotence</u> de A est le plus petit des entiers positifs h pour lesquels l'idéal A^h est nul.

Nous donnerons dans ce paragraphe une caractérisation des C-anneaux nilpotents. De tels anneaux existent : en effet, soit B un anneau de valuation discrète d'un corps (commutatif) K dont le corps résiduel est le corps premier de caractéristique p. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal maximal de B. Tout idéal de l'anneau $\mathfrak{a}$ est un idéal de B ; donc l'anneau $\mathfrak{a}$ vérifie la condition C, et, pour tout entier $n > 1$, $\dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^n}$ est un C-anneau nilpotent.

LEMME 2. - <u>Soit</u> A <u>un</u> C-<u>anneau. Pour tout couple d'éléments</u> x <u>et</u> $y \in A$, <u>on a</u>

$$xy - yx \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A^n .$$

Il suffit de montrer que si l'on a $xy - yx \in A^n$ pour tous les x et les $y \in A$, alors $xy - yx \in A^{n+1}$. Soient a et $b \in A$. Si, par exemple a appartient à l'idéal engendré par b, on a

$$a = nb + bx + x'b + \sum_{i=1}^{n} y_i \, by'_i ,$$

où n est un entier quelconque, et où x, x', y_i et y'_i sont des éléments de A.

$$ab - ba = b(xb - bx) + (x'b - bx')\, b + \sum_{i=1}^{n} (y_i \, by'_i \, b - by_i \, by'_i) .$$

Par hypothèse $xb - bx$ et $x'b - bx'$ appartiennent à A^n. Donc

$$b(xb - bx) + (x'b - bx')\, b \in A^{n+1} .$$

D'autre part,

$$y_i \, by'_i \, b - by_i \, by'_i = y_i \, b(y'_i \, b - by'_i) + (y_i \, b - by_i)\, by'_i \in A^{n+2} .$$

Donc

$$ab - ba \text{ appartient à l'idéal } A^{n+1} ,$$

COROLLAIRE 1. - Tout C-anneau nilpotent est commutatif.

COROLLAIRE 2. - Si un corps K possède un anneau de valuation A dont le corps résiduel est le corps premier de caractéristique p et si la valuation est discrète et de rang 1 , K est commutatif.

Soit $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de A ; $\mathfrak{M}$ est un C-anneau et $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n = 0$. Donc A est commutatif et, par suite, K est commutatif.

Nous dirons qu'un anneau A vérifie trivialement la condition C , si le treillis des sous-groupes de A_+ est totalement ordonné, c'est-à-dire si A_+ est un groupe cyclique d'ordre primaire ou un groupe quasi-cyclique.

REMARQUE 3. - Si A est un anneau zéro, c'est-à-dire si $A^2 = 0$, et si A vérifie (C) , alors A vérifie trivialement C .

REMARQUE 4. - Soit G un p-groupe abélien fini.; les groupes G et G[p] ont le même nombre de générateurs.

REMARQUE 5. - Soit G un p-groupe abélien. Soit H un sous-groupe de G cyclique d'ordre p . Si le groupe quotient G/H est cyclique, alors G possède au plus deux générateurs.

THÉORÈME 3. - Si un anneau nilpotent A , dont l'ordre de nilpotence est k , vérifie non trivialement la condition (C) on a :

1° $k > 2$,

2° pour $i = 1 , 2 , \dots , k - 1$, le groupe additif de l'anneau quotient A^i/A^{i+1} est un groupe cyclique d'ordre p , p étant un nombre premier indépendant de i .

Pour $i = 1 , 2 , \dots , k - 1$, l'anneau A^i/A^{i+1} est un anneau zéro. D'autre part, les sous-groupes de A^i_+ qui contiennent A^{i+1} sont des idéaux de A . Donc, l'anneau A^i/A^{i+1} vérifie trivialement la condition (C) .

Par suite :

$$\left(\frac{A^i}{A^{i+1}}\right)_+ = C(p_i^{\alpha_i}) \quad \text{ou bien} \quad C(p_i^{\infty}) ,$$

p_i étant un nombre premier et α_i un nombre positif.

Il en résulte que A_+ est un groupe périodique et, donc, un p-groupe. On a, alors, $p_i = p$ pour tout i . Par hypothèse, A_+ n'est pas quasi-cyclique. Donc A_+ est un p-groupe borné et l'on a :

$$(A^i/A^{i+1})_+ = \underset{\sim}{C}(p^{\alpha_i}) .$$

Par suite l'anneau A est fini.

Le groupe A_+ n'étant pas cyclique, on a : $k > 2$.

Le groupe A_+^{k-1} est cyclique. Puisque A_+ et $A_+[p]$ ont même nombre de générateurs, on a l'inclusion :

$$A^{k-1} \subset A[p] .$$

Par conséquent

$$\alpha_{k-1} = 1 .$$

S'il existe un entier ℓ , $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$, tel que A_+^ℓ soit cyclique, on a, nécessairement, $A^\ell \subset A[p]$. Donc $pA^\ell = 0$ et $A^\ell = A^{k-1}$, c'est-à-dire $\ell = k-1$.

Il en résulte que A^{k-1} est le seul, parmi les idéaux A^i , dont le groupe additif est cyclique.

En particulier, A_+^{k-2} n'est pas cyclique. D'après la remarque 5, il possède deux générateurs, a et b si, par exemple, b appartient à l'idéal $\{a\}$ de A engendré par a , alors :

$$b = ma + x ,$$

où m est un nombre entier et où $x \in A^{k-1}$.

Donc $pb = pma = 0$ et l'ordre (additif) de b est p .

On a donc :

$$pA^{k-2} = p(a) ,$$

où (a) représente le groupe cyclique engendré par a . Il en résulte que b n'appartient pas à pA^{k-2} et, donc, que :

$$pa \in \{b\} .$$

D'où

$$p^2 a = 0 \quad \text{et} \quad O[a] \leqslant p^2 .$$

Si l'ordre de a était égal à p^2 , on aurait :

$$pA^{k-2} = p(a) = A^{k-1} ,$$

et puisque $b = ma + x$ avec $x \in A^{k-1}$, on aurait $b \in (a)$, ce qui est impossible. Donc $O[a] = p$.

Par conséquent A_+^{k-2} est somme directe de deux groupes cycliques d'ordre p .

Si $k > 3$, le groupe additif de l'anneau $B = A/A^{k-1}$ n'est pas cyclique. Sinon $B_+^{k-3} = \dfrac{A^{k-3}}{A^{k-1}}$ serait cyclique, et, d'après la remarque 5, A^{k-3} possèderait deux générateurs, c et d .

Soient p^r et p^s les ordres respectifs de c et d. Si r était strictement supérieur à s, alors on aurait :

$$p^{r-1} A^{k-3} = p^{r-1}(c) = A^{k-1} .$$

Donc

$$A_+^{k-3}/p^{r-1} A_+^{k-3} \cong (d) \oplus (c)/p^{r-1}(c) ,$$

ce qui contredit le fait que A_+^{k-3}/A_+^{k-1} est cyclique.

Par suite $O[c] = O[d] = p^r$.

Si, par exemple, c appartient à l'idéal engendré par d, on a :

$$c = nd + y ,$$

où n est un nombre entier et où $y \in A^{k-2}$.

D'où

$$pc = pnd = 0 \quad \text{et} \quad r = 1 .$$

Par conséquent $A^{k-3} = A^{k-2}$ ce qui est impossible. Par suite, B_+ n'est pas cyclique.

Nous allons montrer que, pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, le groupe cyclique $\left(\dfrac{A^{i+1}}{A^i}\right)_+$ est d'ordre p.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que pour un entier j, $k \geqslant j > 1$, l'ordre du groupe cyclique $\left(\dfrac{A^{j-1}}{A^j}\right)_+$ soit supérieur à p. L'anneau $\dfrac{A}{A^j}$ est nilpotent ; il vérifie la condition C et est fini ; son ordre de nilpotence est $j-1$ et l'on a :

$$\left(\frac{A}{A^j}\right)^{j-1} = \frac{A^{j-1}}{A^j} .$$

Par conséquent $\left(\dfrac{A}{A^j}\right)_+$ est cyclique.

Soit A^h le plus petit des idéaux A^i, $i = 2, \ldots, k-1$, pour lequel le groupe $\left(\dfrac{A}{A^h}\right)_+$ est cyclique.

L'anneau $A' = \dfrac{A}{A^{h+1}}$ est fini, nilpotent, son ordre de nilpotence est $h+1$, son groupe additif n'est pas cyclique et le groupe additif de l'anneau A'/A'^h est cyclique. Il en résulte que $h + 1 = 3$ et $h = 2$. Donc, s'il existe un entier j pour lequel l'ordre du groupe cyclique $\left(\dfrac{A^{j-1}}{A^j}\right)_+$ est supérieur à p on a $j = 2$.

Mais, alors, considérons l'anneau $R = \dfrac{A}{A^3}$.

Le groupe R_+^2 est cyclique d'ordre p.

Donc R est somme directe de deux groupes cycliques d'ordre p et, par suite, $\left(\frac{A}{A^2}\right)_+$ est un groupe cyclique d'ordre p.

Par conséquent, pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, le groupe cyclique $\left(\frac{A^i}{A^{i+1}}\right)_+$ est d'ordre p.

THÉORÈME 5. - Soit A un anneau nilpotent dont l'ordre de nilpotence est k. Si, pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$, le groupe additif de l'anneau $\frac{A^i}{A^{i+1}}$ est cyclique d'ordre p, les seuls idéaux de A sont les A^i.

En effet, soit I un idéal non nul de l'anneau A. Il existe un entier i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, pour lequel :

$$I \subseteq A^i \quad \text{et} \quad I \nsubseteq A^{i+1}.$$

Par suite, A^i coïncide avec l'idéal $A^{i+1} + I$ engendré par A^{i+1} et I :

$$A^i = I + A^{i+1}.$$

Puisque $A^k = 0$, on a $A^{k-1} = IA^{k-i-1} \subseteq I$.

Supposons $A^s \subseteq I$ où $s > i+1$.

On a alors :

$$A^{s-1} = A^s + IA^{s-1-i} \subseteq I.$$

Par conséquent

$$A^{i+1} \subseteq I, \text{ d'où } A^i = I.$$

3. - Soit A un C-anneau unitaire commutatif. La racine de A, ensemble des éléments nilpotents, est un idéal premier N.

Considérons A comme plongé dans l'anneau des quotients A_N. L'anneau A_N vérifie la condition C, sa racine est N et N est l'unique idéal maximal de A_N.

D'après la première partie, la caractéristique de A est soit 0, soit p^k où p est un nombre premier et k un entier $\geqslant 1$. L'anneau A_N a même caractéristique que A.

Définition. - On appelle anneau complètement primaire tout anneau commutatif dont la racine est le seul idéal maximal.

Il a été démontré (cf. [1]) par S. J. BRYANT et J. L. ZEMMER, le théorème suivant :

THÉORÈME A. - Soit B un anneau complètement primaire de caractéristique 0 et soit N la racine de B. Alors B contient un corps F, isomorphe au corps résiduel B/N tel que tout élément $a \in B$ peut se mettre, d'une manière unique, sous la forme : $a = f + n$ où $f \in F$ et $n \in N$ (c'est-à-dire que B_+ est la somme directe des groupes F_+ et N_+).

Supposons que la caractéristique de l'anneau A soit nulle. En appliquant le théorème précédent ; on a

$$(A_N)_+ = N_+ \oplus F_+ ,$$

où F est un sous-corps de A_N, isomorphe à $\frac{A_N}{N}$.

Par conséquent, N est une F-algèbre, dont le treillis des idéaux est totalement ordonné.

D'autre part, puisque $N \subset A$, on a

$$A_+ = (N_+ \oplus F_+) \cap A = N_+ \oplus F_+ \cap A_+ .$$

LEMME 3. - L'anneau $F \cap A$ est un anneau de valuation du corps F.

En effet, soient x et $y \in F \cap A$. On a, par exemple : $x = uy$ où $u \in A$. Donc $u \in A_N$ et $u = n + f$, avec $n \in N$ et $f \in F$. Par suite $x = ny + fy$.

Puisque x et $fy \in F$, l'élément ny appartient à F et à N. Donc $ny = 0$ et $n = 0$.

D'où $u \in F \cap A$.

On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Soit A un C-anneau unitaire commutatif de caractéristique 0. Soit N la racine de A. Alors A contient un anneau de valuation V d'un corps F ; V est isomorphe à A/N ; N est une F-algèbre dont le treillis des idéaux est totalement ordonné et $A_+ = N_+ \oplus V_+$.

THÉORÈME 7. - Soit A un anneau unitaire commutatif. Soit N la racine de A. Soit A_+ admet la décomposition en somme directe :

(3) $$A_+ = N_+ \oplus V_+ ,$$

dans laquelle V est un sous-anneau de A et est un anneau de valuation d'un corps F, et si N est une F-algèbre dont le treillis des idéaux est totalement ordonné, alors A est un C-anneau. (On ne fait aucune hypothèse sur la caractéristique de A.)

Pour tout $f \in F$ et tout $n \in N$ on a :

$$nf = fn ,$$

puisque A est commutatif et que V est un anneau de valuation de F.

Il résulte de la décomposition de A_+, que l'idéal N est premier. Le groupe additif de l'anneau des fractions A_N coïncide avec la somme directe $N_+ \oplus F_+$. En effet soit $\frac{x}{s} \in A_N$ où $x \in A_N$ et $s \in A - N$.

On a :

$$s = n + v \quad \text{où} \quad n \in N, \quad v \in V \quad \text{et} \quad v \neq 0 .$$

Puisque $v^{-1} n \in N$, on peut écrire :

$$n = v(v^{-1} n) .$$

Donc

$$s = v[v^{-1} n + 1] .$$

De $v^{-1} n \in N$, il suit que $1 + v^{-1} n$ est une unité de l'anneau A.

Donc

$$\frac{x}{s} = \frac{x}{v} [v^{-1} n + 1]^{-1} .$$

D'autre part $[v^{-1} n + 1]^{-1} x = m + w$, où $m \in N$ et $w \in V$. Par suite :

$$\frac{x}{s} = mv^{-1} + wv^{-1} \quad \text{où} \quad mv^{-1} \in N \quad \text{et} \quad wv^{-1} \in F ,$$

et cette représentation de $\frac{x}{s}$ comme somme d'un élément de N et d'un élément de F est unique.

Comme N est une F-algèbre dont le treillis des idéaux est totalement ordonné et que $A_N = N_+ \oplus F_+$, l'anneau A_N vérifie la condition C.

Montrons que l'anneau A vérifie la condition C.

Soit I un idéal de A. Soit I^e l'extension de I dans A_N. Si I n'est pas contenu dans N, I^e n'est pas contenu dans N et, par suite, I^e coïncide avec A_N.

Par conséquent, il existe un élément $v \in V$, $v \neq 0$, qui appartient à I.

Soit $n \in N$, $n = v(v^{-1} n) = vm$, où $m = v^{-1} n \in N$.

Donc $n = vm \in I$.

Par suite :

$$N \subseteq I$$

et

$$I_+ = N_+ \oplus (I \cap V)_\oplus ,$$

$I \cap V$ est un idéal de V.

Il en résulte que deux idéaux de A, non contenus dans N sont comparables.

Soient x et y deux éléments de N. On a par exemple : $x = uy$ où $u \in A_N$. Soit $u = n + f$, où $n \in N$ et $f \in F$. Si $f \in V$, $u \in A$ et y divise x dans A. Si $f \notin V$, $f^{-1} \in V$ et $x = f(f^{-1} n + 1) y$, $fn + 1$ est une unité de A et l'on a :

$$y = f^{-1}(f^{-1} n + 1)^{-1} x ,$$

donc x divise y dans A.

Il en résulte que, si I et J sont deux idéaux de A contenus dans N, ils sont comparables.

Donc A est un C-anneau.

Une décomposition de la forme (3) a lieu, lorsque la caractéristique de l'anneau A est p, si l'idéal N est nilpotent.

LEMME 4. - *Si N est nilpotent $(\neq 0)$, l'anneau A_N est artinien.*

En effet soient a et b deux éléments de N n'appartenant pas à N^2. On a par exemple $a = xb$ où x est un élément de A_N.

Puisque $a \notin N^2$, on a : $x \notin N$. Donc x est une unité de A_N et les éléments a et b engendrent le même idéal de A_N. Par conséquent N est un idéal principal de A_N :

$$N = A_N a .$$

Les seuls idéaux de A_N sont A_N, $A_N a$, ..., $A_N a^{k-1}$ et 0, si k est l'ordre de nilpotence de N. Par suite A_N est artinien.

I. S. COHEN a démontré dans [2], le théorème suivant.

THÉORÈME B. - *Si A est un anneau local complet de caractéristique p, A contient un sous-corps F isomorphe au corps résiduel de A* ; par suite A_+ admet la décomposition en somme directe :

$$A_+ = N_+ \oplus F_+ ,$$

où N est l'idéal maximal de A.

On a donc :

THÉORÈME 6 bis. - *Soit A un C-anneau unitaire commutatif de caractéristique p. Si la racine N de A est nilpotente, A contient un anneau de valuation V d'un corps F ; V est isomorphe à A/N ; N est une F-algèbre dont le treillis des idéaux est totalement ordonné et l'on a :*

$$A_+ = N_+ \oplus V_+ .$$

THÉORÈME 8. - Soit K un corps. Soit N une K-algèbre nilpotente d'ordre de nilpotence k. Le treillis des idéaux de l'algèbre N est totalement ordonné, si et seulement si, pour $i = 1 , \ldots , k - 1$, N^i/N^{i+1} est un K-espace vectoriel de dimension 1.

En effet, la condition est nécessaire puisque le treillis du sous-espace vectoriel de N^i/N^{i+1} est totalement ordonné et on démontre qu'elle est suffisante d'une manière analogue à celle utilisée dans le théorème 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRYANT (S. J.) and ZEMMER (J. L.). - A note on completely primary rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 140-141.

[2] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[3] FUCHS (László). - Abelian Groups. - Budapest, Hungarian Academy of Sciences, 1958.